



COMUNICACIONES

SECRETARÍA DE INFRAESTRUCTURA, COMUNICACIONES Y TRANSPORTES



Análisis de maniobrabilidad de vehículo articulado con eje direccional en semirremolque

Mauricio Eliseo Cruz Acevedo
Manuel de Jesús Fabela Gallegos
José Ricardo Hernández Jiménez
Oscar Flores Centeno
David Vázquez Vega
Marco Antonio Hernández Nochebuena

Publicación Técnica No. 732
Querétaro, México
2023

ISSN 0188-7297

Esta investigación fue realizada en la Coordinación de Ingeniería Vehicular e Integridad Estructural (CIVIE) del Instituto Mexicano del Transporte (IMT), por el Ing. Mauricio Eliseo Cruz Acevedo, el Dr. Manuel de Jesús Fabela Gallegos, el M.C. Ricardo Hernández Jiménez, el M.C. Oscar Flores Centeno, el M.C. David Vázquez Vega y al M.C. Marco Antonio Hernández Nochebuena.

Esta investigación es el producto final del proyecto de investigación interna EI 10/22 "Análisis de maniobrabilidad de la configuración vehicular T-S con eje direccional en el semirremolque".

Se agradece la colaboración y comentarios del Dr. Francisco Javier Carrión Viramontes, jefe de la División de Laboratorios de Desempeño Vehicular y de Materiales de la CIVIE.

Tabla de Contenido

	Página
Sinopsis.....	v
Abstract.....	vii
Introducción.....	1
1. Antecedentes.....	3
1.1 Dificultad de maniobras cerradas.....	3
1.2 Configuraciones articuladas en México.....	4
1.3 Vehículos articulados con eje direccional en el semirremolque.....	7
1.4 Clasificación de ejes direccionales.....	8
1.5 Concepto de maniobrabilidad.....	9
1.6 Objetivo y alcance.....	10
2. Desarrollo del modelo.....	13
2.1 Metodología general.....	13
2.2 Principio de Ackermann.....	14
2.3 Modelo bicicleta.....	15
2.4 Modelo bicicleta ampliado.....	17
2.4.1 Modelo de tractocamión articulado.....	17
2.4.2 Ángulo direccional crítico.....	21
2.5 T-S con eje direccional en semirremolque.....	23
2.5.1 Modelo básico de análisis.....	23
2.5.2 Modelo con geometría completa.....	24
3. Validación simplificada de modelos.....	29

3.1	Evaluación experimental.....	29
3.2	Comparación con el modelo.....	32
4.	Análisis paramétrico.....	35
4.1	Variables a parametrizar	35
4.2	Caso de referencia: eje no direccional.....	37
4.3	Efecto del eje direccional en el semirremolque.....	40
	Conclusiones.....	45
	Bibliografía	47
	Anexo 1. T-S con corrimiento de acoplamiento hacia atrás.....	49

Sinopsis

Los vehículos de grandes dimensiones requieren de espacios amplios para ejecutar maniobras direccionales, sobre todo aquéllas realizadas a baja velocidad. Las características de maniobrabilidad de un vehículo se describen a través de indicadores como el radio de giro y el espacio barrido que resultan de una maniobra que produce una trayectoria circular.

Aquí se presenta el desarrollo de un modelo bicicleta extendido para analizar una configuración T2-S1 en la que el eje del semirremolque tiene capacidad direccional. Los resultados del análisis muestran que, para una configuración articulada típica con solamente el eje frontal direccional, el seguimiento de una trayectoria circular se limita a un máximo ángulo direccional en el que se alcanza el entrappe (acuchillamiento). Esta condición es superada con el empleo del segundo eje direccional, ubicado en el semirremolque, que produce menores ángulos de articulación entre unidades y menores radios de giro y espacios de barrido, particularmente cuando el eje del semirremolque puede describir la misma trayectoria que el eje trasero de la unidad motriz. Por tanto, implementar ejes direccionales en los semirremolques beneficia el mejor aprovechamiento del espacio, como en calles estrechas o patios de maniobra.

Abstract

Large vehicles require wide spaces to negotiate directional maneuvers, especially when they advance at low speeds. The maneuverability characteristics of a vehicle are described by indicators such as turning radius and swept space that result from a maneuver of circular path.

Here is presented the development of an extended bicycle model to analyze a T2-S1 vehicular configuration in which the semi-trailer axle has steering capability. The results of the analysis show that, for a typical articulated configuration with only the front axle steerable, path circular maneuvers are limited to a maximum directional angle at which jackknifing is reached. This condition is overcome with the use of the second steerable axle, located on the semi-trailer, which produces smaller articulation angles between units and smaller turning radii and swept surfaces, particularly when the semi-trailer axle can describe the same path as the tractive unit rear axle. Therefore, implementing steerable axles in semi-trailers leads to a better space utilization, such as in narrow lanes or parking and maneuvering in parking zones.

Introducción

Vehículos y carreteras deben ser compatibles para un adecuado aprovechamiento del transporte. Para lograr esa compatibilidad, desde la etapa de diseño de las vialidades se deben considerar tanto las características físicas y geométricas como las capacidades de vehículos e infraestructura que los haga comunes.

Un tema relevante de parte de los vehículos es el comportamiento de las diferentes configuraciones vehiculares, cuyo desempeño difiere por efecto de la velocidad. Al circular a alta velocidad, como en la operación normal en carretera, los efectos inerciales y fuerzas laterales son manifiestos a través de las demandas de energía de las acciones para mantener el control, mientras que a baja velocidad esos efectos no son significativos, lo que resalta el efecto de las características geométricas. Esta situación es particularmente sensible en acciones de cambio de dirección a muy baja velocidad, en las que es importante el espacio que ocupa el vehículo y que se asocia a su maniobrabilidad.

Generalmente, las características de maniobrabilidad de un vehículo se describen a través de indicadores como el radio de giro y el espacio barrido, que resultan de la ejecución de una maniobra de giro direccional en la que se produce una trayectoria circular. Esto es posible al mantener un ángulo de dirección constante mientras el vehículo avanza a baja velocidad, en la que puntos importantes de su geometría describen círculos y, de ahí, se obtienen los radios de sus respectivas trayectorias individuales. El espacio de barrido, de acuerdo a los puntos de referencia, denotan una superficie anular, acotada por los radios mayor y menor según la ubicación de los puntos de interés en el vehículo. De acuerdo al escenario de análisis, pueden ser importantes las trayectorias de la rueda más externa como el de la rueda más interna a la curva que se genera, o la esquina más externa de la estructura proyectada en la superficie sobre la que se negocia la curva.

Estos parámetros permiten definir criterios para establecer el trazo geométrico de carreteras, intersecciones y áreas de maniobras, entre otros. En perspectiva opuesta, ayudan a determinar si una zona determinada cuenta con el espacio suficiente para que una configuración vehicular específica circule por ella sin que haya obstrucciones en su maniobra.

El común de los vehículos actuales es que la direccionalidad se brinda a través del eje frontal, mientras el resto de los ejes están direccionalmente fijos hacia el frente. En vehículos de grandes dimensiones, como los de autotransporte de carga, el espacio que requieren es amplio, lo que limita su tránsito en calles y carreteras estrechas o en intersecciones urbanas o zonas de estacionamiento y de descarga.

Una alternativa para mejorar la maniobrabilidad de vehículos de grandes dimensiones es la de colocar un eje direccional adicional. Por tanto, este estudio presenta las características de maniobrabilidad de una configuración vehicular articulada del tipo tractocamión-semirremolque, en el que el último eje tiene capacidad direccional. El análisis se sustenta en el desarrollo de una versión extendida del modelo bicicleta bajo el escenario de ejecución de una maniobra de giro estable a baja velocidad, con los cuales se determinan radios de giro y espacios de barrido.

El presente documento describe, en el primer capítulo, antecedentes relevantes en el estudio de la maniobrabilidad de vehículos, en los que se incluyen dificultades de maniobra de vehículos pesados y algunas aplicaciones de ejes direccionales, así como conceptos básicos en torno a la definición de maniobrabilidad. En el segundo capítulo se describe la metodología seguida para el análisis, así como la deducción básica a partir del modelo bicicleta, que se complementa con una versión extendida para el caso de estudio. Para probar la aplicabilidad del modelo bicicleta desarrollado de manera extendida, el tercer capítulo presenta pruebas de validación de una configuración representativa, con respecto a resultados de pruebas en una configuración real. El cuarto capítulo presenta los resultados de la aplicación del modelo que representa la configuración de estudio, que incluye escenarios de comparación con el caso de no contar con eje direccional.

Las conclusiones, como parte final del documento, presentan los hechos relevantes derivados del análisis y los resultados. Así mismo, expone algunas consideraciones que pudieran ser base para el desarrollo de otros estudios en temas similares.

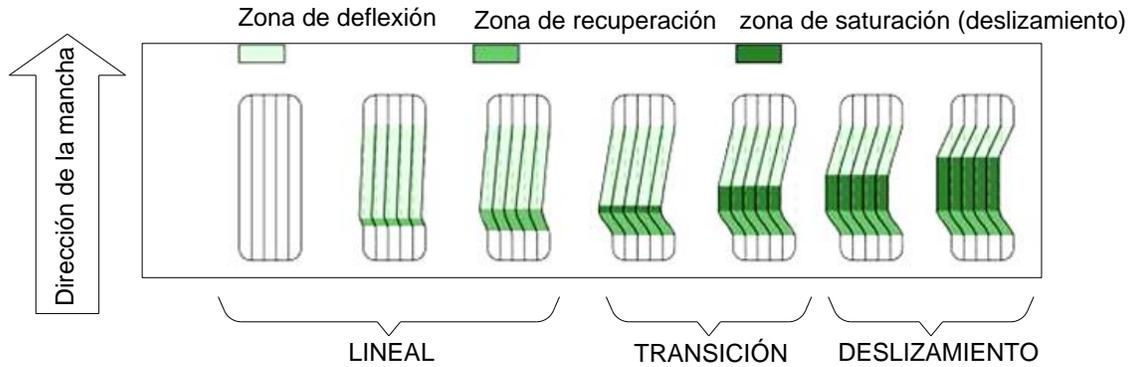
1. Antecedentes

La configuración vehicular de tractocamión-semirremolque (T-S) es una de las más generalizadas para el transporte de carga por carretera en México. Esta configuración combina las unidades mencionadas a través de un mecanismo de acoplamiento denominado quinta rueda, que brinda un movimiento articulado entre las unidades. La longitud de la combinación articulada puede sobrepasar los 22 m, por lo que sus maniobras requieren de espacios amplios, particularmente las maniobras cerradas como los cambios de dirección en calles urbanas, en patios de maniobra y de estacionamiento, [1].

1.1 Dificultad de maniobras cerradas

Para favorecer el incremento de la capacidad de carga se introdujo la incorporación de una mayor cantidad de ejes en los vehículos y, con ello, mantener niveles adecuados de “descarga” por eje. Sin embargo, hay limitantes normativas respecto al número de ejes a emplear en los vehículos, lo que incluye la separación entre los ejes, [2].

Así mismo, existen otros elementos a considerar en cuanto a la incorporación de ejes en los transportes de carga, los cuales repercuten en la facilidad con que tales unidades son manejadas. La incorporación de más ejes en un vehículo incrementa su rigidez direccional, lo que dificulta que la unidad siga trayectorias curvas o cambios de dirección. Ejemplo de la rigidez y dificultad para el cambio de orientación es la deformación que sufren las llantas neumáticas, como se ilustra en la Figura 1.1, donde se puede apreciar las diferentes etapas de deformación durante el cambio de dirección longitudinal, [3].



Fuente: Km77. (2005).

Figura 1.1 Etapas de deformación en un neumático

Para enfrentar esa situación de rigidez direccional se han diseñado diferentes alternativas. Entre ellas está el empleo de ejes que tengan la capacidad de girar por efecto del avance del vehículo en una trayectoria curva, o mediante mecanismos que eleven los ejes que dificultan la maniobra direccional.

Es común que vehículos de grandes dimensiones se califiquen con problemas de baja maniobrabilidad. Esto significa que estos vehículos tengan dificultad para posicionarse en espacios reducidos. En este sentido, la maniobrabilidad se refiere a la capacidad del vehículo para ejecutar cambios de posición o dirección y la facilidad para realizarlos, lo que asocia, por tanto, espacios y movimientos necesarios en la operación del mismo, [4].

1.2 Configuraciones articuladas en México

Los vehículos articulados autorizados legalmente para circular en carreteras federales mexicanas se describen en la Norma Oficial Mexicana NOM-012-SCT-2-2017 "Sobre el peso y dimensiones máximas con los que pueden circular los vehículos de autotransporte que transitan en las vías generales de comunicación de jurisdicción federal". Los vehículos o configuraciones se definen según su clase, como se muestra en la Tabla 1.1, donde se indica también la nomenclatura con que se identifican según la norma, [5].

Tabla 1.1 Clasificación de vehículos articulados y nomenclatura

CLASE: Vehículo o configuración	Nomenclatura
camión remolque	C-R
tractocamión articulado	T-S
tractocamión doblemente articulado	T-S-R y T-S-S

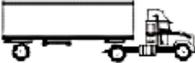
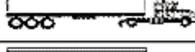
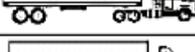
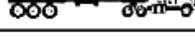
Fuente: Norma Oficial Mexicana NOM-012-SCT-2-2017 (2017).

Además de la clasificación por clase, la identificación se complementa con el número de ejes y de llantas, como se indica en la Figura 1.2 para los camiones con remolque, en la Figura 1.3 para combinaciones de tractocamión con semirremolque y en la Figura 1.4 las combinaciones doblemente articuladas compuestas por tractocamión, semirremolque y remolque.

CAMIÓN-REMOLQUE (C-R)			
NOMENCLATURA	NÚMERO DE EJES	NÚMERO DE LLANTAS	VEHÍCULO
C2-R2	4	14	
C3-R2	5	18	
C2-R3	5	18	
C3-R3	6	22	

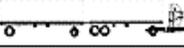
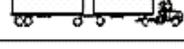
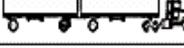
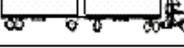
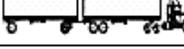
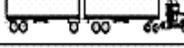
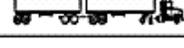
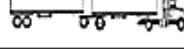
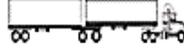
Fuente: Norma Oficial Mexicana NOM-012-SCT-2-2017 (2017).

Figura 1.2 Clasificación de camiones unitarios y camiones con remolque, considerando el número de ejes

TRACTOCAMION ARTICULADO (T-S)			
NOMENCLATURA	NÚMERO DE EJES	NÚMERO DE LLANTAS	CONFIGURACIÓN DEL VEHÍCULO
T2-S1	3	10	
T2-S2	4	14	
T2-S3	5	18	
T3-S1	4	14	
T3-S2	5	18	
T3-S3	6	22	

Fuente: Norma Oficial Mexicana NOM-012-SCT-2-2017 (2017).

Figura 1.3 Clasificación de tractocamiones y semirremolques de acuerdo al número de ejes

TRACTOCAMIÓN SEMIRREMOLQUE-REMOLQUE (T-S-R)			
NOMENCLATURA	NÚMERO DE EJES	NÚMERO DE LLANTAS	CONFIGURACIÓN DEL VEHÍCULO
T2-S1-R2	5	18	
T2-S2-R2	6	22	
T2-S1-R3	6	22	
T3-S1-R2	6	22	
T3-S1-R3	7	26	
T3-S2-R2	7	26	
T3-S2-R3	8	30	
T3-S2-R4	9	34	
T2-S2-S2	6	22	
T3-S2-S2	7	26	
T3-S3-S2	8	30	

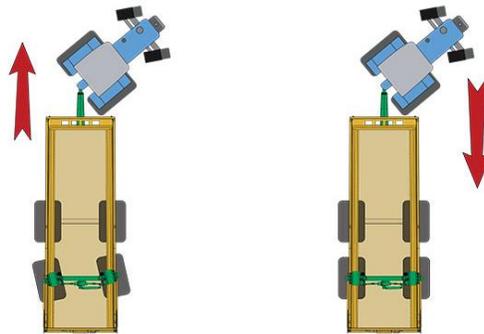
Fuente: Norma Oficial Mexicana NOM-012-SCT-2-2017 (2017).

