



Certificación ISO 9001:2008 ‡

Funciones volumen-demora en la modelación de flujos vehiculares

Eric Moreno Quintero
Óscar Rico Galeana
Agustín Bustos Rosales

Publicación Técnica No. 427
Sanfandila, Qro, 2014

SECRETARÍA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES
INSTITUTO MEXICANO DEL TRANSPORTE

**Funciones volumen-demora en la modelación de
flujos vehiculares**

Publicación Técnica No. 427
Sanfandila, Qro, 2014

Esta investigación fue realizada en la Coordinación de Integración del Transporte del Instituto Mexicano del Transporte, por el Dr. Eric Moreno Quintero, el M. en I. Óscar Rico Galeana y el Dr. Agustín Bustos Rosales.

Se agradece el apoyo del Dr. Carlos Martner Peyrelongue, Coordinador de Integración del Transporte, en el planteamiento de este proyecto dentro de las líneas de investigación de esta Coordinación.

Contenido

Resumen		iii
Abstract		v
Resumen	Ejecutivo	vii
Capítulo 1.	Introducción	1
Capítulo 2.	La asignación de flujo en redes de transporte	5
	2.1. Criterio Todo o Nada	7
	2.2. Criterios de Equilibrio	12
Capítulo 3.	Las funciones de volumen-demora	17
	3.1. Relaciones entre velocidad y flujo	18
	3.2. Funciones volumen-demora de uso común	22
Capítulo 4.	Comportamiento de las funciones y sus parámetros	25
	4.1. La función BPR	28
	4.2. La función Cónica de Volumen-Demora	36
	4.3. La función de Akcelik	38
Capítulo 5.	Aplicabilidad de las funciones en la modelación	43
Capítulo 6.	Conclusiones	49
Bibliografía		51

Resumen

Este trabajo aborda el tema de las funciones de volumen-demora, utilizadas en la planeación del transporte para modelar la dependencia del tiempo de tránsito, en función de la intensidad del flujo vehicular en una vía.

La dependencia del tiempo de tránsito respecto de los volúmenes vehiculares, permite modelar el fenómeno de la congestión en las redes carreteras, mismo que afecta de modo relevante el desempeño del autotransporte de carga y personas, actividad de gran importancia en la economía nacional.

El cálculo de los flujos vehiculares que utilizan las rutas disponibles en una red de transporte se hace con un *modelo de asignación de tránsito vehicular*. Para ello se requiere conocer los orígenes y destinos de los movimientos, el número de vehículos que van de cada origen a cada destino y el costo (o al menos el tiempo) que implica circular por cada tramo de la red.

En el modelo de asignación es donde las funciones de volumen-demora son relevantes; su fidelidad para representar el fenómeno de la congestión es un atributo de calidad para la modelación y por tanto para la confiabilidad de los pronósticos de los flujos en la red.

Una estimación razonablemente buena de los flujos que circularán en una red de transporte, constituye una herramienta básica para el diseño de políticas de administración, control y mantenimiento del sistema, lo cual adquiere mayor trascendencia considerando los crecientes flujos vehiculares observados en las redes de transporte terrestre en los últimos años.

En este trabajo se examinan las funciones de volumen-demora más comunes en el ambiente de planeación del transporte, sus características y requerimientos de información así como sus posibilidades de aplicación en la red de transporte terrestre mexicana, lo que permitirá construir bases fundamentadas que mejoren los ejercicios de planeación del transporte a nivel nacional.

Abstract

This work addresses the issue of volume-delay functions utilized in transportation planning to model the mathematical dependence of the travel time with respect flow's volume in a road segment.

The dependence of the vehicles' travel time from the circulating volumes allows modelling the phenomenon of congestion in road networks, which affect notably the performance of freight and passengers motor transport, which is a component of great relevance for the national economy.

The calculation of the vehicle flows that occupy the possible routes in a transport network is done with a model of traffic allocation. For this it is necessary to know the movements' origins and destinations, the number of vehicles traveling from each source to each destination and the cost (or at least the time) implied by crossing each section of the network.

The volume-delay functions are relevant in the traffic assignment model, because the accuracy in the representation of congestion they get is an important quality attribute for modelling, and in consequence for the reliability of network's flows forecasts.

So, a reasonably good estimate of the flows circulating in a transport network will be a basic tool for policy design management, control and maintenance of the system, which is very relevant in our country considering the growing traffic observed in recent years.

In this work the more usual volume-delay functions used in the transportation planning environment are reviewed, as well as their characteristics and information requirements and their applicability in land transport network in Mexico, which will allow to build informed foundations to improve the transportation planning practice nationwide.

Resumen ejecutivo

Este trabajo revisa los aspectos básicos de las funciones de volumen-demora que se utilizan en el modelado de la asignación de flujos vehiculares en redes de transporte.

En el capítulo 1 se explica cómo es que las funciones de volumen-demora son representaciones matemáticas del comportamiento de los flujos vehiculares cuando se presenta congestión en las vías. De modo general, estas funciones calculan el tiempo de recorrido en un tramo o ruta de una red vial como una función del volumen vehicular presente en dicha vía. Como es de esperarse, las condiciones de flujo libre, esto es cuando hay sólo unos cuantos usuarios en la red, cambian de modo significativo cuando aumentan los volúmenes vehiculares, provocando aumento de los tiempos de recorrido a medida que se incorporan más usuarios a la vía.