Figura 1.4 Clasificación de combinaciones vehiculares, tractor, semirremolque, remolque de acuerdo al número de ejes

Las combinaciones vehiculares articuladas son comúnmente utilizadas para transporte de carga de largo itinerario. Diversas ciudades en el país han crecido enormemente en los últimos años y su crecimiento se está dando fuera de los límites originales e, incluso, más allá de lo originalmente previsto. La extensión de las zonas urbanas ha absorbido rutas carreteras de servicio pesado que, inevitablemente, han generado mayor interacción entre vehículos de carga y pasaje de largo itinerario con el tránsito urbano y local. Esta condición ha generado conflicto entre los vehículos y la infraestructura vial urbana, algunas de ellas no diseñadas inicialmente para el tránsito de vehículos de carga de grandes dimensiones. Estas situaciones requieren de su estudio y análisis para brindar información que ayude a tomar decisiones en la planificación de la infraestructura o, bien, en el mejor uso de la infraestructura ya existente, que atienda el tema de espacios o trayectorias descritas por estos vehículos de grandes dimensiones, particularmente en su desplazamiento a bajas velocidades.

1.3 Vehículos articulados con eje direccional en el semirremolque

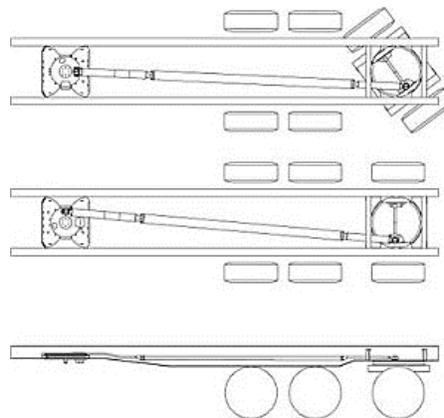
Una alternativa que ha sido explorada en algunos campos que utilizan unidades vehiculares articuladas es la de colocar ejes direccionales en las unidades remolcadas. Un ejemplo de este tipo es la aplicación en vehículos agrícolas de arrastre, como el mostrado en la Figura 1.5, desarrollado por la empresa JOSKIN. En dicha aplicación, el semirremolque, acoplado a un tractor agrícola, posee un eje direccional que se orienta siguiendo la dirección impuesta por el tractor. El ángulo de giro para el eje direccional es de $\pm 15^\circ$ en función del tamaño de los neumáticos, diseñado para conducir a baja velocidad, [6].



Fuente: JOSKIN. (2020).

Figura 1.5 Tecnología de ejes direccionales desarrollados por JOSKIN

Otro ejemplo de aplicación para mecanismos de quinta rueda es el esquematizado en la Figura 1.6, desarrollado por la empresa MiTrailer. El mecanismo de dirección es accionado por la quinta rueda y su descripción indica que es funcional tanto en marcha de avance como de reversa, [7].



Fuente: MiTrailer Semirremolques y Remolques. (2015).

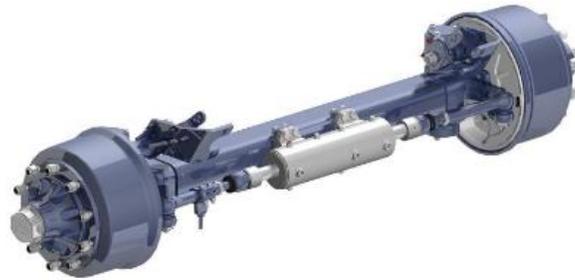
Figura 1.6 Eje direccional accionado por quinta rueda

Estos ejemplos muestran la aplicabilidad de ejes direccionales en unidades de arrastre, como alternativas para mejorar la maniobrabilidad de combinaciones articuladas. Este tipo de ejes proporcionan condiciones para aprovechar el espacio disponible, así como otros beneficios de interacción mecánica de la llanta con el piso a bajas velocidades en demandas de giro críticas.

1.4 Clasificación de ejes direccionales

De acuerdo a su accionamiento, los ejes direccionales pueden dividirse en ejes direccionales comandados y ejes auto direccionales. En el sistema de ejes comandados sus llantas se orientan de forma proporcional a las del eje de dirección, ya sea por acoplamientos mecánicos o a través de un sistema servo hidráulico.

Un ejemplo de un eje direccional comandado se presenta en la Figura 1.7. Al centro del eje se aprecia el sistema servo hidráulico que acciona un par de barras que cambian la orientación de las llantas con respecto al eje longitudinal del vehículo, [8].



Fuente: SOMIM A3-95 (2018).

Figura 1.7 Eje direccional comandado

Por otro lado, en los ejes auto direccionales las ruedas cambian su orientación debido a la presencia de fuerzas laterales que se desarrollan entre las llantas y el camino cuando el vehículo cambia de dirección. Generalmente no cuentan con alguna forma de control y el giro se produce de acuerdo a la magnitud de las fuerzas laterales. Para lograr la estabilidad, el eje cuenta con un dispositivo o sistema que proporciona una fuerza restauradora para regresar el eje a la posición central. Un ejemplo de un eje auto direccional se presenta en la Figura 1.8, en donde se observa un mecanismo amortiguador que funge como elemento de restauración de las ruedas a su posición original, [8].



Fuente: SOMIM A3-95 (2018).

Figura 1.8 Eje autodireccional

Los sistemas mostrados son los más comunes disponibles comercialmente. Es posible encontrar algunas variantes de accionamiento de estos sistemas, aunque en esencia el ángulo de orientación de las ruedas es el resultado del efecto de las fuerzas laterales que ocasionan el arrastre en ejes fijos o de giros proporcionales al ángulo en las ruedas direccionales o del ángulo entre ambas unidades en la configuración vehicular.

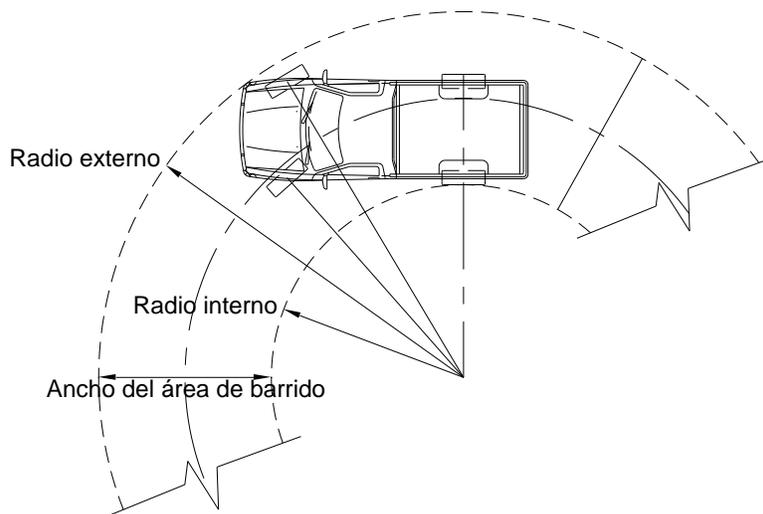
1.5 Concepto de maniobrabilidad

La maniobrabilidad de un vehículo está relacionada con la capacidad de cambiar de dirección, asociada a los espacios requeridos para la ejecución de una maniobra que involucre cambios en su trayectoria, [2]. En este sentido, considera fundamentalmente aspectos geométricos de la unidad y la ubicación de sus ejes o, si fuera el caso de unidades articuladas, la posición del mecanismo de acoplamiento y la disposición de los ejes. Por tanto, las dimensiones de las unidades y la posición de los ejes, así como las amplitudes y características del eje direccional, es decir, del eje cuyas llantas pueden orientarse para facilitar los cambios de dirección, son imprescindibles en la definición de las características de maniobrabilidad. En el intervalo de operación normal de un vehículo de carretera, los requerimientos más críticos se presentan cuando no hay efectos inerciales, es decir, cuando la maniobra se desempeña a baja velocidad.

El análisis de las condiciones críticas de espacio se realiza básicamente bajo la suposición de que el vehículo se desplaza a baja velocidad. Esto, ya que el concepto de maniobrabilidad se asocia con la necesidad de realizar maniobras en espacios reducidos sin efectos inerciales relevantes que produzcan fuerzas laterales en las ruedas.

Las características de maniobrabilidad se expresan a través de dos indicadores principales: el radio de giro y la superficie barrida, con base en el seguimiento de una trayectoria circular. La superficie barrida esencialmente depende del primer indicador, el radio externo (máximo) y el radio interno (mínimo), que denota una superficie anular, como se ilustra en la Figura 1.9. No obstante, es común utilizar el radio mínimo de

giro, comúnmente referido a la rueda interna del último eje de un vehículo o combinación vehicular.



Fuente: Publicación técnica IMT No. 687 (2021).

Figura 1.9 Radio externo y radio interno en una maniobra circular

Sobre la maniobrabilidad de vehículos, se han realizado diferentes estudios con mediciones para identificar las características de diferentes configuraciones vehiculares. La intención de los mismos fue apoyar en el análisis y en criterios de comparación con trazos en curvas de caminos para determinar la magnitud de la intromisión de ejes en espacios adyacentes o invasión de carriles. En ese sentido, algunas estimaciones pueden realizarse empleando modelos simplificados para contar con información aproximada de obtención rápida, aplicando metodologías experimentales y de modelos simplificados, [1, 4, 5].

1.6 Objetivo y alcance

Con el propósito de explorar sobre las características de los ejes direccionales en posiciones adicionales al eje frontal de unidades autopropulsadas, en el presente estudio se planteó el objetivo de evaluar los aspectos de maniobrabilidad de una configuración del tipo T-S. La unidad tractiva considerada está soportada por dos ejes, uno frontal, direccional y el posterior tractivo de carga. Como condición relevante, el semirremolque acoplado a la combinación por medio de una articulación, cuenta con un solo eje que, además, tiene capacidad direccional. El análisis se realiza para acciones de seguimiento de trayectoria circular bajo condiciones cuasi-estáticas; es decir, con desplazamientos a muy baja velocidad de manera que no hay efectos inerciales significativos ni generación de fuerzas laterales en las ruedas, principalmente.

Consecuentemente, no hay ángulos de deslizamiento significativos durante la rotación de las ruedas cuando el vehículo debe negociar el giro a partir de un centro instantáneo de rotación y bajo el principio de Ackermann.

Los modelos empleados parten del modelo bicicleta, cuya extensión para la representación de combinaciones de unidades consideran únicamente los aspectos geométricos de la configuración articulada. La información generada permite identificar características sobre la incorporación de ejes direccionales en vehículos de autotransporte.

2. Desarrollo del modelo

En este capítulo se aborda el desarrollo del modelo para vehículos con eje direccional en el semirremolque, que toma de base el modelo bicicleta y condiciones establecidas por el principio de Ackerman. Por Tanto, se describe la metodología general seguida en este proceso, la cual incluye la simplificación del análisis de maniobrabilidad para un modelo bicicleta ampliado que facilita la deducción de las ecuaciones para vehículos articulados con eje fijo en el semirremolque. Por último, se aborda el modelo T-S con eje direccional en semirremolque para determinar ángulos críticos y los radios de giro de interés, así como las consideraciones para el eje direccional en la unidad de arrastre.

2.1 Metodología general

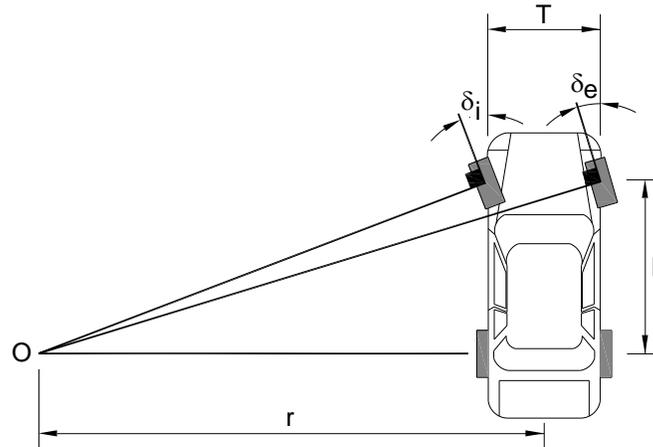
El análisis de maniobrabilidad de la combinación articulada de una unidad tractiva y otra de arrastre, esta última con un eje direccional, resulta de la aplicación del modelo bicicleta básico, que se amplía al introducir la segunda unidad y la direccionalidad en un eje posterior. Esta combinación considera que la unidad tractiva cuenta con un eje sencillo direccional frontal y un eje sencillo tractivo, así como una articulación de quinta rueda, mientras que la unidad de arrastre la constituye un semirremolque con solamente un eje.

A partir de la deducción de las ecuaciones del modelo se identifican las variables lineales y angulares que determinan los espacios proyectados en la superficie plana sobre la que se desplaza el vehículo que se requieren para la ejecución de una curva circular cerrada. Así, de la geometría del vehículo (ancho, longitud, volados, ubicación de puntos representativos de contacto entre llantas y piso, principalmente), se determinan los espacios de cuerdo a los radios de giro que describen puntos de interés.

Una vez identificadas las principales variables, se parametrizan en función de los ángulos de giro en el eje direccional frontal y, en su caso, en el eje direccional posterior (en el semirremolque). En el caso de contar con capacidad direccional en el eje posterior, se considera una relación de dependencia de la amplitud de giro del eje direccional frontal de la unidad tractiva. Con ello se determinan diferentes escenarios de análisis sobre la maniobrabilidad de la configuración vehicular con eje direccional en el semirremolque.

2.2 Principio de Ackermann

Para que un vehículo de ruedas pueda seguir una trayectoria curva en condición de rodamiento puro, sin patinar ni deslizar, los ejes de todas las ruedas deben converger en un mismo punto, como se muestra en la Figura 2.1.



Fuente: Publicación técnica IMT No. 687 (2021).

Figura 2.1 Condición de giro respecto al centro instantáneo de rotación O

El punto de convergencia se denomina centro instantáneo de rotación. Debido a la separación lateral de las ruedas en el mismo eje, para que se de esa condición, las ruedas direccionales deben orientarse a ángulos diferentes de acuerdo a la siguiente relación:

$$\cot \delta_e - \cot \delta_i = \frac{T}{L} \quad (1)$$

Donde:

δ_e : Angulo de giro de la rueda exterior

δ_i : Angulo de giro de la rueda interior

L: Distancia entre ejes

T: Distancia entre centros de ruedas en el eje (entrevía)

Si se considera el radio r (distancia del centro instantáneo de rotación, O, al centro del eje trasero, como se ilustra en la Figura 2.1), entonces se cumple también lo siguiente:

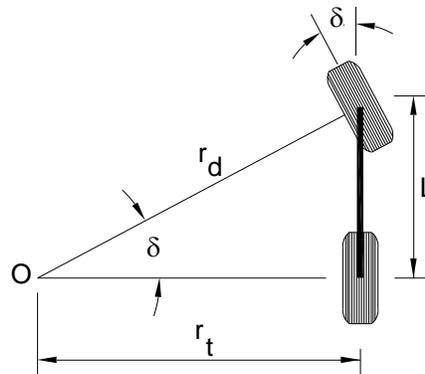
$$\tan \delta_e = \frac{L}{r + \frac{T}{2}} \quad (2a)$$

$$\tan \delta_i = \frac{L}{r - \frac{T}{2}} \quad (2b)$$

El cumplimiento de estas condiciones geométricas representa el Principio de Ackermann, en el cual se basan comúnmente los mecanismos de dirección de los vehículos. Como se observa, dicho principio relaciona los ángulos de orientación en el eje direccional con las dimensiones referentes a la ubicación de las ruedas y ejes en el vehículo, indicadas en la figura como T y L.

2.3 Modelo bicicleta

Para facilitar los análisis de maniobrabilidad de un vehículo comúnmente se aplica una simplificación de su representación direccional. La suposición de partida corresponde al aparente seguimiento de una trayectoria central, por lo que el ancho de los ejes se comprime hacia el plano central longitudinal, como se ilustra en la Figura 2.2.



Fuente: Publicación técnica IMT No. 687 (2021).

Figura 2.2 Representación de un vehículo según modelo bicicleta

Debido al resultado de la representación, el modelo resultante es comúnmente llamado “modelo bicicleta”, con el cual se mantienen las consideraciones del principio de Ackermann. De acuerdo a las variables geométricas indicadas, es posible deducir las siguientes relaciones:

$$r_d = \frac{L}{\text{sen}(\delta_d)} \quad (3)$$

$$r_t = \frac{L}{\text{tan}(\delta_d)} \quad (4)$$

Donde:

- δ : Ángulo de orientación de la rueda direccional
- r_d : Radio de giro de la rueda frontal direccional
- r_t : Radio de giro de la rueda posterior

Cabe mencionar que, en este caso, r_t coincide con el valor de R indicado en la figura 2.1. Al desplazarse y mantener el ángulo de orientación fijo, el vehículo representado ocupará una superficie anular acotada por los radios r_d y r_t . La superficie anular resultante es el espacio barrido entre las trayectorias de las ruedas, lo que es un indicador de los requerimientos de espacio para una condición de giro definida.

El vehículo, con sus dimensiones originales, requiere de un mayor espacio. Las dimensiones globales del vehículo que se representa con el modelo bicicleta se muestran en la Figura 2.3.

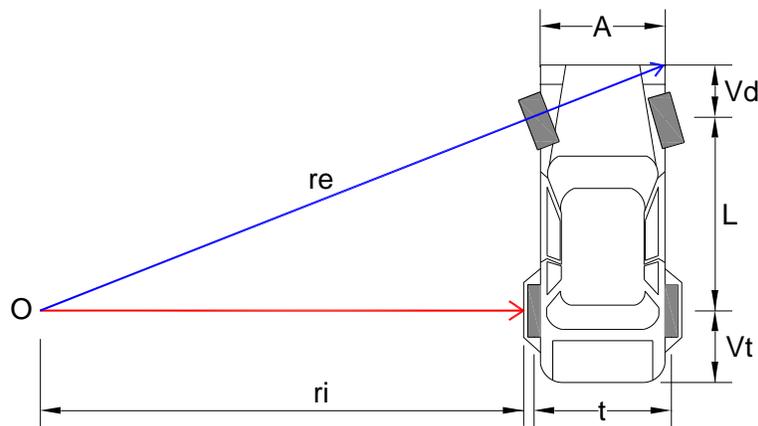


Figura 2.3 Representación de un vehículo según modelo bicicleta

Además de las distancias L y t ya descritas, el esquema incluye las siguientes dimensiones:

- A : Ancho de la carrocería del vehículo
- V_d : Volado delantero (extensión de la estructura al frente del eje delantero)
- V_t : Volado trasero del vehículo (extensión de la estructura hacia atrás del eje posterior)
- r_i : Distancia hacia la rueda interna al giro en el eje posterior (radio interno)
- r_e : Distancia hacia la esquina frontal exterior de la estructura del vehículo (radio externo)

Los radios r_i y r_e se obtienen a partir del radio r_t del modelo bicicleta y las dimensiones del vehículo, que resultan como sigue:

$$r_i = r_t - \frac{A}{2} \tag{5}$$

$$r_e = \sqrt{\left(r_t + \frac{A}{2}\right)^2 + (L + Vd)^2} \quad (6)$$

Donde las variables ya han sido previamente descritas.

Una aproximación de r_i y r_e puede realizarse si la diferencia entre el ancho del vehículo y la entevía es pequeña. Si es así, el parámetro A puede sustituirse por el valor de T , que pudiera ser el caso de vehículos de grandes dimensiones. Si así se considera, también se puede aproximar el valor de los ángulos de orientación de las ruedas direccionales, δ_e y δ_i , si se cuenta con el valor de r_t , como sigue:

$$\delta_i = \tan^{-1}\left(\frac{L}{r_t - \frac{A}{2}}\right) \quad (7a)$$

$$\delta_e = \tan^{-1}\left(\frac{L}{r_t + \frac{A}{2}}\right) \quad (7b)$$

Así, el modelo bicicleta es útil en la determinación de los radios de giro y de los espacios de barrido que un vehículo unitario puede requerir. Evidentemente, el movimiento será dependiente no solamente de la geometría, sino también de la capacidad tractiva del vehículo, lo cual no es contemplado por este modelo.

2.4 Modelo bicicleta ampliado

El modelo bicicleta puede aplicarse para explorar los requerimientos de espacio no solamente de vehículos unitarios, sino de aquéllos que combinen varias unidades. Para ese propósito, bajo suposiciones y condiciones geométricas similares, el modelo puede extenderse agregando las unidades y los puntos de conexión entre ellas, [1].

2.4.1 Modelo de tractocamión articulado

Para el caso de estudio, se considera la combinación articulada de una unidad tractiva y una unidad remolcada con ejes sencillos en todas sus posiciones, como se muestra en la Figura 2.4.

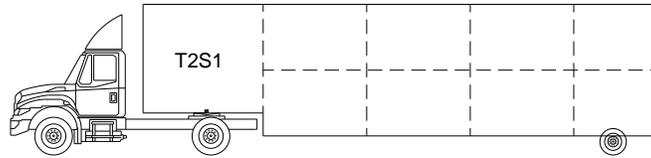


Figura 2.4 Configuración de unidad tractiva y unidad remolcada, T2-S1

En proyección sobre el plano de movimiento, el modelo correspondiente puede representarse como se indica en la Figura 2.5, que muestra las principales dimensiones y ubicación de ejes y articulación en la configuración.

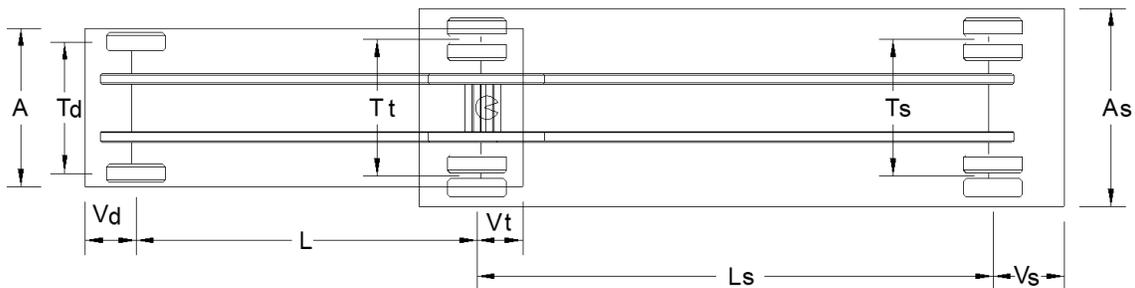


Figura 2.5 Parámetros dimensionales en la combinación de unidad tractiva y unidad remolcada

Los parámetros en el esquema de la figura, indica lo siguiente:

- A: Ancho de la unidad tractiva
- L: Distancia entre ejes
- Td: Entrevía en eje delantero
- Tt: Entrevía en eje trasero
- Vd: Volado delantero
- Vt: Volado trasero
- As: Ancho de semirremolque
- Ls: Distancia articulación-eje
- Ts: Entrevía en eje de semirremolque
- Vts: Volado trasero de semirremolque

Las configuraciones articuladas, en algunos casos, presentan un corrimiento del punto de acoplamiento respecto al centro del eje de la unidad tractiva. Este corrimiento puede tener efectos dinámicos, pero los análisis geométricos, en términos de maniobrabilidad, no representan una influencia significativa, [1]. Por ese motivo, no se introduce como una característica fundamental en el modelo a desarrollar para este análisis.

El modelo bicicleta representativo de la combinación de unidades tractiva y remolcada, acopladas mediante un mecanismo de articulación, se presenta en la Figura 2.6

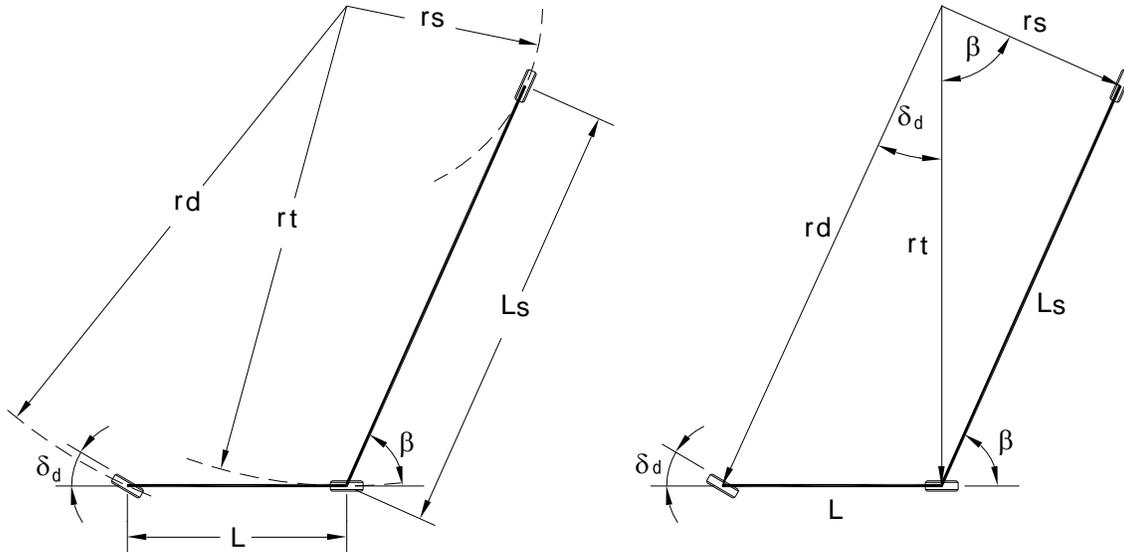


Figura 2.6 Modelo bicicleta de la combinación articulada y esquema de análisis

La definición del modelo incluye las siguientes variables:

- δ_d : Ángulo de orientación de la rueda direccional
- L: Distancia entre ejes
- L_s : Distancia entre la articulación y el eje del semirremolque
- r_d : Radio de giro de la rueda en el eje frontal direccional
- r_t : Radio de giro de la rueda en el eje posterior de la unidad tractiva
- r_s : Radio de giro de la rueda en el eje del semirremolque
- β : Ángulo de articulación entre las unidades

Los parámetros a determinar, de acuerdo al esquema del modelo, son el radio de giro descrito por el eje delantero, r_d ; el del eje trasero de la unidad principal, r_t , y el descrito por el eje del remolque, r_s ; así como el ángulo formado entre los ejes longitudinales de ambas unidades, β . Estos, en función del ángulo de la rueda direccional, δ , y de las distancias de ubicación de los ejes en la unidad directriz (L) y en el remolque (L_s). Los radios r_d y r_t se estiman como se indica en las ecuaciones (3) y (4); mientras que el radio r_s y el ángulo de articulación β se obtienen como sigue, [1]:

$$r_s = \sqrt{r_t^2 - L_s^2} \quad (8)$$

$$\beta = \tan^{-1} \left[\frac{L_s}{r_s} \right] \quad (9)$$

Para determinar los radios que definen el espacio que necesitaría un tractocamión articulado al desplazarse en una trayectoria curva circular, debe tenerse en cuenta las dimensiones reales del vehículo. Dimensiones

importantes para determinar la superficie barrida son la parte estructural por delante del eje delantero, el ancho de la unidad tractiva y de la unidad remolcada, así como las entrevías de los ejes respectivos. Los radios involucrados en ese espacio se representan en la Figura 2.7.

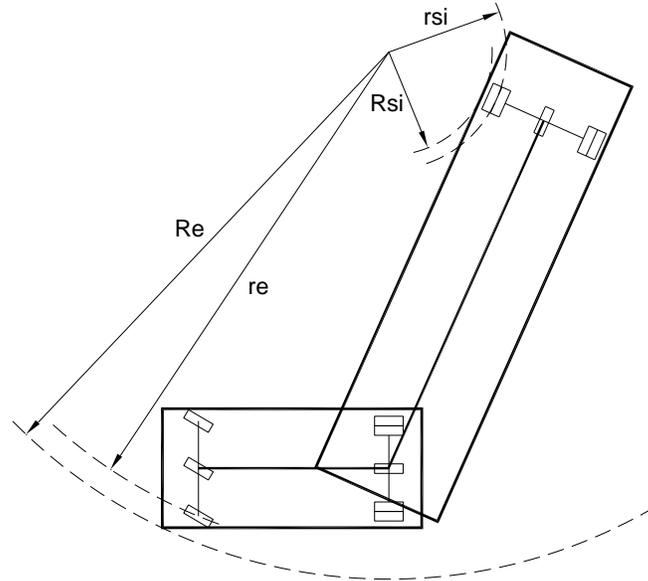


Figura 2.7 Radios que definen los espacios de maniobra

Esos radios se obtienen como sigue:

$$R_e = \sqrt{(L + Vd)^2 + \left(r_t + \frac{A}{2}\right)^2} \quad (10)$$

$$r_e = \sqrt{L^2 + \left(r_t + \frac{T_t}{2}\right)^2} \quad (11)$$

$$R_{si} = r_s - \frac{A_s}{2} \quad (12)$$

$$r_{si} = r_s - \frac{T_s}{2} \quad (13)$$

Donde, además de las variables ya conocidas:

R_e : Radio de giro de la esquina exterior en la unidad tractiva

r_e : Radio de giro de la rueda exterior en el eje frontal direccional

R_{si} : Radio de giro del costado interior del semirremolque en el eje posterior

r_{si} : Radio de giro de la rueda interior en el eje del semirremolque

Conforme esos radios, con apoyo de la Figura 2.8, se definen los espacios de maniobra.

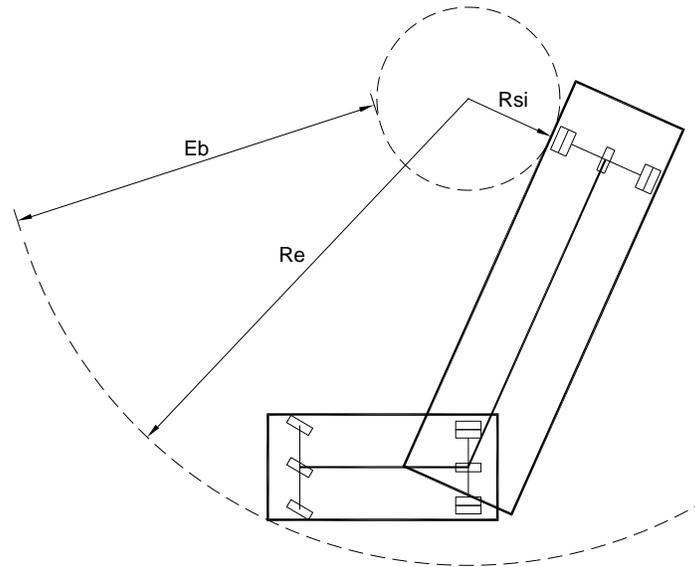


Figura 2.8 Radios que definen los espacios de maniobra

Estos espacios se determinan como la diferencia entre los radios calculados, diferencias expresadas como sigue:

$$E_b = R_e - R_{si} \quad (14a)$$

$$E_{bei} = r_e - r_{si} \quad (14b)$$

Donde:

E_b : Espacio total barrido

E_{bei} : Espacio barrido entre ruedas extremas

Como se puede observar, estas estimaciones corresponden con la configuración direccional común, en la que la capacidad direccional solamente la tiene el eje frontal.

2.4.2 Ángulo direccional crítico

La constitución física de los vehículos impone limitantes en las capacidades y desempeño de los vehículos. Una de esas situaciones corresponde al intervalo alcanzable en el ángulo de orientación de las ruedas direccionales, el cual es especialmente significativo en configuraciones vehiculares que combinan varias unidades, como la de tractocamión-semirremolque (T-S). Debido a las características de la interconexión entre las unidades y sus dimensiones, la unidad remolcada

restringe aún más el intervalo operativo del ángulo direccional en la unidad frontal y limita a un valor máximo que, si se sobrepasa, produce una condición de inmovilidad o de fuerte arrastre al adoptar la forma de “acuchillamiento” y entrampe. Esto se debe a que el radio de giro del remolque es muy pequeño o nulo y, por lo tanto, el centro instantáneo de rotación se acerca o queda en el punto de contacto entre la rueda interna del eje del semirremolque, como se ilustra en la Figura 2.9.

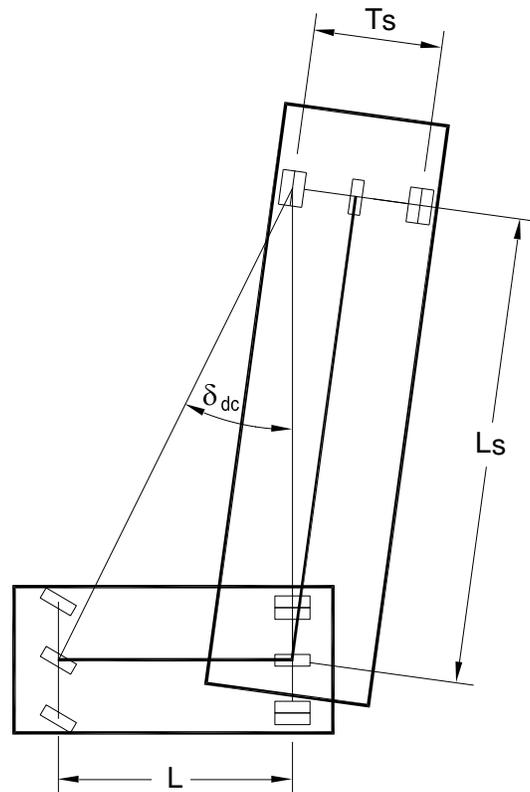


Figura 2.9 Condición direccional de entrampe

El ángulo de las ruedas direccionales que generan es un valor crítico, indicado como δ_{dc} , que impide el desplazamiento del vehículo y puede ocasionar daños físicos al acoplamiento y a otros elementos, razón por la cual es importante evitarlo. Para la determinación de este ángulo se considera el modelo bicicleta representativo de la configuración articulada, en la condición geométrica en la que el radio r_s equivale a $T_s/2$, es decir, la mitad de la entrevía del eje del semirremolque. De esta manera, el ángulo crítico que ocasiona el entrampe se aproxima como:

$$\delta_{dc} = \tan^{-1} \left[\frac{L}{\sqrt{L_s^2 + \left(\frac{T_s}{2}\right)^2}} \right] \quad (15)$$

Como se nota, el ángulo direccional crítico es función de las dimensiones entre ejes y articulación, así como de la entrevía trasera.