Las funciones de volumen-demora son el elemento crucial en la modelación de las asignaciones de flujos vehiculares. Los puntos básicos del modelado de asignación se comentan en el capítulo 2, donde se revisan los conceptos de equilibrio de los flujos en la asignación, que generalmente es referido por los conceptos de equilibrio de Wardrop¹. En esta concepción, se consideran dos modelos para el comportamiento del flujo vehicular: a) el equilibrio del usuario y b) el equilibrio del sistema.

El equilibrio del usuario (EU) modela el caso en el que los usuarios eligen libremente y a su conveniencia la mejor ruta para llegar a sus destinos. A medida que se ocupa la red vial, los primeros usuarios eligen generalmente las rutas más cortas a sus destinos. Pero, mientras más usuarios se incorporan a la red, la congestión motiva a algunos a cambiar de ruta para mejorar sus tiempos de recorrido.

Estos cambios de ruta se dan sin acuerdo entre los usuarios, y al final se llega a un punto donde cualquier ruta posible para alcanzar un destino implica el mismo tiempo de recorrido y el cambio de ruta ya no conviene; con lo que se alcanza un estado de equilibrio.

El Equilibrio del Sistema (ES) se da cuando los usuarios eligen ruta de modo que el tiempo total para todos sea mínimo, o equivalentemente cuando el tiempo

¹ John Glen Wardrop (1920 – 1989), investigador inglés que a principios de los años 1950 propuso dos importantes principios de equilibrio en el análisis de redes de transporte.

promedio de todos los recorridos en las rutas de la red sea mínimo. Esta situación de equilibrio no ocurre de modo espontáneo y es difícil que los usuarios se pongan de acuerdo para lograrla. Por ello, los resultados de un modelo de ES son de tipo normativo, buscando los flujos vehiculares deseables en las distintas rutas de la red vial, y para que esto ocurra se requiere la intervención del planificador de la red, ya sea facilitando la circulación en algunas rutas o inhibiendo el acceso en otras a cierto tipo de vehículos o a través de la tarificación del uso de la infraestructura.

Un criterio adicional que se examina en este trabajo es el llamado “todo o nada”, en el cual se ignora deliberadamente la condición de congestión en las redes viales. Este criterio considera los costos (tiempos) de recorrer los arcos o las rutas de la red como constantes, y las soluciones de flujo se encuentran con los procedimientos clásicos de ruta más corta.

El criterio “todo o nada” se usa para modelar asignaciones en redes viales en las que los flujos no son demasiado grandes o en redes donde las reglas de operación de los vehículos están muy controladas y difícilmente se produce congestión, como es el caso de las redes ferroviarias.

El capítulo 3 aborda las definiciones de funciones de volumen-demora. Si bien se han reportado en la literatura una buena variedad de funciones de volumen-demora, en este trabajo se analizan tres de las más utilizadas, y que son de uso común en el software comercial de planeación del transporte, como por ejemplo TransCAD y VISUM.

La fidelidad con la que estas funciones logren representar el fenómeno de la congestión es la característica de calidad del modelo de asignación, y es lo que permite un buen pronóstico de los volúmenes vehiculares que circularán por las distintas rutas, conforme los usuarios se acomodan buscando mejorar sus tiempos de recorrido.

Las funciones de volumen-demora que se revisan son las siguientes, en consideración a la generalidad de su uso en la práctica:

Función del Bureau of Public Roads (BPR Function)

$$t(x) = t_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{x}{C} \right)^\beta \right]$$

donde t_0 = tiempo de flujo libre; x = flujo en el tramo; C = capacidad; α , β parámetros de calibración (Ortúzar and Willumsen, 2011).

Función Cónica de Volumen-Demora

$$t(x) = t_0 \left[2 + \sqrt{\alpha^2 \left(1 - \frac{x}{C}\right)^2 + \beta^2} - \alpha \left(1 - \frac{x}{C}\right) - \beta \right]$$

donde t_0 = tiempo de flujo libre; x = flujo en el tramo; C = capacidad; $\alpha > 1$; $\beta = \frac{2\alpha-1}{2\alpha-2}$ son parámetros de calibración (Spiess, 1990).

Función de Demora de Akcelik

$$t(x) = t_0 + D_0 + 0.25T \left[(x-1) + \sqrt{(x-1)^2 + \frac{16 \cdot J \cdot L^2 x}{T^2}} \right]$$

donde t = tiempo de recorrido; t_0 = tiempo de flujo libre; D_0 = demora por señalización en nodo en flujo libre; T = duración esperada de la demanda; L = longitud del tramo; J = parámetro de calibración; x = razón flujo-capacidad. (Caliper, 2005).

Función generalizada costo-demora (generaliza la BPR)

$$c(x) = k + \delta L + \phi t_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{x}{C}\right)^\beta \right]$$

donde $c(x)$ = costo generalizado; k = costo fijo en el tramo; δ = costo unitario por distancia; L = longitud del tramo; ϕ = valor del tiempo; t_0 = tiempo de flujo libre; α y β parámetros de calibración (Caliper, 2005).

Además de la revisión de estas funciones, en el capítulo 4 se examinan el significado de sus parámetros así como estimaciones recientes de éstos que se han reportado en la literatura para algunas carreteras típicas.

La aplicación de estas funciones en los modelos de asignación requiere que se tenga una buena estimación de los parámetros que las definen. Así, la función BPR necesita estimar los parámetros α y β ; la función cónica solamente requiere estimar el parámetro α ya que el parámetro β depende del primero; y la función de Akcelik requiere de estimar el parámetro J . En el caso de la función generalizada, se tiene el requerimiento adicional de estimar el valor del tiempo ϕ de los usuarios y el costo unitario por distancia δ .

Algunos valores de estos parámetros se encuentran reportados en la literatura para aplicaciones en varios lugares en los Estados Unidos.

Considerando la dificultad de realizar calibraciones para estos parámetros con datos de flujos en México, en este trabajo se analizan interpretaciones de los parámetros de las funciones de volumen-demora, con el fin de buscar mediciones más sencillas que permitan alcanzar algunas estimaciones.

Desde el punto de vista práctico, sin embargo, se puede aprovechar la información de estimaciones de parámetros de las funciones volumen-demora que han sido publicadas en los EE.UU., buscando similitudes entre los tipos de camino reportados y los tipos de caminos en México, considerando aspectos como las velocidades de flujo libre, el número de carriles y las velocidades de saturación o las que se observan el nivel de servicio "C".

Estos aspectos se comentan en el capítulo 5. Finalmente en el capítulo 6 se resumen los hallazgos de este trabajo y se hacen algunas recomendaciones para trabajos futuros.

1 Introducción

En la planificación de las redes de transporte terrestre, la estimación de los flujos de vehículos que circulan por las distintas rutas que conectan los orígenes con los destinos es una tarea básica para la administración y mantenimiento de la infraestructura vial. Estas estimaciones ayudan a diseñar políticas de control del tránsito vehicular y de atenuación de sus impactos no deseados, como son la congestión, la contaminación ambiental y los accidentes.

La estimación del flujo vehicular en los distintos tramos de la red se realiza con modelos matemáticos llamados de asignación de tránsito, los cuales determinan los volúmenes vehiculares esperados en cada una de las rutas, a partir del conocimiento de la topología de la red y sus atributos, datos de orígenes y destinos de los movimientos, contenidos en una matriz Origen-Destino, y las *funciones volumen-demora*, que modelan el efecto que la ocupación vehicular tiene sobre el tiempo o el costo de utilizar dichas rutas.

Las Funciones de Volumen-Demora (FVD) son funciones matemáticas que tienen como argumento el volumen vehicular presente en un tramo de la red, o alternativamente el porcentaje de la capacidad del tramo que está utilizando tal volumen y dan como resultado el tiempo estimado que se requiere para recorrer dicho tramo.

Dada la natural interacción entre el volumen vehicular en una vía y el tiempo de recorrido, con mayores tiempos en presencia de mayores volúmenes, las FVD tienen características comunes a pesar de las diferencias en sus formas funcionales; por ejemplo: ser funciones continuas, monótonas crecientes y acotadas en el intervalo de volúmenes permisibles en el tramo, así como poseer derivadas al menos de primer y segundo orden; en particular esta última condición se busca por la posible aplicación de algoritmos de optimización que trabajan con métodos de gradiente.

La importancia que tienen las FVD en el modelo de asignación, es que a través de ellas, el modelo estima los efectos en los tiempos de recorrido de las rutas a medida que éstas son ocupadas por más vehículos. Con esta estimación, el modelo alimenta sus criterios de selección de rutas para obtener un reparto del flujo vehicular entre ellas, que optimice algún aspecto de interés para la planeación, como puede ser lograr los mejores tiempos de recorrido para los usuarios de la red o lograr los flujos que representen el mínimo uso de combustible por los vehículos que cruzan por la red.

Los criterios de selección de rutas para la asignación más usados en la práctica tienen que ver con los conceptos de equilibrio propuestos por J.G. Wardrop en la segunda mitad del siglo XX, y son dos:

a) Equilibrio del usuario (EU) y b) Equilibrio del sistema (ES).

El Equilibrio del usuario se presenta en una red vial cuando los usuarios de la misma eligen libremente y a su conveniencia la que consideran la mejor ruta para llegar a sus destinos. Cuando se comienza a ocupar la red vial, los primeros usuarios eligen generalmente las rutas más cortas a sus destinos. A medida que más usuarios se incorporan a la red, el efecto de la congestión motiva a algunos usuarios a cambiar de ruta al buscar mejorar sus tiempos de recorrido. Estos cambios de ruta se producen sin ningún acuerdo entre los usuarios, y el resultado final es que se llega a un punto en el cual por cualquier ruta posible para alcanzar un destino se consigue el mismo tiempo de recorrido, de modo que el incentivo de cambiar de ruta desaparece. Es decir, se llega a un estado de equilibrio en el cual ninguno de los usuarios de la red vial mejora su tiempo de recorrido si decide cambiar de ruta.

El Equilibrio del sistema se presenta cuando los usuarios acomodan sus elecciones de ruta de modo que el tiempo total que todos ellos consumen en sus recorridos sea mínimo, o equivalentemente cuando se logra que el tiempo promedio de todos los recorridos en las rutas de la red sea mínimo. Esta situación de equilibrio no se produce de manera espontánea y en generales difícil que los usuarios se pongan de acuerdo entre ellos para lograrla. Por ello, los resultados de un modelo de ES tienen carácter normativo, en el sentido de que son los flujos vehiculares deseables en las distintas rutas de la red vial, y para que éstos ocurran en la realidad es necesaria la intervención del planificador de la red, ya sea dando facilidades de circulación en algunas rutas o inhibiendo el acceso a otras rutas a cierto tipo de vehículos o a través de la tarificación del uso de la infraestructura.