2.5 T-S con eje direccional en semirremolque

2.5.1 Modelo básico de análisis

En el caso de que el eje de la unidad remolcada tenga capacidad direccional, se introduce una nueva variable angular en el modelo bicicleta ampliado que representa la combinación T-S. La Figura 2.10 representa dicho modelo, en el que el ángulo δ_t indica la capacidad direccional del eje en el semirremolque.

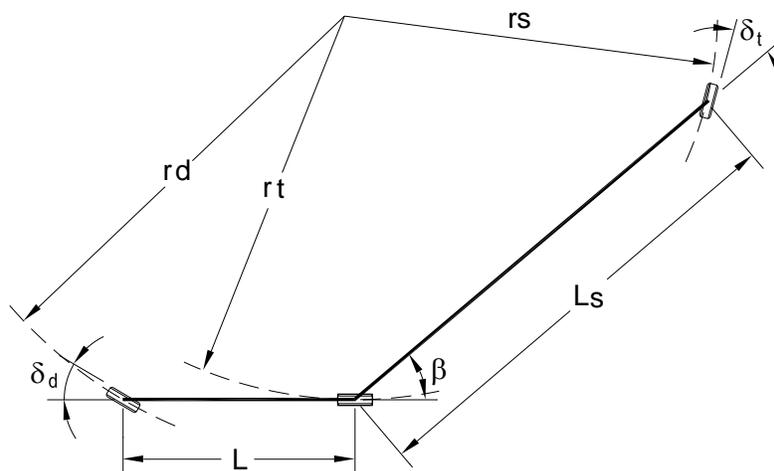


Figura 2.10 Modelo con eje direccional adicional, en el semirremolque

Con el propósito de facilitar el análisis del modelo, la Figura 2.11 ilustra el esquema con otros parámetros de apoyo. En términos descriptivos, además de las variables ya descritas, se tiene:

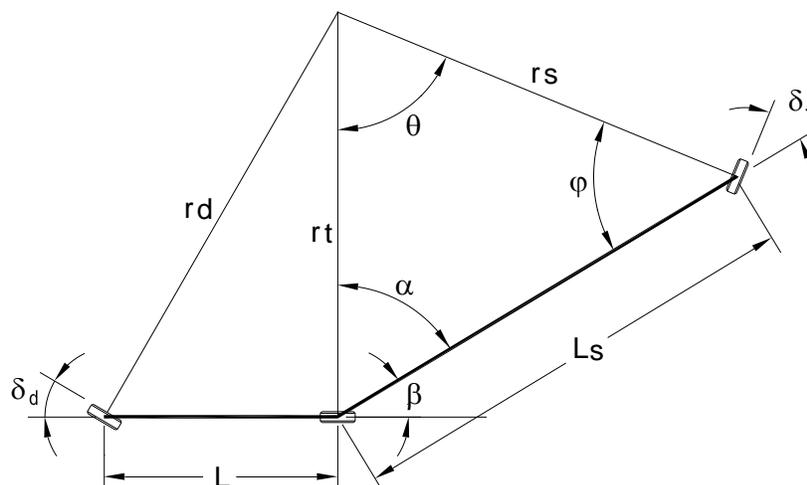


Figura 2.11 Variables requeridas para el análisis

- δ_t : Ángulo direccional en el eje del semirremolque
 φ : Ángulo del vértice entre el semirremolque y el radio r_s
 α : Ángulo del vértice entre el semirremolque y el radio r_t
 θ : Ángulo del vértice entre los radios r_t y r_s

La introducción de la direccionalidad en el eje del semirremolque añade complejidad al análisis del modelo. No obstante, la determinación de los radios de giro que describen la trayectoria de las ruedas direccional y tractiva en el tractocamión es de la misma manera que en los casos previos, es decir, a través de las expresiones (3) y (4), respectivamente para r_t y r_d .

Esencialmente, el parámetro restante de interés para definir el espacio requerido es el radio r_s , así como el ángulo de la configuración geométrica entre unidades vehiculares, β , que debe ser reformulado. Para obtenerlos, se determinan previamente algunos de los parámetros de apoyo como sigue, obtenidos de las variables ya determinadas y de los ángulos direccionales:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \delta_t \quad (16)$$

$$\theta = \text{sen}^{-1} \left[\frac{L_s \cdot \text{sen}(\varphi)}{r_t} \right] \quad (16a)$$

$$\alpha = \pi - \varphi - \theta \quad (16b)$$

El valor angular que define la geometría de la configuración entre las unidades es:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (17)$$

Con la determinación de los parámetros previos, es posible determinar, entonces, el radio de giro que describe el eje direccional. Esto es:

$$r_s = \frac{L_s \cdot \text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta} = \frac{r_t \cdot \text{sen} \alpha}{\text{sen} \varphi} \quad (18)$$

2.5.2 Modelo con geometría completa

Para el caso del análisis del espacio requerido con base en la geometría de la estructura física del vehículo, de acuerdo a su configuración vehicular, para determinar los radios se toma de referencia la Figura 2.12. El esquema representa las siguientes variables dimensionales:

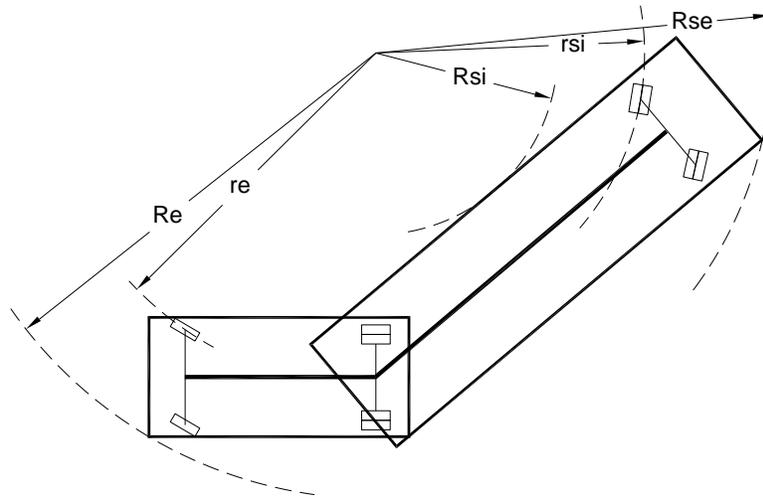


Figura 2.12 Variables requeridas para el análisis

Es posible verificar que, los radios R_e y r_e asociados a la parte externa frontal de la unidad tractiva, se obtienen como se indica en las expresiones (10) y (11). Sin embargo, dada la configuración geométrica que la combinación de unidades adquiere al contar con direccionalidad en el eje del semirremolque, los radios internos que acotan la zona interior de la superficie de maniobra son los siguientes:

$$R_{si} = r_s \cdot \sen \varphi - A_s/2 = r_t \cdot \sen \alpha - A_s/2 \quad (19)$$

$$r_{si} = \sqrt{R_{si}'^2 + (r_s \cdot \cos \varphi)^2} \quad (20a)$$

Donde:

$$R_{si}' = R_{si} + \frac{A_s - T_s}{2} \quad (20b)$$

Así mismo, como caso particular se estima el radio de la trayectoria de la esquina exterior del semirremolque, que se indica como R_{se} . Para determinarlo, se utiliza como apoyo lo indicado en la Figura 2.13.

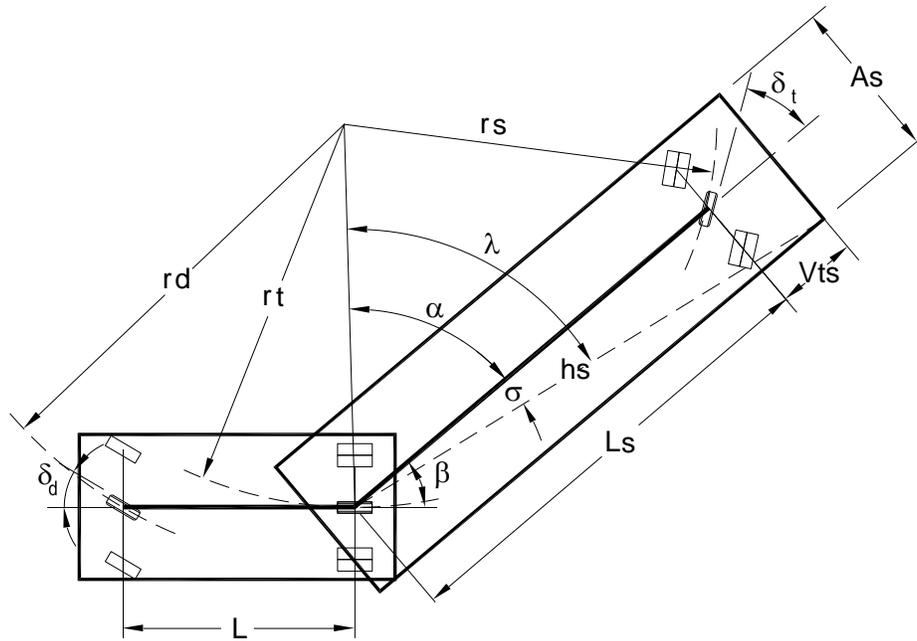


Figura 2.13 Parámetros de apoyo para calcular radios internos

Los parámetros de apoyo son:

$$\sigma = \tan^{-1} \left[\frac{A_s}{2 \cdot (L_s + V_{ts})} \right] \quad (21a)$$

$$h_s = \sqrt{(L_s + V_{ts})^2 + \left(\frac{A_s}{2}\right)^2} \quad (21b)$$

$$\lambda = \alpha + \sigma \quad (21c)$$

Con esos parámetros es posible determinar R_{se} a través de la siguiente expresión:

$$R_{se} = \sqrt{r_t^2 + h_s^2 - 2 \cdot r_t \cdot h_s \cdot \cos \lambda} \quad (22)$$

Este radio podría ser requerido en análisis donde se quiera conocer el efecto si el radio es mayor que el definido por la esquina exterior frontal de la unidad tractiva. Sin embargo, no se considera como parte relevante en los alcances del presente análisis.

Con los radios definidos es posible estimar los espacios de barrido E_b , definido por la expresión (14a), el espacio E_{bei} , según la expresión (14b), además de que, como apoyo, se puede determinar el espacio de barrido E_{ts} , que corresponde a lo siguiente:

$$E_{ts} = r_t - r_s \quad (23)$$

Estos espacios, de acuerdo a los requerimientos de análisis, pueden calcularse en función de los distintos ángulos de orientación de las ruedas direccionales, que definen los diferentes radios de giro.

Para el análisis de vehículos T-S con corrimiento de acoplamiento hacia atrás o configuraciones C-R, se pueden consultar los cálculos para el ángulo del eje direccional en el Anexo 1.

3. Validación simplificada de modelos

Para dar certidumbre a los modelos teóricos es común el requerimiento de una evaluación práctica para constatar la validación de su posible aplicación. Sin embargo, tal validación, en la mayoría de los casos, se limita por la contraparte experimental. Los modelos aquí desarrollados tienen la característica de contar únicamente con ejes sencillos, por lo que se utiliza el modelo de la combinación articulada con acoplamiento con desfase hacia atrás. Una vez mostrada la validez, extensiva para las condiciones de los modelos de ejes sencillos, se parametriza para mostrar los efectos de las distintas variables en la maniobrabilidad, en función de radios y área de barrido.

3.1 Evaluación experimental

Como referencia para la validación de los modelos bicicleta y su aplicación para obtener radios de giro y espacios de barrido, se realizaron pruebas experimentales en las que se utilizó un vehículo de carga ligera tipo camioneta pickup, al que se le conectó un semirremolque mediante un acoplamiento de articulación ubicado detrás del eje posterior de la camioneta. El esquema de la configuración, con sus dimensiones principales, se esquematiza en la Figura 3.1.

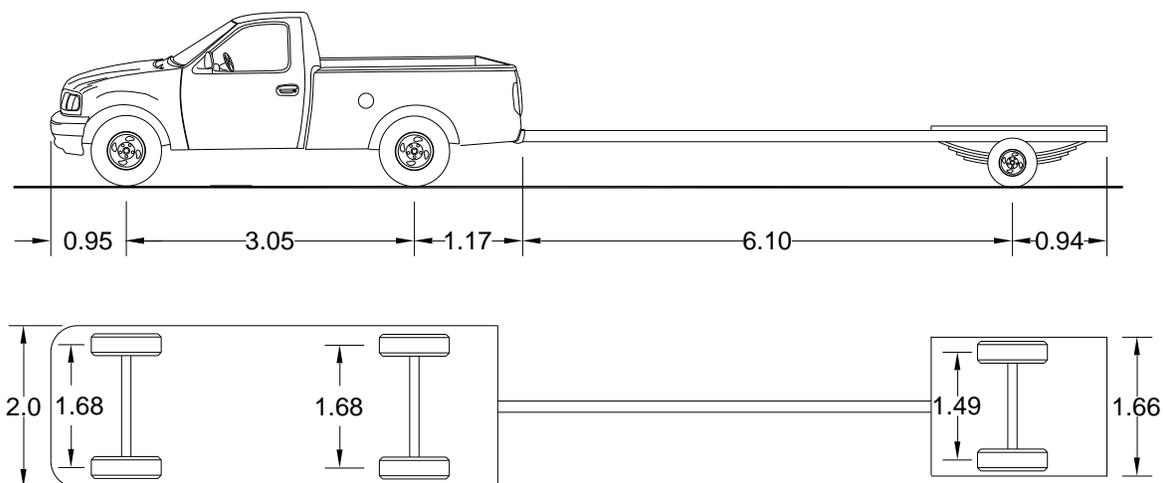
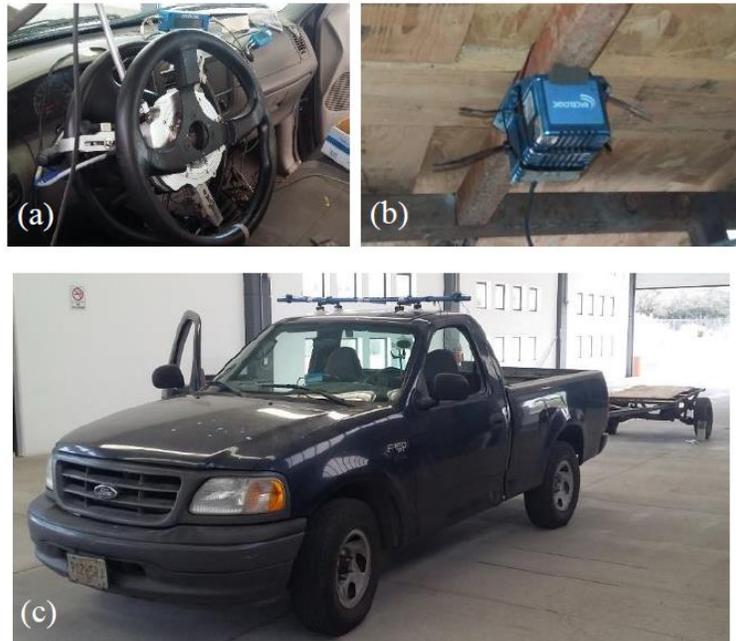


Figura 3.1 Esquema y dimensiones generales del vehículo de prueba, en metros

La Figura 3.2 muestra la combinación de unidades reales, así como algunos elementos utilizados para medición durante el desarrollo de pruebas. Dentro de las características de las unidades utilizadas se menciona el peso de 19.6 kN de la camioneta en vacío, con una capacidad de arrastre de 38.3 kN, mientras que el semirremolque, de un solo eje con ángulo fijo, tenía un peso de 2.9 kN, con una barra de conexión al acoplamiento de la camioneta de longitud variable. Para las pruebas, la longitud de la barra se estableció en su mayor valor, que fue de 6.10 m.