Un criterio adicional que se utiliza en la práctica es el llamado “Todo o Nada”. En este criterio no se consideran los efectos de la congestión vehicular, y los costos (tiempos) de recorrido en los tramos y rutas de la red vial se consideran fijos. Los algoritmos de solución en este caso corresponden a los procedimientos clásicos de rutas más cortas, como es el algoritmo de Dijkstra para la ruta más corta o el algoritmo de Floyd para encontrar todas las rutas mínimas en una red. El criterio “Todo o Nada” se utiliza en redes donde los flujos vehiculares no son intensos y no aparece propiamente una congestión, o en redes de transporte donde las condiciones de operación vehicular están muy controladas, como es el caso de las redes ferroviarias.

Varias formas funcionales de FVD se han reportado en la literatura de modelos de asignación. Probablemente la más utilizada es la propuesta por el Bureau of Public Roads norteamericano, llamada función BPR; otras también de uso común son la función Cónica y la función de Akcelik. Estas funciones suelen encontrarse en los

paquetes comerciales de planeación del transporte como por ejemplo TransCAD de Caliper Corporation o VISUM de PTV Group.

En este trabajo se examinan dichas tres funciones en cuanto a su formulación matemática, su comportamiento en su dominio de definición, el significado de sus parámetros y una exploración de sus posibilidades de aplicación en el contexto de la planificación del transporte terrestre interurbano en México.

2 La asignación de flujo en redes de transporte

El modelo de asignación pronostica los flujos vehiculares que circularán en la red de transporte, bajo los supuestos que se hayan considerado en los escenarios de planeación (matrices OD usadas, costos de operación vehicular, tiempos de flujo libre en los tramos, etc.).

La obtención de estimaciones de los flujos vehiculares que circularán por las distintas rutas de la red no es el único propósito de un modelo de asignación. Desde la perspectiva de la planeación, los objetivos centrales de un ejercicio de asignación son los siguientes (Ortúzar and Willumsen, 2011):

- Obtener buenas estimaciones globales del desempeño de la red, como son: los flujos vehiculares totales presentes en la red, los ingresos estimados de los vehículos en el transporte público, etc.
- Tener estimaciones de los tiempos de recorrido entre zonas de interés de la red, para distintos niveles de demanda.
- Obtener estimaciones razonables de los flujos vehiculares en diversos tramos de la red e identificar los que estén más congestionados.

Adicionalmente, también se buscan objetivos secundarios como por ejemplo:

- Identificar las rutas que se utilizan para los movimientos de cualquier par origen-destino
- Analizar cuáles pares O-D utilizan un tramo o ruta particular
- Estimar los movimientos de vueltas en intersecciones de una red urbana para propósitos de diseño de futuras intersecciones.

Los resultados del modelo de asignación permiten entonces estimar beneficios e impactos varios de tipo económico y ambiental, que son de interés para la planeación del transporte ya que son elementos de apoyo para el diseño de políticas encaminadas a la mejora del sistema de transporte estudiado.

La Figura 2.1 muestra la representación gráfica directamente sobre un mapa nacional de un ejercicio de asignación desarrollado con el software TransCAD.

La red carretera corresponde a la red federal y los flujos representan movimientos de camiones de carga con información de origen y destino del año 2010 (Moreno, et al.; 2014).

El grosor de las líneas mostradas en verde es proporcional al nivel del flujo vehicular expresado en toneladas movidas. El criterio de selección rutas considerado fue solamente el tiempo medio de recorrido en los distintos tramos de la red, y la función de volumen-demora usada fue la función BPR.

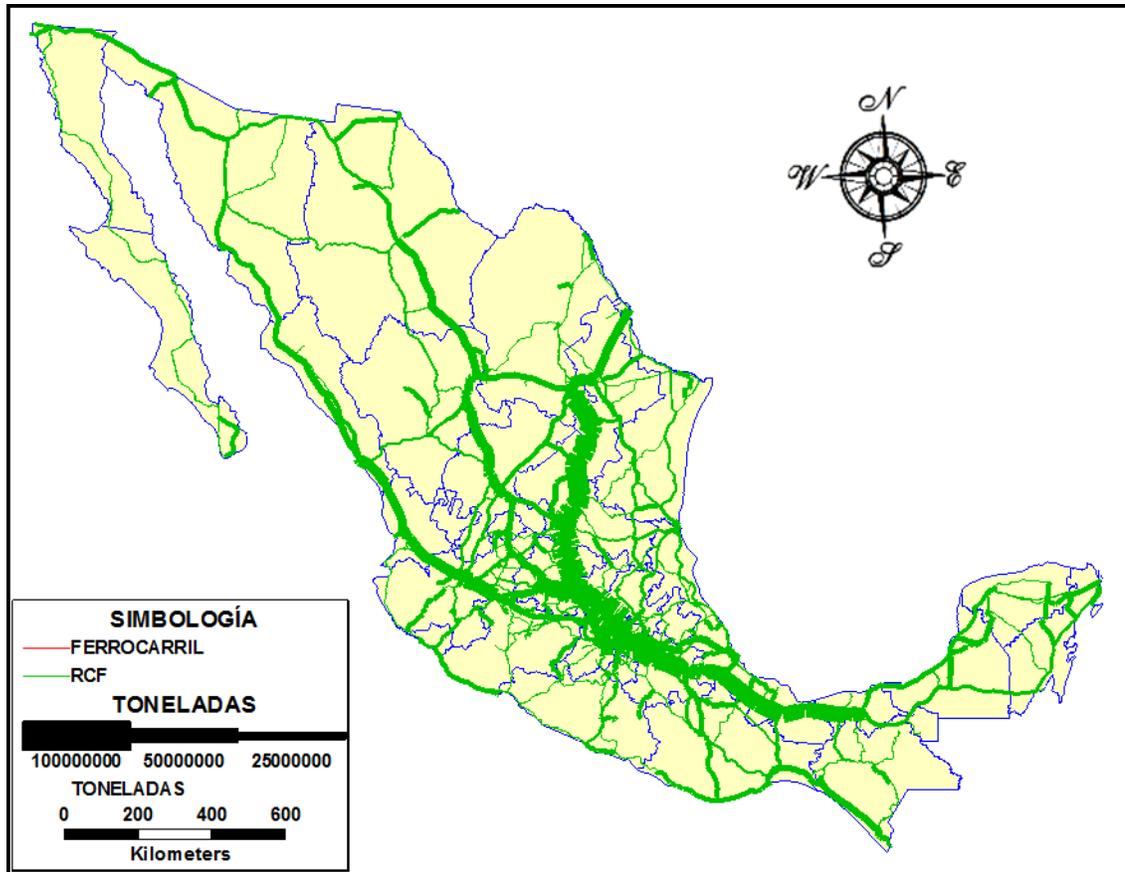


Figura 2.1. Asignación de toneladas por modo carretero con base en el tiempo de viaje por arco. (Fuente: elaboración propia).

Los flujos representados en la Figura 2.1 muestran los movimientos más intensos en la zona central alrededor de la Zona Metropolitana de la Ciudad de México y sus conexiones hacia la frontera norte pasando por Monterrey y Guadalajara, así como los flujos hacia la costa del Golfo cercana a la zona petrolera de Tabasco.

Para asignar los flujos en la red existen varios criterios; los más utilizados son los siguientes.

2.1 Criterio Todo o Nada

Es el modelo de ruta más corta que se estudia en teoría de gráficas. Se parte de una red que tiene n nodos y en la cual cualquier arco (i, j) que une al nodo i con el nodo j tiene asignado una distancia o costo C_{ij} .

El problema de optimización asociado es el siguiente, donde X_{ij} es el flujo que va del nodo i al j (Bazaraa, 1977):

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \\ \text{sujeto a: } \sum_{j=1}^n X_{ij} - \sum_{k=1}^n X_{ki} &= \begin{cases} 1 & \text{para } i = 1 \\ 0 & \text{para } i \neq 1 \text{ ó } i = n \\ -1 & \text{para } i = n \end{cases} \\ X_{ij} &\in \{0, 1\} \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

Las restricciones del problema representan el equilibrio de flujo en los nodos, y las variables de decisión son binarias, indicando con "1" el paso de flujo por el arco y con "0" la ausencia de flujo.

Este criterio no considera que los tiempos de recorrido aumentan a medida que hay más vehículos en la red de transporte, ni la existencia de rutas alternas; los costos C_{ij} de cruzar los arcos (distancia o tiempo) son fijos.

Este modelo se puede usar para volúmenes vehiculares reducidos donde no hay congestión, o si la naturaleza de la red y los vehículos involucrados buscan la ruta más corta de modo natural, como sucede en el transporte ferroviario.

El modelo básico de ruta más corta para llegar de un origen a un destino se ha resuelto satisfactoriamente con algoritmos eficientes, siendo el de Dijkstra y el de Floyd los más conocidos.

El algoritmo de Dijkstra encuentra las rutas más cortas desde un nodo inicial fijo, hacia todos los demás nodos de la red; el algoritmo de Floyd es más general y encuentra las rutas más cortas entre cualquier par de nodos de la red de transporte.

La Figura 2.2 muestra un esquema simplificado de la red carretera federal desde el Distrito Federal hasta Nuevo Laredo en la frontera norte, donde los valores en los arcos son tiempos estimados de recorrido, de modo que la ruta más corta entre dos nodos sea la de menor tiempo.

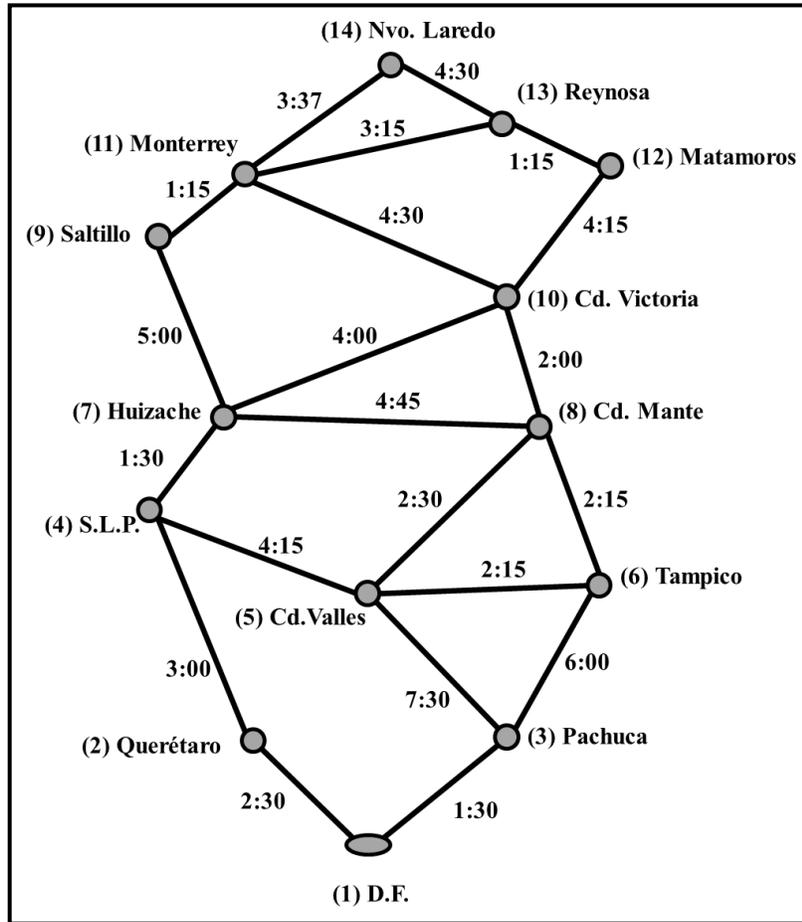


Figura 2.2. Esquema red carretera DF – Nuevo Laredo. (Fuente: datos de “MEXICO. Pronto Atlas. Carreteras”. SIGSA, México 1996).