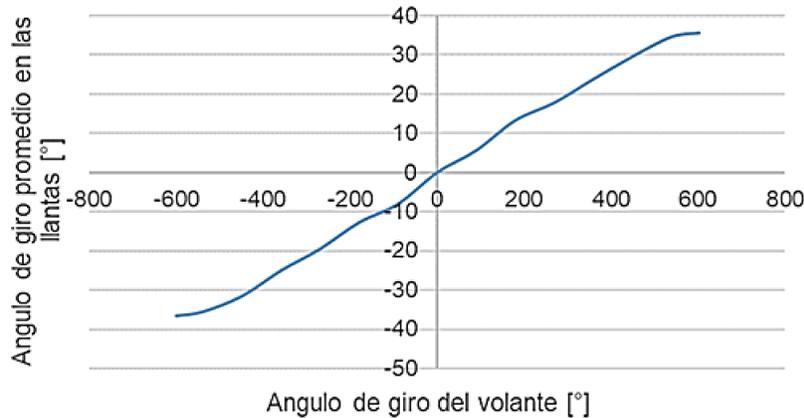


Fuente: SOMIM A3-95 (2018).

Figura 3.2 Vehículo y algunos instrumentos utilizados en las pruebas

Para el registro de los diversos parámetros de interés se colocaron diversos instrumentos de medición sobre el vehículo de prueba, los cuales consistieron en un sistema para el registro del giro del volante (Figura 3.2(a)), una unidad inercial (IMU) sobre el remolque para el registro de velocidades y aceleraciones tanto lineales como angulares (Figura 3.2(b)) y antenas para la determinación de la velocidad de desplazamiento y de la trayectoria seguida por conexión GPS (ver Figura 3.2(c)).

Adicionalmente, se registró la relación entre la magnitud de giro del volante y el ángulo correspondiente en las ruedas direccionales en el eje frontal, que se muestra gráficamente en la Figura 3.3.



Fuente: SOMIM A3-95 (2018).

Figura 3.3 Relación entre el giro del volante y el ángulo en las ruedas del vehículo motriz

Las pruebas consistieron en conducir el vehículo a una velocidad no mayor de 5 km/h y ejecutar maniobras de giro circular 3 diferentes ángulos en el volante del vehículo motriz. Los ángulos en el volante fueron de 400°, 300° y 200°, para producir un ángulo promedio de orientación en las ruedas de 25°, 18.5° y 12.2°, respectivamente, para ambos sentidos de giro. Esto, debido a que, por lo general, los sistemas de dirección de los vehículos son asimétricos. Una vista de la ejecución de las pruebas se muestra en la Figura 3.4, donde se aprecia la colocación de los conos para identificación de la trayectoria y la medición de la distancia entre los conos.



Fuente: SOMIM A3-95 (2018).

Figura 3.4 Ejecución de pruebas

En la Tabla 3.1 se muestran los resultados obtenidos para los radios de giro tanto internos (RI) como externos (RER) para cada condición de prueba al girar el volante hacia la izquierda de acuerdo a la perspectiva del conductor. El radio externo se consideró a partir de la cara externa de las llantas del eje direccional. En este caso no se considera el volante delantero

para el radio externo, esto debido a la dificultad de lograr buena precisión con el método utilizado al realizar la medición en ese punto.

Tabla 3.1 Radios internos, externos y espacios entre radios para giro a la izquierda

Giro del volante, [°]	RI, [m]	RER, [m]	RER-RI, [m]
200	12.39	15.99	3.6
300	5.97	10.61	4.64
400	2.16	8.33	6.17

Con el giro del volante de dirección a la derecha con respecto a la perspectiva del conductor, los resultados de los radios internos y externos registrados se presentan en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2 Radios internos, externos y espacios entre radios para giro a la derecha

Giro del volante, [°]	RI, [m]	RER, [m]	RER-RI, [m]
200	10.67	14.60	3.93
300	5.95	10.69	4.74
400	1.88	8.35	6.47

Para propósitos de comparación posterior, los resultados del giro hacia uno y otro lado se promedian, cuyos resultados se muestran en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3 Promedio de radios internos, externos y espacios entre radios

Giro del volante, [°]	RI, [m]	RER, [m]	RER-RI, [m]
200	11.53	15.30	3.77
300	5.96	10.65	4.69
400	2.02	8.34	6.32

3.2 Comparación con el modelo

Debido a que el análisis del radio externo (RER) de la rueda direccional externa al giro del caso experimental no fue considerada en el modelo, se indica aquí a través de la siguiente expresión, con apoyo de la Figura 3.5. Dicha expresión es:

$$RER = \sqrt{L^2 + \left(\frac{L}{\tan(\delta d)} + \frac{AN}{2} \right)^2} \quad (24)$$

Donde:

RER: Radio generado a partir de la cara externa de llanta externa al sentido de giro del vehículo en el eje direccional motriz

L: Distancia entre ejes

AN: Ancho del vehículo motriz de pruebas

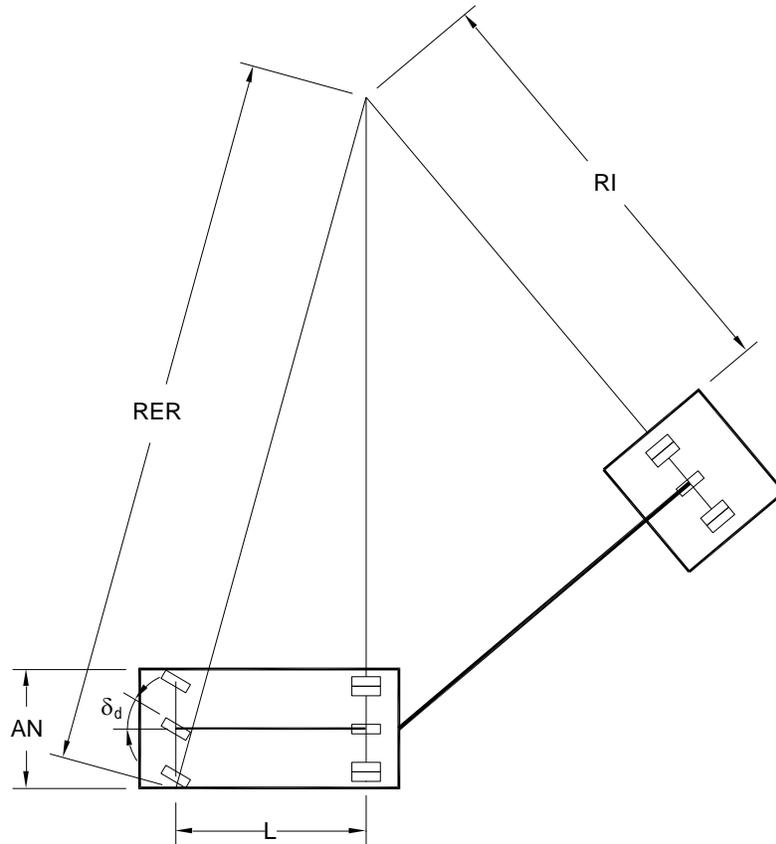


Figura 3.5 Ubicación de la variable RER

Con esta variable definida, en la Tabla 3.4 se muestra la comparativa de los radios obtenidos de la parte experimental (Exp) y los radios obtenidos a través del modelo bicicleta (Mod). El radio interno (RI) corresponde al radio mínimo del modelo y el radio externo de la rueda (RER) del caso experimental. Donde de acuerdo a la Figura 3.1, L será igual a 3.05 m, AN será igual a 2 m y δ_d corresponderá a los ángulos de 12.2° (200°), 18.5° (300°) y 25° (400°) respectivamente.

Tabla 3.4 Comparativa entre caso experimental y modelo bicicleta para Radios de giro y espacios de barrido

Giro del volante, [°]	RI, [m]		RER, [m]		RER-RI, [m]	
	Exp	Mod	Exp	Mod	Exp	Mod
200	11.53	11.94	15.30	15.41	3.77	3.47
300	5.96	6.04	10.65	10.57	4.69	4.52
400	2.02	1.80	8.34	8.13	6.32	6.33

En la Tabla 3.5 se aprecia la diferencia (Dif) entre los resultados experimentales del modelo bicicleta. De igual forma se presenta el error absoluto tomando de referencia lo calculado teóricamente.

Tabla 3.5 Diferencias y errores para radios de giro y espacio de barrido

Giro del volante, [°]	RI, [m]		RER, [m]		RER-RI, [m]	
	Dif, [m]	Error, [%]	Dif, [m]	Error, [%]	Dif, [m]	Error, [%]
200	-0.41	4%	-0.11	1%	0.3	8%
300	-0.08	1%	0.08	1%	0.17	4%
400	0.22	11%	0.21	3%	-0.01	0%

Como se puede observar, el mayor error corresponde al radio interno cuando se gira a un ángulo de 400° en el volante, mientras que el espacio entre radios del mismo caso, el error es prácticamente nulo. Por otro lado, el error más grande en el espacio de barrido es con el giro de 200°, pero con errores pequeños en la comparación de los radios.

Estos resultados muestran que el modelo tiene una aceptable aproximación respecto al caso experimental, sin omitir mencionar que el eje del semirremolque se mantiene fijo. No obstante, esta condición correspondería a un caso particular del eje direccional, en el que el ángulo de orientación es fijo en su condición comúnmente utilizada.

4. Análisis paramétrico

Como se ha mencionado, las características de maniobrabilidad de un vehículo se describen a través de indicadores del espacio que requieren cuando el vehículo realiza una maniobra direccional. Estos indicadores son típicamente geométricos, radios de giro que acotan la superficie sobre la que el vehículo se desplaza, en la que se considera un movimiento sin efectos inerciales ni de interacción física entre llantas y superficie que las soportan, salvo puntos representativos de contacto entre ellos. Estos indicadores son útiles para la definición de espacios en los que el vehículo se desplaza o pretende desplazarse, con el propósito de evitar obstáculos o el contacto con otros elementos en la vía que transita.

4.1 Variables a parametrizar

Una consideración importante de la configuración sujeta al análisis es que los ejes de los que dispone son sencillos; es decir, no hay agrupamiento de ejes en ninguna unidad. Por tanto, la unidad tractiva cuenta con un eje delantero direccional y un eje posterior tractivo, mientras que el semirremolque cuenta con un solo eje en su parte posterior con capacidad direccional. Bajo esta condición, los indicadores de maniobrabilidad de la configuración vehicular T2-S1 corresponden a las trayectorias que describan puntos específicos en la geometría estructural o de ubicación de componentes de la configuración vehicular. Indicadores usuales se obtienen a partir de la generación de trayectorias circulares, en cuyo caso es importante la definición de los espacios requeridos que, a su vez, pueden ser definidos por el radio de la trayectoria circular que describen. De particular importancia son los puntos extremos respecto a la curva que se describe, que indican el radio máximo y el radio mínimo de giro, así como otros que requieran, por alguna circunstancia, ser conocidos.

Para determinar el efecto en esos radios y espacios, las variables de entrada que se identifican son principalmente los ángulos en los ejes direccionales, δ_d y δ_d' , representados en el modelo bicicleta. Debido a las características geométricas de la conexión entre unidades, son también relevantes la distancia entre ejes en la primera unidad, L , y la distancia del punto de acoplamiento al eje del semirremolque, L_s . De estas entradas fundamentales, se determinan los radios r_d , r_t , r_s y el ángulo β , como se indica en la Figura 4.1.

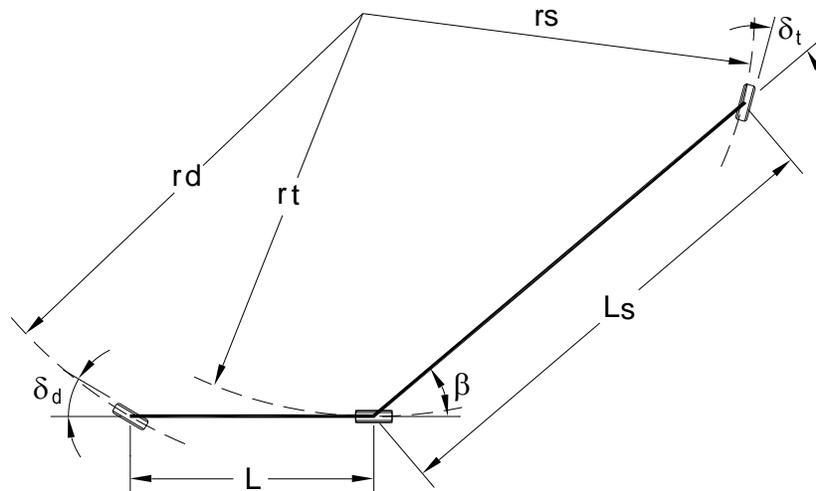


Figura 4.1 Variables de entrada y salida en el modelo bicicleta

A partir de esas variables previas se determinan los radios con base en las dimensiones de la geometría completa, como se ilustra en la Figura 4.2. Es evidente que, para una posición genérica, el mayor radio corresponde a R_e , como punto extremo exterior a la curva, mientras que el menor corresponde a R_{si} . Respecto a las trayectorias de las ruedas extremas, el espacio directo sobre la superficie del piso se acota a la diferencia entre el radio de la trayectoria de rueda exterior en el eje frontal, r_e , y el radio de la rueda interior en el eje del semirremolque, r_{si} .

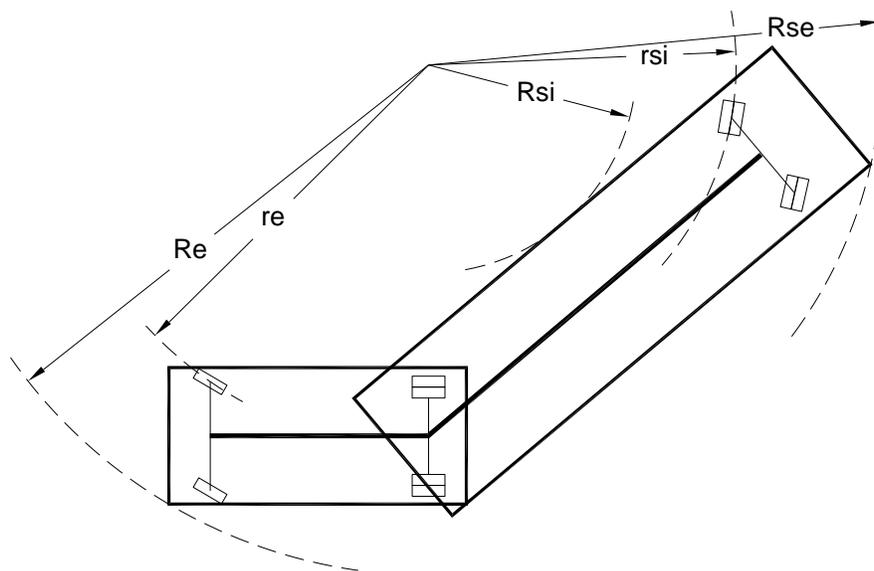


Figura 4.2 Radios que acotan los espacios de barrido

Debido al amplio intervalo de combinaciones de longitudes de unidades tractivas y de arrastre, se establece la relación L_s/L que facilita el análisis del efecto de estas variables, conforme los ángulos de entrada, en las

variables de salida (radios, ángulo entre articulaciones y espacios de barrido). Como base de comparación, se utiliza un ejemplo para ilustrar el efecto cuando el ángulo en el eje trasero es fijo, simulando el caso común de ejes no direccionales.

4.2 Caso de referencia: eje no direccional

Para establecer una base de comparación, se considera una combinación T-S con dimensiones como se muestra en la Tabla 4.1. Estas corresponden a un vehículo existente, con el propósito de generar datos con valores realistas.

Tabla 4.1 Dimensiones para T-S en caso de referencia

Dimensión	Designación	Valor
Ancho de la unidad tractiva	A	2,40 m
Distancia entre ejes	L	4,48 m
Entrevía en eje delantero	Td	1,95 m
Entrevía en eje trasero	Tt	1,80 m
Volado delantero	Vd	1,19 m
Volado trasero	Vt	1,00 m
Ancho de semirremolque	As	2,60 m
Distancia articulación-eje	Ls	8,28 m
Entrevía en eje de semirremolque	Ts	1,85 m
Volado trasero de semirremolque	Vts	1,54 m

Previo al análisis, se determina la magnitud del ángulo de entrampe; es decir, el ángulo direccional crítico que produce que el centro instantáneo de rotación coincida con el punto de contacto con la rueda interior del semirremolque y, por tanto, $r_{si} = 0$ ($r_s = T_s/2$). Conforme con las dimensiones mostradas, el ángulo se obtiene de la expresión (15), cuyo valor es de $28,3^\circ$ en el modelo bicicleta.