Con el algoritmo de Dijkstra desde el nodo inicial (1) DF, resulta el árbol de rutas más cortas (tiempo mínimo) hacia todos los nodos de la red simplificada que se muestra en la Figura 2.3. Esta solución se obtuvo con el programa TORA (Taha, 2011).

La secuencia óptima de nodos para la ruta DF – NUEVO LAREDO es:

1 – 2 – 4 – 7 – 9 – 11 – 14 que corresponde al recorrido DF – QRO – SLP – HIUZACHE – SALITLLO – MONTERREY – NUEVO LAREDO, con un total aproximadamente de 16 horas 52 minutos (16.87 h).

From	To	Distance	Route
1-DF	2-QRO	2.50	1- 2
1-DF	3-PACH	1.50	1- 3
1-DF	4-SLP	5.50	1- 2- 4
1-DF	5-VALLES	9.00	1- 3- 5
1-DF	6-TAMPIC	7.50	1- 3- 6
1-DF	7-HUIZAC	7.00	1- 2- 4- 7
1-DF	8-MANTE	9.75	1- 3- 6- 8
1-DF	9-SALTIL	12.00	1- 2- 4- 7- 9
1-DF	10-VICTOR	11.00	1- 2- 4- 7- 10
1-DF	11-MTY	13.25	1- 2- 4- 7- 9- 11
1-DF	12-MATAM	15.25	1- 2- 4- 7- 10- 12
1-DF	13-REYN	16.50	1- 2- 4- 7- 9- 11- 13
1-DF	14-NLARED	16.87	1- 2- 4- 7- 9- 11- 14

Figura 2.3. Rutas más cortas desde el nodo DF hacia todos los demás nodos de la red simplificada. Algoritmo de Dijkstra. (Programa TORA, Taha, 2011).

El algoritmo de Floyd aplicado al ejemplo obtiene los resultados de las Figuras 2.4a y 2.4b.

Cada entrada en la tabla de la Figura 2.4a es la distancia más corta entre el nodo de la fila y el nodo de la columna; por ejemplo, el recorrido mínimo de Tampico (N6) a Monterrey (N11) es 8 horas 45 min (8.75 h), mientras que para el par Pachuca (N3) – Cd. Victoria (N10) es de 10 horas 15 min (10.25 h).

	N 1	N 2	N 3	N 4	N 5	N 6	N 7	N 8	N 9	N 10	N 11	N 12	N 13	N 14
N1		2.50	1.50	5.50	9.00	7.50	7.00	9.75	12.00	11.00	13.25	15.25	16.50	16.87
N2	2.50		4.00	3.00	7.25	9.50	4.50	9.25	9.50	8.50	10.75	12.75	14.00	14.37
N3	1.50	4.00		7.00	7.50	6.00	8.50	8.25	13.50	10.25	14.75	14.50	15.75	18.37
N4	5.50	3.00	7.00		4.25	6.50	1.50	6.25	6.50	5.50	7.75	9.75	11.00	11.37
N5	9.00	7.25	7.50	4.25		2.25	5.75	2.50	10.25	4.50	9.00	8.75	10.00	12.62
N6	7.50	9.50	6.00	6.50	2.25		7.00	2.25	10.00	4.25	8.75	8.50	9.75	12.37
N7	7.00	4.50	8.50	1.50	5.75	7.00		4.75	5.00	4.00	6.25	8.25	9.50	9.87
N8	9.75	9.25	8.25	6.25	2.50	2.25	4.75		7.75	2.00	6.50	6.25	7.50	10.12
N9	12.00	9.50	13.50	6.50	10.25	10.00	5.00	7.75		5.75	1.25	5.75	4.50	4.87
N10	11.00	8.50	10.25	5.50	4.50	4.25	4.00	2.00	5.75		4.50	4.25	5.50	8.12
N11	13.25	10.75	14.75	7.75	9.00	8.75	6.25	6.50	1.25	4.50		4.50	3.25	3.62
N12	15.25	12.75	14.50	9.75	8.75	8.50	8.25	6.25	5.75	4.25	4.50		1.25	5.75
N13	16.50	14.00	15.75	11.00	10.00	9.75	9.50	7.50	4.50	5.50	3.25	1.25		4.50
N14	16.87	14.37	18.37	11.37	12.62	12.37	9.87	10.12	4.87	8.12	3.62	5.75	4.50	

Figura 2.4a. Distancias más cortas entre todos los pares de nodos de la red simplificada. Algoritmo de Floyd. (Programa TORA, Taha, 2011).

La tabla de la Figura 2.4b permite hallar las rutas entre cualquier par origen y destino usando el criterio básico de los nodos intermedios (Taha, 2011). El criterio básico para determinar los nodos intermedios entre un origen i y un destino j , es que en la entrada (i, k) de la tabla aparezca el valor k y a la vez en la entrada (k, j) aparezca el valor j .

	N 1	N 2	N 3	N 4	N 5	N 6	N 7	N 8	N 9	N 10	N 11	N 12	N 13	N 14
N1		2	3	2	3	3	4	6	7	7	9	10	11	11
N2	1		1	4	4	5	4	7	7	7	9	10	11	11
N3	1	1		2	5	6	4	6	7	8	9	10	12	11
N4	2	2	2		5	5	7	7	7	7	9	10	11	11
N5	3	4	3	4		6	4	8	11	8	10	10	12	11
N6	3	5	3	5	5		8	8	11	8	10	10	12	11
N7	4	4	4	4	4	8		8	9	10	9	10	11	11
N8	6	7	6	7	5	6	7		11	10	10	10	12	11
N9	7	7	7	7	11	11	7	11		11	11	13	11	11
N10	7	7	8	7	8	8	7	8	11		11	12	12	11
N11	9	9	9	9	10	10	9	10	9	10		13	13	14
N12	10	10	10	10	10	10	10	10	13	10	13		13	13
N13	11	11	12	11	12	12	11	12	11	12	11	12		14
N14	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	13	13	

Figura 2.4b. Datos para rutas más cortas entre todos los pares de nodos de la red simplificada. Algoritmo de Floyd. (Programa TORA, Taha, 2011).

Por ejemplo, la ruta óptima del par Tampico (N6) y Monterrey (N11) se encuentra como sigue: la entrada N6–N8 de la tabla es 8, mientras que la entrada N8–N11 es 10, con lo que 8 es un nodo intermedio y el primer ensayo de ruta es 6 – 8 – 11.

Continuando con el nodo 8, la entrada N8– N10 es 10 y la entrada N10–N11 es 11, así que 10 es el segundo nodo intermedio y se completa la ruta óptima que es: 6 – 8 – 10 – 11, y que corresponde a: TAMPICO – CD.MANTE – CD.VICTORIA – MONTERREY con el tiempo total de 8 h 45 min que registra la Tabla 1.4a.

Para determinar una asignación de flujos con el criterio Todo o Nada, basta encontrar el total de rutas óptimas y sumar los flujos en los arcos que comparten las rutas para obtener los totales que pasan por cada arco de la red. El siguiente ejemplo numérico ilustra este procedimiento.

La matriz origen destino que se muestra en la Figura 2.5 indica el número de vehículos en los orígenes que desean llegar a los destinos indicados y las correspondientes rutas óptimas.

Usando los algoritmos de ruta más corta, se encuentran las rutas óptimas sobre la red simplificada, se identifican los arcos que son comunes a las distintas rutas y se suman los flujos de las rutas que los utilizan (flujos en ambos sentidos) para dar el total de movimientos sobre los arcos.

La Figura 2.6 muestra el resultado de la asignación, donde los números en los arcos dan el flujo total presente en dichos arcos, y el grosor de los arcos representa dichos flujos. Los arcos con línea punteada no se usan por ninguna ruta.

		DESTINO				
		NLAREDO	TAMPICO	SLP	DF	CDVALLES
ORIGEN	DF	80	20			
	MATAM			20	60	
	MTY				50	25

From	To	Distance	Route
1-DF	14-NLARED	16.87	1- 2- 4- 7- 9- 11- 14
1-DF	6-TAMPIC	7.50	1- 3- 6
12-MATAM	1-DF	15.25	12- 10- 7- 4- 2- 1
12-MATAM	4-SLP	9.75	12- 10- 7- 4
11-MTY	1-DF	13.25	11- 9- 7- 4- 2- 1
11-MTY	5-VALLES	9.00	11- 10- 8- 5

Figura 2.5. Matriz origen-destino y rutas óptimas para el ejemplo numérico (programa TORA, Taha, 2011).

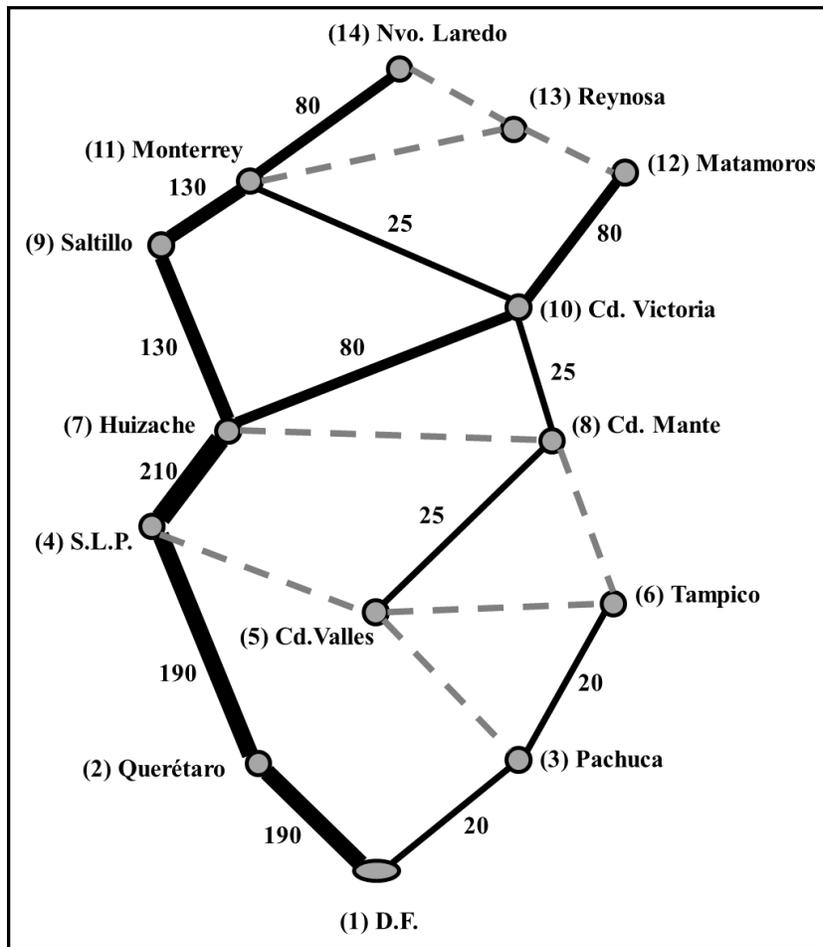


Figura 2.6. Asignación de flujos Todo o Nada. Ejemplo numérico de la red simplificada.