Como primera parte se determina el comportamiento de la articulación con respecto al ángulo direccional, cuyo resultado se presenta en la Figura 4.3. Como se aprecia, a medida que se incrementa el ángulo direccional, el ángulo en la articulación crece hasta alcanzar el valor máximo de $83,6^\circ$, valor límite que corresponde al ángulo direccional crítico que produciría el entrampe.

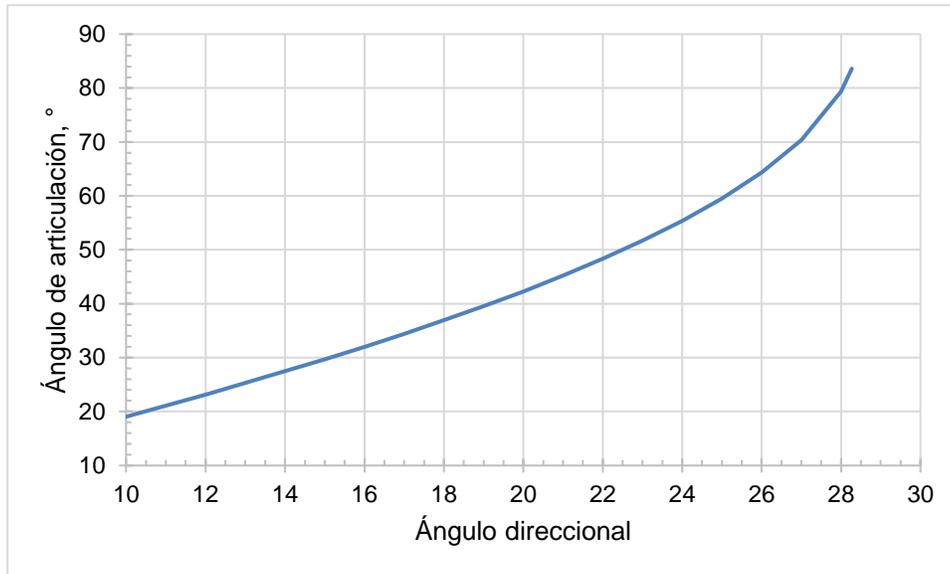


Figura 4.3 Ángulo de articulación respecto al ángulo direccional

Tanto los radios que genera el modelo bicicleta, como los radios hacia las ruedas opuestas extremas, para el intervalo de aplicación del ángulo direccional hasta el valor crítico, se presentan en la Figura 4.4. Como es notorio, a menor ángulo direccional se generan radios de mayor magnitud, que se reducen a medida que se incrementa el ángulo de dirección. El intervalo queda acotado por los radios de las trayectorias extremas, definidos por las ruedas delantera externa y del lado interior en el eje del semirremolque que, con el ángulo direccional crítico llega a un valor prácticamente nulo.

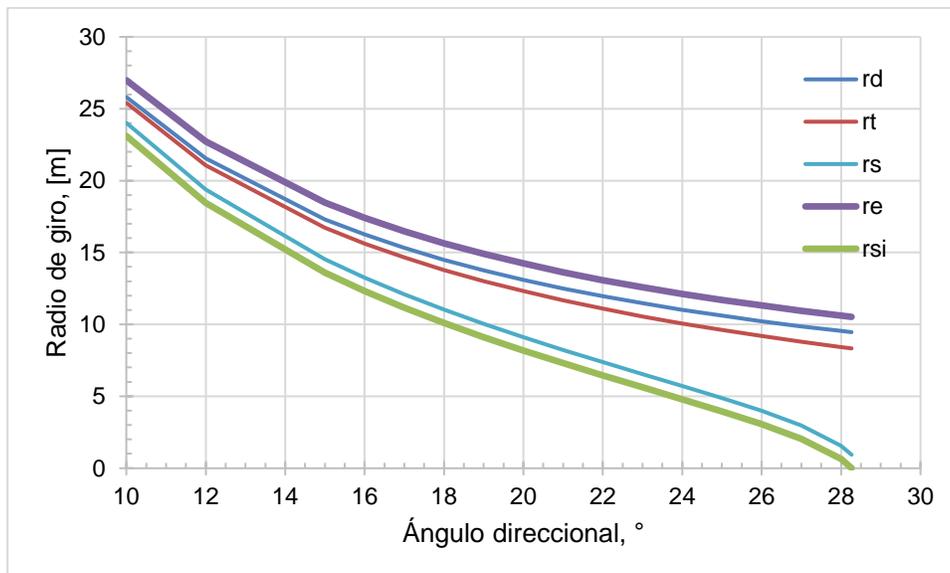


Figura 4.4 Radios de giro según el modelo bicicleta

Para ese valor crítico, el radio en el eje delantero alcanza casi 9,5 m, mientras el eje del semirremolque alcanza poco más 0,9 m, mientras que la llanta delantera externa llega a 10,5 m.

De manera semejante se comportan los radios que definen el ancho de las unidades, lo cual se muestra en la Figura 4.5. Complementariamente, los espacios de barrido se muestran en la Figura 4.6, obtenido de la diferencia de la magnitud entre los radios correspondientes.

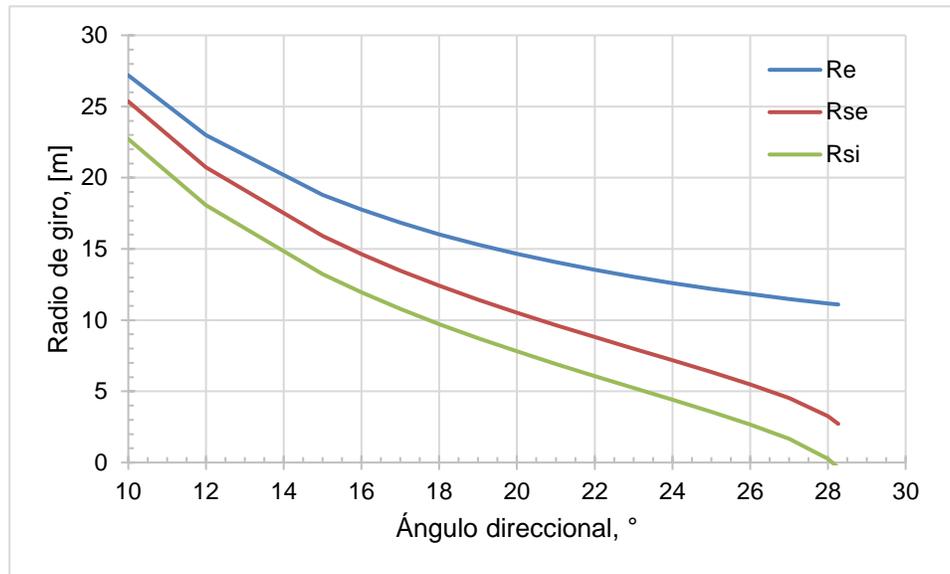


Figura 4.5 Radios que acotan los espacios de barrido

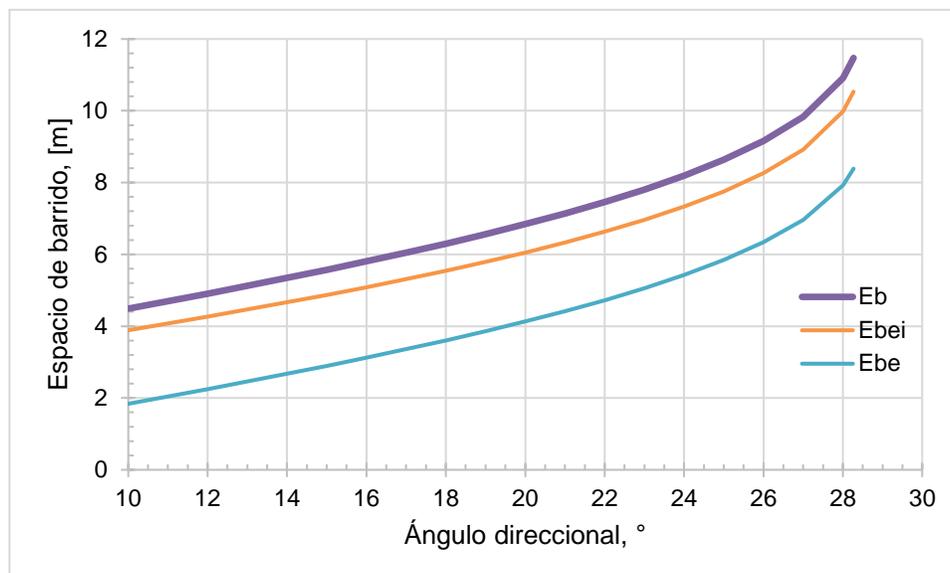


Figura 4.6 Espacios de barrido en el intervalo del ángulo direccional

Conforme el ángulo direccional aumenta, los radios de giro disminuyen, pero el área de barrido se incrementa. Para la posición de ángulo crítico se generan los menores radios, donde el mayor corresponde a la esquina externa delantera con un valor de 11,0 m y el radio mínimo resulta de prácticamente nulo. En contraparte, para ese ángulo la superficie máxima barrida tiene un ancho de poco más de ese valor, 11,5 m, debido a que, de acuerdo a la configuración geométrica alcanzada, se considera el radio mínimo coincidente con el punto de contacto de la rueda interna en el eje del semirremolque.

4.3 Efecto del eje direccional en el semirremolque

Para mostrar el efecto del eje direccional del semirremolque en la maniobrabilidad de la configuración vehicular T2-S1, se utiliza la relación entre las distancias L_s/L como un parámetro de representatividad de la distancia entre ejes y del punto de articulación al eje del semirremolque. Como parte del análisis, se obtiene el ángulo direccional crítico que produciría el entrampe si el eje del semirremolque fuera fijo sin direccionalidad, para lo que se emplea la expresión (15).

Con base en el modelo bicicleta se deduce que el menor ancho del espacio de barrido se obtiene cuando el radio que describe el eje del semirremolque es igual al radio del eje trasero de la unidad tractiva. Para esa condición se obtiene el ángulo direccional en el eje del semirremolque. En función de la deducción de las expresiones para determinar r_t y r_s , se llega a la siguiente relación entre ángulos:

$$\delta_t = \text{sen}^{-1} \left[\frac{L_s}{L} \cdot \frac{\tan \delta_d}{2} \right] \quad (25)$$

Para propósitos del análisis, se establece el intervalo de esa relación de 0,5 a 2,5 y una entreeva de 1,85 m en el eje del semirremolque (T_s), por ser este último valor común en vehículos de carga pesada. Con los dos parámetros angulares de los ejes direccionales, se obtienen los resultados mostrados en la Figura 4.7, en función de la relación L_s/L .

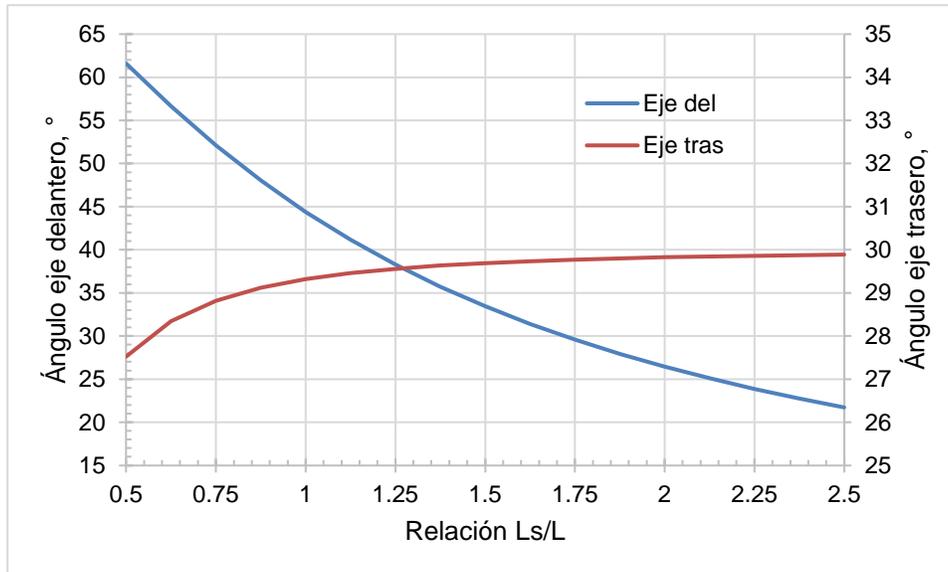


Figura 4.7 Ángulos direccionales respecto a la relación Ls/L

Como se observa de esos resultados gráficos, en el intervalo de la relación Ls/L el ángulo de entrampe presenta una variación de 61,6° a 21,7° y, para ese mismo ángulo, le corresponde un intervalo de variación más estrecho del ángulo direccional en el eje del semirremolque, que va de 27,5° a 29,9°. Cabe mencionar que, bajo la suposición de igualdad de radios r_t y r_s y, por tanto, para el seguimiento de la misma trayectoria de los ejes respectivos, el ángulo de la articulación entre unidades es idéntico al aplicado en el eje del semirremolque. Este escenario no representa condiciones para que las unidades adquieran una configuración geométrica de entrampe.

Con los ángulos obtenidos, los radios correspondientes del modelo bicicleta se presentan en la Figura 4.8, mientras que la Figura 4.9 presenta los radios de puntos específicos de la geometría completa de la configuración. Estos últimos se obtienen considerando los valores utilizados en la Tabla 4.1, salvo L y Ls, que son las variables parametrizadas.

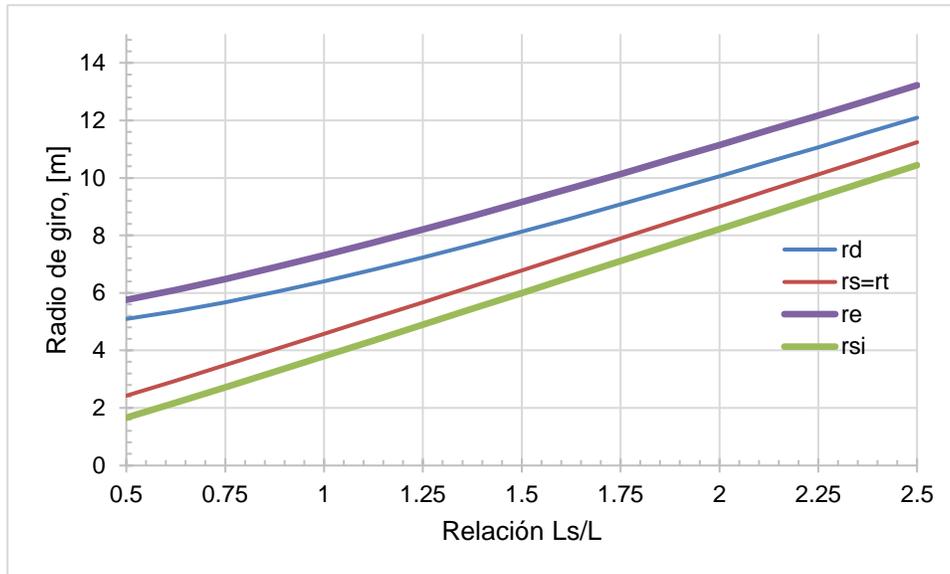


Figura 4.8 Radios de giro de las ruedas respecto a la relación Ls/L

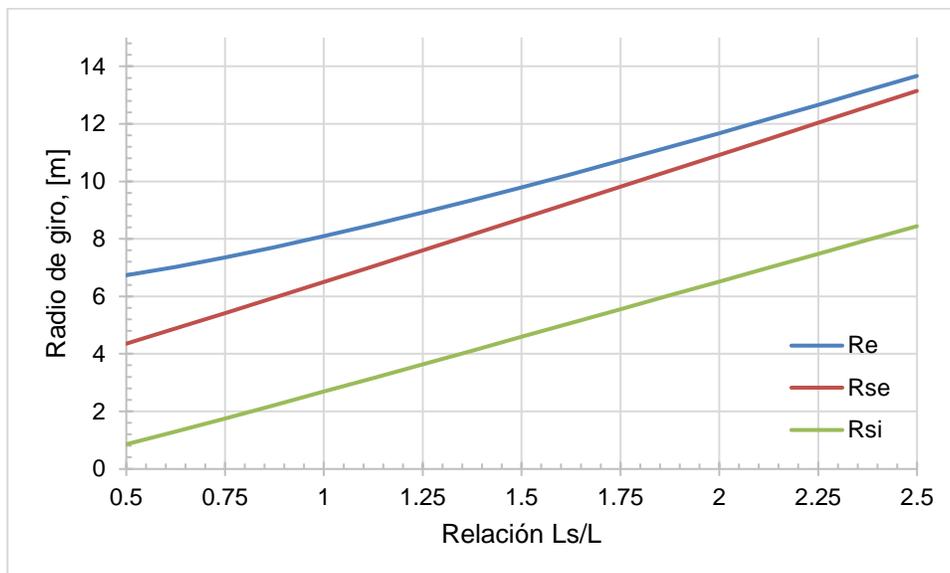


Figura 4.9 Radios de giro de la estructura respecto a la relación Ls/L

Como puede observarse, la magnitud de los valores de los radios de giro se mantiene en un intervalo de 5,1 m a 12,1 m para el radio en la rueda delantera externa a la curva (r_e), mientras que en la rueda interior en el eje del semirremolque va de 1,7 m a 10,5 m. De similar manera, el radio del punto extremo exterior (R_e), que corresponde a la esquina exterior delantera, el radio tiene valores en el intervalo de 6,7 m a 13,7 m; mientras que el radio mínimo a la estructura (R_{si}) va de 0,9 m a 8,4 m.

El espacio de barrido, que se genera bajo las condiciones de la maniobra con ambos ejes direccionales, se presenta en la Figura 4.10.

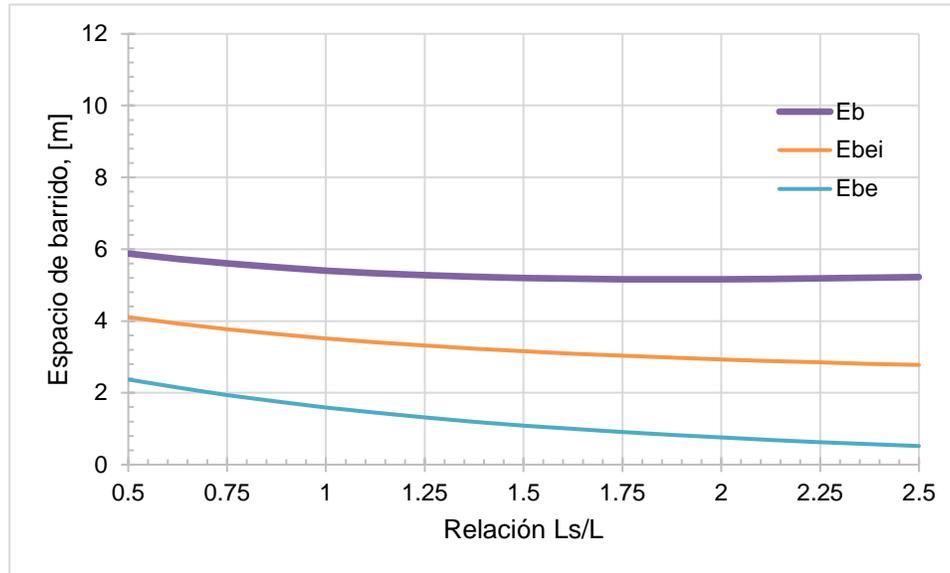


Figura 4.10 Espacios de barrido respecto a la relación Ls/L

Como se aprecia, el espacio barrido se mantiene estrecho en todo el intervalo de variación de la relación Ls/L. El espacio entre trayectorias extremas (esquina delantera exterior y costado interior de la estructura del semirremolque), presenta valores en un intervalo estrecho de apenas 5,2 m a 5,9 m. Respecto a los radios descritos por las ruedas extremas, el intervalo es de 2,8 m a 4,1 m, indicadores del espacio requerido sobre la superficie que se rueda.

Los resultados anteriores incluyen el seguimiento de la esquina exterior trasera del semirremolque, cuya trayectoria se mantiene dentro del espacio barrido global. Esto significa que, para el intervalo y condiciones del análisis mostrado, esta esquina no presenta condiciones que puedan interferir con obstáculos que no haya librado el frente de la unidad tractiva. No obstante, en caso de que el volado trasero del semirremolque sea de una dimensión mucho mayor, debe ser considerada para que no genere una trayectoria de mayor tamaño que la de la esquina exterior de la unidad tractiva. En este análisis no se considera ese alcance.

Conclusiones

Una de las capacidades de los vehículos de carretera es la de cambiar la dirección para ajustarse a trayectorias en su viaje. Estos cambios de dirección son posibles porque el eje frontal de la unidad motriz cuenta con un eje direccional; es decir, sus ruedas pueden orientarse de acuerdo a la dirección que se desea tomar.

En el caso de configuraciones compuestas por dos unidades interconectadas a través de un acoplamiento de articulación, contar con un eje direccional adicional puede brindar beneficios en términos del aprovechamiento del espacio requerido para ejecutar maniobras de giro. El estudio realizado sobre una configuración del tipo tractocamión-semirremolque, de dos y un eje (T2-S1), en el que el eje en el semirremolque tiene también capacidad direccional, mostró lo siguiente:

- El modelo bicicleta, originalmente utilizado para el análisis de maniobrabilidad de vehículos unitarios, es también útil para representar combinaciones articuladas, cuya extensión básica es la ubicación de los ejes y punto de articulación. En maniobras de trayectoria circular, el modelo permite determinar directamente las trayectorias del punto central en los ejes de la configuración, en el que el mayor radio lo describe el eje delantero y el menor el último eje; es decir, el del semirremolque. Permite, además, determinar trayectorias de otros puntos específicos de la geometría de la configuración, como de cada rueda en los ejes y las esquinas de la carrocería.
- Para una geometría y ubicación de ejes de una configuración articulada con solamente un eje direccional, su maniobrabilidad para seguir una trayectoria circular se limita a un máximo valor del ángulo direccional en el que se alcanza el entrampe, denominado ángulo crítico. Este ángulo de entrampe es grande para relaciones L_s/L (Distancia del punto de articulación al eje en el semirremolque / Distancia entre ejes de la unidad motriz) pequeñas y disminuye al aumentar la relación. Para el intervalo L_s/L analizado de 0,5 a 2,5 el valor va de 62° a 21° , aproximadamente, con un comportamiento no lineal. Este ángulo de entrampe se asocia con ángulos de articulación entre las unidades cercanos a 90° , lo que dificulta el desplazamiento del vehículo en maniobras cerradas.

- La direccionalidad en el eje del semirremolque permite sobrepasar la condición de entrampe y realizar giros más cerrados. De acuerdo al modelo bicicleta extendido, el menor espacio anular se alcanza cuando el eje del semirremolque describe la misma trayectoria que el eje trasero de la unidad motriz. Para los ángulos de entrampe analizados, de 62° a 21° según la relación L_s/L , el ángulo requerido en el eje del semirremolque es de $27,5^\circ$ a $29,9^\circ$, intervalo muy pequeño comparado con el intervalo del ángulo de entrampe.

También, se derivan las siguientes observaciones del desarrollo del estudio respecto a la maniobrabilidad general:

Una buena maniobrabilidad es importante para la seguridad en la conducción, ya que permite al conductor maniobrar con precisión en condiciones de conducción difíciles para espacios reducidos. Un semirremolque con eje direccional tiene un eje que puede orientarse para mejorar aspectos como son los radios de giro y por consecuencia el espacio de barrido.

En general, los semirremolques con eje direccional son una opción adecuada para aplicaciones en las que se requiere una alta maniobrabilidad en espacios reducidos, como son las terminales especializadas de contenedores, patios de transferencia de carga multimodal y, en general, patios de maniobra que manejen altos volúmenes de carga. Sin embargo, para todos esos casos es importante considerar los costos y el rendimiento en comparación con otros tipos de remolques.

Como trabajo futuro se propone evaluar la efectividad de este eje direccional en el semirremolque con base en la distribución del peso, la resistencia al avance, la fuerza de la propulsión y la resistencia de los neumáticos. Son estudios complejos y que requerirán de un análisis más extenso, así como de instrumentos de medición más precisos. Por lo que se recomienda evaluar cada aspecto por separado para un enfoque más detallado y completo. Así mismo, es importante considerar el efecto de otras variables, como los amplios volados traseros en el semirremolque o, para una configuración con dimensiones determinadas, el efecto de la razón entre los ángulos de dirección en el eje delantero y en el del semirremolque, entre otras.

Bibliografía

1. Hernández J., Fabela, M., Flores, O., Vázquez, D., Sánchez, L., Cruz, M. (2021). Análisis de maniobrabilidad de la configuración vehicular t-s-r con convertidor "A". [Publicación técnica No. 687]. México: Instituto Mexicano del Transporte. [Archivo PDF]. <https://imt.mx/archivos/Publicaciones/PublicacionTecnica/pt687.pdf>
2. Romero, J., Martínez, M., y Bortoni, L. (2004). Investigación del efecto vial de los ejes virables en vehículos articulados: revisión de la literatura. [Publicación técnica No. 263]. México: Instituto Mexicano del Transporte. [Archivo PDF]. <https://imt.mx/archivos/Publicaciones/PublicacionTecnica/pt263.pdf>
3. Km77. (2005). ángulo de deriva y agarre lateral. [Consulta en línea]. <https://www.km77.com/tecnica/bastidor/angderiva/t01.asp>
4. Fabela, M., Hernández, J., Vázquez, D., y Bortoni, L. J. (2008). Semirremolque para el estudio de la maniobrabilidad de vehículos articulados. [Boletín No. 324]. México: Instituto Mexicano del Transporte. <https://imt.mx/resumen-boletines.html?IdArticulo=324&IdBoletin=115>
5. Comité Consultivo Nacional de Normalización de Transporte Terrestre. (2017) NOM-012-SCT-2-2017 peso y dimensiones máximas con los que pueden circular los vehículos de autotransporte que transitan en las vías generales de comunicación de jurisdicción federal. [Consulta en línea]. <https://www.sinec.gob.mx/SINEC/Vista/Normalizacion/DetalleNorma.xhtml?pidn=N3BVV/kQ5bCsrQ21jY1JqRFBwQnY5dz09>.
6. JOSKIN. (2020). JOSKIN ejes directores - TRANS-SPACE. [Consulta en línea]. https://www.joskin.com/es/equipamiento/trans_space/ejes-directores
7. MiTrailer Semirremolques y Remolques. (2015). Eje direccional accionado por la 5a rueda del semirremolque. [Consulta en línea]. <https://mitrailer.es/eje-direccional-movido-por-la-5a-rueda-del-semirremolque/>

8. Flores, O., Hernández, J., Fabela, M., Vázquez, D., Sánchez, L., Cruz, M. (2018). Evaluación experimental de la maniobrabilidad y manejabilidad de autobús tipo B3 con eje virable. [Consulta en línea]. http://somim.org.mx/memorias/memorias2018/articulos/A3_95.pdf
9. Flores, O., Hernández, J., Fabela, M., Vázquez, D., Cruz, M. (2018). Efecto de la magnitud de la carga en la maniobrabilidad de un vehículo articulado. [Consulta en línea]. https://somim.org.mx/memorias/memorias2021/articulos/A3_74.pdf

Anexo 1. T-S con corrimiento de acoplamiento hacia atrás

Como caso especial, se presenta el modelo de una combinación de una unidad tractiva y una unidad remolcada, cuyo punto de acoplamiento articulado se sitúa muy por detrás del eje posterior de la unidad tractiva. El esquema de esta combinación, que incluye la representación con base en el modelo bicicleta, se presenta en la Figura A.1, cuyo corrimiento hacia atrás se identifica con la dimensión "e".

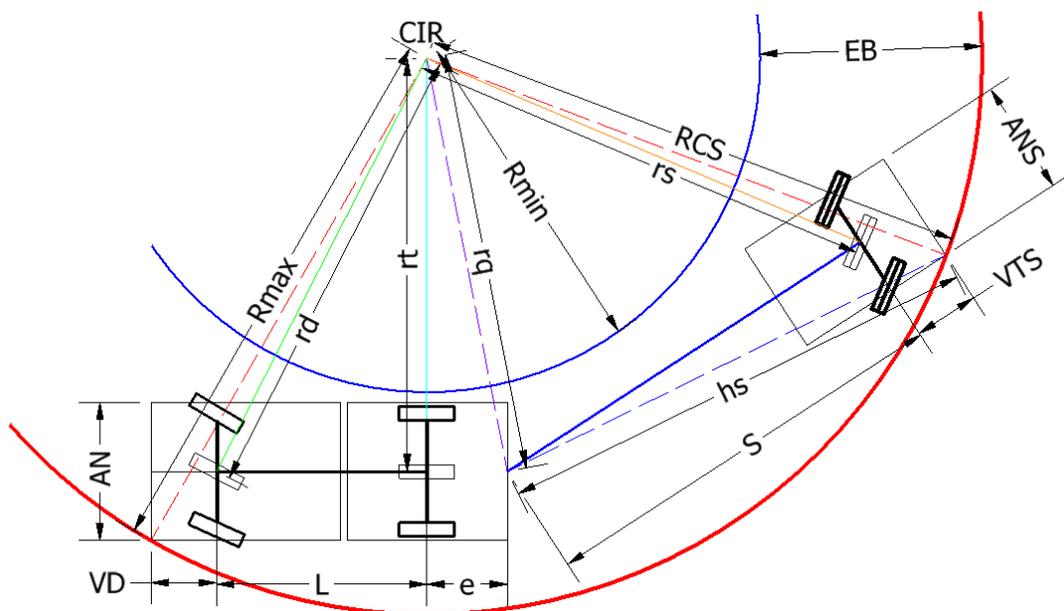


Figura A.1 Esquema de modelo T-S con acoplamiento corrido hacia atrás

Del esquema, se indican los siguientes parámetros:

- VD: Volado delantero del tractocamión o unidad motriz
- L: Distancia entre ejes de la unidad motriz (*wheelbase*)
- e: Desfase de quinta rueda con respecto del eje
- AN: Ancho del tractocamión o unidad motriz
- ANS: Ancho del semirremolque o unidad de arrastre
- VTS: Volado trasero del semirremolque o unidad de arrastre
- RCS: Radio crítico del semirremolque o unidad de arrastre.
- S: Distancia entre el punto de enganche y el eje del semirremolque
- rd: Radio producido por el eje direccional motriz

- rq: Radio referente al desfase de la quinta rueda
- rt: Radio generado a partir del eje fijo
- rs: Radio producido por el eje direccional de la unidad de arrastre
- hs: Dimensión de apoyo
- CIR: Centro instantáneo de rotación
- Rmax: Radio máximo de giro o radio externo
- Rmin: Radio mínimo de giro o radio interno
- EB: Espacio de barrido, diferencia entre el radio máximo y el mínimo

Como apoyo en la determinación de los parámetros de maniobrabilidad de interés, se consideran las variables indicadas en el esquema de la Figura A.2.

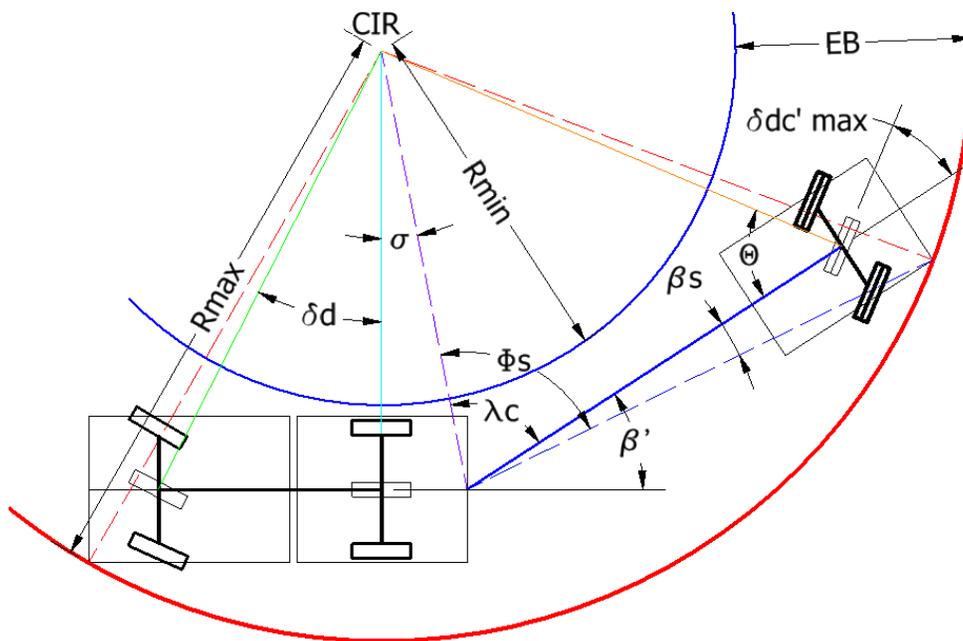


Figura A.2 Parámetros de apoyo en modelo con acoplamiento corrido hacia atrás

En este caso, son:

- δd : ángulo de la dirección de unidad motriz
- $\delta dc' \max$: ángulo crítico máximo del eje direccional de la unidad de arrastre
- βs : ángulo de apoyo, entre hs y S
- λc : ángulo entre rq y S
- β' : ángulo de la unidad de arrastre respecto del vehículo motriz
- Θ : ángulo entre el radio "rs" y la dimensión del semirremolque "S"
- Φs : ángulo entre el radio rq y la dimensión de apoyo hs
- s : ángulo entre los radios rq y rt

Para r_t y r_d el cálculo se muestra en las ecuaciones (3) y (4) de este documento. Partiendo del modelo simplificado se calculan los radios máximos y mínimos. Para el radio máximo se calcula considerando el volado delantero, el ancho del vehículo motriz, el $weel/base$ y el radio r_t del modelo bicicleta. En la siguiente ecuación se calcula el radio máximo.

$$R_{max} = \sqrt{(L + VD)^2 + \left(\frac{L}{\tan(\delta d)} + \frac{AN}{2}\right)^2} \quad (26)$$

Para los cálculos siguientes se tiene que calcular el radio r_q que se puede determinar a través del principio de Pitágoras. A continuación, se presenta la fórmula para calcular r_q .

$$r_q = \sqrt{e^2 + \left(\frac{L}{\tan(\delta d)}\right)^2} \quad (27)$$

Así mismo es importante el cálculo del ángulo entre r_q y r_t , al cual se le asigna la letra griega σ . A continuación, se presenta la forma de calcular dicho ángulo.

$$\sigma = \tan^{-1}\left(\frac{e \tan(\delta d)}{L}\right) \quad (28)$$

Dadas las designaciones de los parámetros para diferenciar este caso, e igual forma para este caso h_s y β_s son calculadas por las ecuaciones (29) y (30), mientras que los complementarios son:

A continuación, se presenta la ecuación para calcular h_s .

$$h_s = \sqrt{(S + VTS)^2 + (0.5 \cdot ANS)^2} \quad (29)$$

Igual es posible calcular el ángulo entre h_s y S , el cual sirve para calcular β_s . a continuación se presenta la ecuación para calcular β_s .

$$\beta_s = \tan^{-1}\left(\frac{0.5 \cdot ANS}{S + VTS}\right) \quad (30)$$

Partiendo del supuesto de que RCS está acotada por el radio máximo R_{max} . Se tiene que RCS será igual al resultado del cálculo de R_{max} en la ecuación (26). Con ello se prosigue a calcular el ángulo entre h_s y r_q .

$$\Phi_s = \cos^{-1} \left(\frac{RCS^2 - rq^2 - hs^2}{-2 \cdot rq \cdot hs} \right) \quad (31)$$

Teniendo calculados β_s y Φ_s , es posible calcular λ_c . el ángulo λ_c será igual a la resta de Φ_s menos β_s . A continuación, se presenta su respectiva ecuación.

$$\lambda_c = \Phi_s - \beta_s \quad (32)$$

una vez obtenido λ_c es posible calcular el r_s crítico, a continuación, se presenta la ecuación para el cálculo de r_s .

$$r_s = \sqrt{rq^2 + S^2 - 2 \cdot rq \cdot S \cdot \cos(\lambda_c)} \quad (33)$$

Al calcular r_s es posible calcular el ángulo θ_c el cual permite facilitar el cálculo del ángulo crítico máximo para el eje direccional del semirremolque. A continuación, se presenta la ecuación para θ_c .

$$\theta_c = \cos^{-1} \left(\frac{rq^2 - rs^2 - S^2}{-2 \cdot rs \cdot S} \right) \quad (34)$$

Entonces el ángulo crítico máximo para el eje direccional del semirremolque queda dado por la siguiente expresión.

$$\delta dc' max = 90^\circ - \theta_c \quad (35)$$

Para calcular el radio mínimo es necesario agregar dos dimensiones más de apoyo, para lo cual se propone R_x y R_y . A continuación, se presentan las ecuaciones para calcular cada variable.

$$R_x = r_s \cdot \sin(\delta dc' max) \quad (36)$$

Para el cálculo de R_x y R_y es necesario calcular previamente r_s del modelo bicicleta. Para el cálculo de R_y es muy similar al de R_x solo que calculamos el coseno de ángulo $\delta dc' max$. A continuación, se presenta su ecuación.

$$R_y = r_s \cdot \cos(\delta dc' max) \quad (37)$$

Una vez calculado R_y es posible determinar el radio mínimo o R_{min} , para ellos es necesario conocer el ancho de la unidad de arrastre. Para calcular R_{min} restamos la mitad del ancho de la unidad de arrastre a R_y . A continuación, se presenta la ecuación.

$$R_{\min} = R_y - \frac{ANS}{2} \quad (38)$$

Por último, la ecuación para calcular β' queda definida de la siguiente forma.

$$\beta' = 90 - (\lambda c + \sigma) \quad (39)$$

A continuación, se presentan algunas de las formulaciones utilizadas en este anexo. En la Figura A.1 se presentan las variables utilizadas para el cálculo del ángulo crítico del eje direccional del semirremolque, así como su ubicación en la hoja de cálculo Excel.

	A	B	C
2			
3	variables de entrada		
4	L	3.05	metros
5	e	1.17	metros
6	S	6.1	metros
7	δd	26.78	grados
8	$\delta d'$	34.05	grados
9	VD	0.95	metros
10	AN	2	metros
11	ANS	1.66	metros
12	VTS	0.94	metros
13	RCS=Rmax	8.10	metros

Figura A.3 Variables de entrada en Excel

En la Tabla A.1 se presenta la formulación en Excel de las variables utilizadas para el cálculo del ángulo crítico en el semirremolque.

Tabla A.1 Formulación de variables en Excel

rt	=B\$4/TAN(RADIANES(B\$7))
rd	=B\$4/SENO(RADIANES(B\$7))
θ	=GRADOS(ASENO(COS(RADIANES(B\$8))))
rq	=RAIZ((B\$5^2)+((B\$4/TAN(RADIANES(B\$7)))^2))
σ	=GRADOS((ATAN(B\$5/(B\$4/TAN(RADIANES(B\$7))))))

	$\text{SENO}(\text{RADIANES}(180-\text{GRADOS}(\text{ASENO}(\text{COS}(\text{RADIANES}(B8)))))-\text{GRADOS}(\text{ASENO}((B6*\text{COS}(\text{RADIANES}(B8)))/\text{RAIZ}(B5^2+(B4/\text{TAN}(\text{RADIANES}(B7)))^2)))))/\text{SENO}(\text{RADIANES}(\text{GRADOS}(\text{ASENO}((B6*\text{COS}(\text{RADIANES}(B8)))/\text{RAIZ}(B5^2+(B4/\text{TAN}(\text{RADIANES}(B7)))^2)))))*\text{SENO}(\text{RADIANES}(B8))+B12)^2)$
hs	$=\text{RAIZ}((B12+B6)^2+(0.5*B11)^2)$
βs	$=\text{GRADOS}(\text{ATAN}((0.5*B11)/(B6+B12)))$
φs	$=\text{GRADOS}(\text{ACOS}((\$B\$13^2-(\text{RAIZ}((\$B\$5^2)+((\$B\$4/\text{TAN}(\text{RADIANES}(B7)))^2)))^2-(\text{RAIZ}((\$B\$12+ \$B\$6)^2+(0.5*\$B\$11)^2))^2)/(-2*(\text{RAIZ}((\$B\$5^2)+((\$B\$4/\text{TAN}(\text{RADIANES}(B7)))^2)))*(\text{RAIZ}((\$B\$12+ \$B\$6)^2+(0.5*\$B\$11)^2))))))$
λ	$=(\text{GRADOS}(\text{ACOS}((\$B\$13^2-(\text{RAIZ}((\$B\$5^2)+((\$B\$4/\text{TAN}(\text{RADIANES}(B7)))^2)))^2-(\text{RAIZ}((\$B\$12+ \$B\$6)^2+(0.5*\$B\$11)^2))^2)/(-2*(\text{RAIZ}((\$B\$5^2)+((\$B\$4/\text{TAN}(\text{RADIANES}(B7)))^2)))*(\text{RAIZ}((\$B\$12+ \$B\$6)^2+(0.5*\$B\$11)^2)))))))-(\text{GRADOS}(\text{ATAN}((0.5*\$B\$11)/(\$B\$6+ \$B\$12))))$
rs'	$=\text{RAIZ}((\text{RAIZ}((\$B\$5^2)+((\$B\$4/\text{TAN}(\text{RADIANES}(\$B\$7)))^2)))^2+B6^2-2*(\text{RAIZ}((\$B\$5^2)+((\$B\$4/\text{TAN}(\text{RADIANES}(\$B\$7)))^2)))*B6*\text{COS}(\text{RADIANES}(((\text{GRADOS}(\text{ACOS}((\$B\$13^2-(\text{RAIZ}((\$B\$5^2)+((\$B\$4/\text{TAN}(\text{RADIANES}(B7)))^2)))^2-(\text{RAIZ}((\$B\$12+ \$B\$6)^2+(0.5*\$B\$11)^2))^2)/(-2*(\text{RAIZ}((\$B\$5^2)+((\$B\$4/\text{TAN}(\text{RADIANES}(B7)))^2)))*(\text{RAIZ}((\$B\$12+ \$B\$6)^2+(0.5*\$B\$11)^2)))))))-(\text{GRADOS}(\text{ATAN}((0.5*\$B\$11)/(\$B\$6+ \$B\$12))))))))$
θc	$=\text{GRADOS}(\text{ACOS}(((\text{RAIZ}((\$B\$5^2)+((\$B\$4/\text{TAN}(\text{RADIANES}(\$B\$7)))^2)))^2-B6^2-(\text{RAIZ}((\text{RAIZ}((\$B\$5^2)+((\$B\$4/\text{TAN}(\text{RADIANES}(\$B\$7)))^2)))^2+B6^2-2*(\text{RAIZ}((\$B\$5^2)+((\$B\$4/\text{TAN}(\text{RADIANES}(\$B\$7)))^2)))*B6*\text{COS}(\text{RADIANES}(((\text{GRADOS}(\text{ACOS}((\$B\$13^2-(\text{RAIZ}((\$B\$5^2)+((\$B\$4/\text{TAN}(\text{RADIANES}(B7)))^2)))^2-(\text{RAIZ}((\$B\$12+ \$B\$6)^2+(0.5*\$B\$11)^2))^2)/(-2*(\text{RAIZ}((\$B\$5^2)+((\$B\$4/\text{TAN}(\text{RADIANES}(B7)))^2)))*(\text{RAIZ}((\$B\$12+ \$B\$6)^2+(0.5*\$B\$11)^2)))))))-(\text{GRADOS}(\text{ATAN}((0.5*\$B\$11)/(\$B\$6+ \$B\$12)))))))))^2)/(-2*B6*(\text{RAIZ}((\text{RAIZ}((\$B\$5^2)+((\$B\$4/\text{TAN}(\text{RADIANES}(\$B\$7)))^2)))^2+B6^2-2*(\text{RAIZ}((\$B\$5^2)+((\$B\$4/\text{TAN}(\text{RADIANES}(\$B\$7)))^2)))*B6*\text{COS}(\text{RADIANES}(((\text{GRADOS}(\text{ACOS}((\$B\$13^2-(\text{RAIZ}((\$B\$5^2)+((\$B\$4/\text{TAN}(\text{RADIANES}(B7)))^2)))^2-(\text{RAIZ}((\$B\$12+ \$B\$6)^2+(0.5*\$B\$11)^2))^2)/(-2*(\text{RAIZ}((\$B\$5^2)+((\$B\$4/\text{TAN}(\text{RADIANES}(B7)))^2)))*(\text{RAIZ}((\$B\$12+ \$B\$6)^2+(0.5*\$B\$11)^2)))))))-(\text{GRADOS}(\text{ATAN}((0.5*\$B\$11)/(\$B\$6+ \$B\$12))))))))))$

	$\text{RADOS}(\text{ACOS}((\text{\$B\$13}^2 - (\text{RAIZ}((\text{\$B\$5}^2) + ((\text{\$B\$4}/\text{TAN}(\text{RADIANES}(\text{B7})))^2)))^2 - (\text{RAIZ}((\text{\$B\$12} + \text{\$B\$6})^2 + (0.5 * \text{\$B\$11})^2))^2) / (-2 * (\text{RAIZ}((\text{\$B\$5}^2) + ((\text{\$B\$4}/\text{TAN}(\text{RADIANES}(\text{B7})))^2))) * (\text{RAIZ}((\text{\$B\$12} + \text{\$B\$6})^2 + (0.5 * \text{\$B\$11})^2)))))) - (\text{GRADOS}(\text{ATAN}((0.5 * \text{\$B\$11}) / (\text{\$B\$6} + \text{\$B\$12})))))))))$
δdc	$= \text{GRADOS}(\text{ATAN}(\text{\$B\$4} / \text{RAIZ}((\text{RAIZ}((\text{\$B\$11}/2)^2 + \text{\$B\$6}^2))^2 - \text{\$B\$5}^2)))$
δdc' min	$= 90 - \text{GRADOS}(\text{ASENO}((\text{\$B\$4} / \text{TAN}(\text{RADIANES}(\text{\$B\$7}))) / \text{B6}))$
δdc' max	$= 90 - (\text{GRADOS}(\text{ACOS}(((\text{RAIZ}((\text{\$B\$5}^2) + ((\text{\$B\$4}/\text{TAN}(\text{RADIANES}(\text{B7})))^2)))^2 - \text{\$B\$6}^2 - (\text{RAIZ}((\text{RAIZ}((\text{\$B\$5}^2) + ((\text{\$B\$4}/\text{TAN}(\text{RADIANES}(\text{B7})))^2)))^2 + \text{\$B\$6}^2 - 2 * (\text{RAIZ}((\text{\$B\$5}^2) + ((\text{\$B\$4}/\text{TAN}(\text{RADIANES}(\text{B7})))^2))) * \text{\$B\$6} * \text{COS}(\text{RADIANES}(\text{GRADOS}(\text{ACOS}((\text{\$B\$13}^2 - (\text{RAIZ}((\text{\$B\$5}^2) + ((\text{\$B\$4}/\text{TAN}(\text{RADIANES}(\text{B7})))^2)))^2 - (\text{RAIZ}((\text{\$B\$12} + \text{\$B\$6})^2 + (0.5 * \text{\$B\$11})^2))^2) / (-2 * (\text{RAIZ}((\text{\$B\$5}^2) + ((\text{\$B\$4}/\text{TAN}(\text{RADIANES}(\text{B7})))^2))) * (\text{RAIZ}((\text{\$B\$12} + \text{\$B\$6})^2 + (0.5 * \text{\$B\$11})^2)))))) - (\text{GRADOS}(\text{ATAN}((0.5 * \text{\$B\$11}) / (\text{\$B\$6} + \text{\$B\$12})))))))))^2) / (-2 * \text{\$B\$6} * (\text{RAIZ}((\text{RAIZ}((\text{\$B\$5}^2) + ((\text{\$B\$4}/\text{TAN}(\text{RADIANES}(\text{B7})))^2)))^2 + \text{\$B\$6}^2 - 2 * (\text{RAIZ}((\text{\$B\$5}^2) + ((\text{\$B\$4}/\text{TAN}(\text{RADIANES}(\text{B7})))^2))) * \text{\$B\$6} * \text{COS}(\text{RADIANES}(\text{GRADOS}(\text{ACOS}((\text{\$B\$13}^2 - (\text{RAIZ}((\text{\$B\$5}^2) + ((\text{\$B\$4}/\text{TAN}(\text{RADIANES}(\text{B7})))^2)))^2 - (\text{RAIZ}((\text{\$B\$12} + \text{\$B\$6})^2 + (0.5 * \text{\$B\$11})^2))^2) / (-2 * (\text{RAIZ}((\text{\$B\$5}^2) + ((\text{\$B\$4}/\text{TAN}(\text{RADIANES}(\text{B7})))^2))) * (\text{RAIZ}((\text{\$B\$12} + \text{\$B\$6})^2 + (0.5 * \text{\$B\$11})^2)))))) - (\text{GRADOS}(\text{ATAN}((0.5 * \text{\$B\$11}) / (\text{\$B\$6} + \text{\$B\$12})))))))))$



COMUNICACIONES

SECRETARÍA DE INFRAESTRUCTURA, COMUNICACIONES Y TRANSPORTES



Km 12+000 Carretera Estatal 431 "El Colorado-Galindo"
San Fandila, Pedro Escobedo
C.P. 76703
Querétaro, México
Tel: +52 442 216 97 77 ext. 2610

publicaciones@imt.mx

<http://www.imt.mx/>