En el ejercicio de asignación anterior, el arco SLP–HUIZACHE tiene el mayor de los flujos con 210 vehículos. Este arco de la red es usado por cuatro rutas:

DF–N.LAREDO; MATAMOROS–DF; MATAMOROS–SLP y MONTERREY-DF, como muestra la Figura 1.5.

Así, sumando en el arco los flujos de las rutas resulta: $80 + 60 + 20 + 50 = 210$. El primer sumando (80) es flujo de SLP hacia HUIZACHE y el resto (130) es flujo de HUIZACHE a SLP.

2.2 Criterios de equilibrio.

En estos criterios se considera que el tiempo de recorrido en los tramos de la red depende del flujo vehicular circulante, lo que permite modelar la congestión típica de las vialidades. Dos tipos básicos de equilibrio, propuestos por J.G. Wardrop en la década de los años 1950 son (Ortúzar and Willumsen, 2011):

Equilibrio del usuario: cuando ningún usuario tiene ventaja al cambiar de ruta. Este equilibrio considera el comportamiento de los usuarios de la red de transporte que eligen libremente sus rutas buscando los mejores tiempos de recorrido. Es útil para modelar la congestión en redes viales.

Equilibrio del sistema: cuando el tiempo total de todos los recorridos o el tiempo promedio de recorridos es mínimo. Este equilibrio tiene la perspectiva del planificador de la red, ya que el consumo de combustible y el desgaste de la infraestructura pueden considerarse en primera aproximación proporcionales al tiempo de recorrido de los vehículos, de modo que minimizar el tiempo total de recorridos contribuye al objetivo del planificador.

Versiones estocásticas de estos criterios de equilibrio se han desarrollado (Sheffi, 1985) para incluir la percepción y preferencias de los usuarios, y captar las distintas respuestas de dos usuarios que se enfrentan a exactamente las mismas alternativas y que sin embargo, deciden de modo diferente.

La aplicación de los criterios mencionados se realiza con las funciones objetivo de cada uno de ellos, las cuales se describen enseguida

Equilibrio del usuario:

En este criterio, los usuarios buscan su mejor ruta individualmente, sin ninguna cooperación entre ellos. Al proceder de este modo, las distintas rutas empiezan a llenarse a medida que el tráfico aumenta y se llega a una situación de equilibrio, en la cual ningún usuario tendrá ventaja al cambiar de ruta. Eso significa que los tiempos para ir del punto A al punto B serán iguales por cualquiera de las rutas que estén en uso.

La forma matemática es la siguiente:

$$\text{Min } C = \sum_j \int C_j(v_j) dv$$

$$\text{s. a. } n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$$

donde el índice j representa los arcos de la red, C_j es la función de costo (función volumen-demora) en el arco j , v_j es el volumen vehicular en el arco j , n_j es el número de vehículos en el arco j , y N es el total de vehículos en la red.

Equilibrio del Sistema:

En este criterio, lo que se busca es que el tiempo total de los recorridos sea mínimo. Una forma equivalente es considerar que el tiempo promedio de viaje en la red sea mínimo. Este criterio es de carácter normativo, de interés para el planificador del transporte que busca minimizar el consumo de recursos que realizan los viajeros en la red, ya que eso representa ahorro de combustibles, disminución de contaminación, menor desgaste de infraestructura, etc.

Los resultados de este criterio suelen diferir de los del Equilibrio del Usuario, resultando flujos en los cuales algunos usuarios tardan más en comparación con el criterio anterior. Esto significa que se somete el interés particular de algunos usuarios al logro del interés colectivo del uso racional de los recursos. La forma matemática es la siguiente.

$$\text{Min } C = \sum_j C_j(v_j) v_j$$

$$\text{s. a. } n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$$

donde el índice j representa los arcos de la red, C_j es la función de costo (función volumen-demora) en el arco j , v_j es el volumen vehicular en el arco j , n_j es el número de vehículos en el arco j , y N es el total de vehículos en la red.

Las funciones de costo $C_j(v_j)$ que aparecen las funciones objetivo C de estos criterios representan la dificultad de cruzar los arcos de la red. Su variable independiente es el volumen circulante o la proporción que ese volumen representa de la capacidad, y suelen tener parámetros que deben calibrarse para su uso en la modelación.

Estas funciones son llamadas de volumen-demora, por su significado intuitivo de representar la impedancia de cruzar la red. Estas funciones modelan el efecto de la reducción en la velocidad de circulación en los tramos, a medida que aumenta el flujo vehicular.

Un ejemplo numérico.

El siguiente ejemplo ilustra las diferencias en un proceso asignación usando los dos criterios de equilibrio anteriores.

Hay 10,000 vehículos en el nodo DF y tienen como destino Monterrey, y se consideran las dos posibles rutas mostradas en el esquema de la Figura 2.7; los arcos con línea punteada no se utilizan.

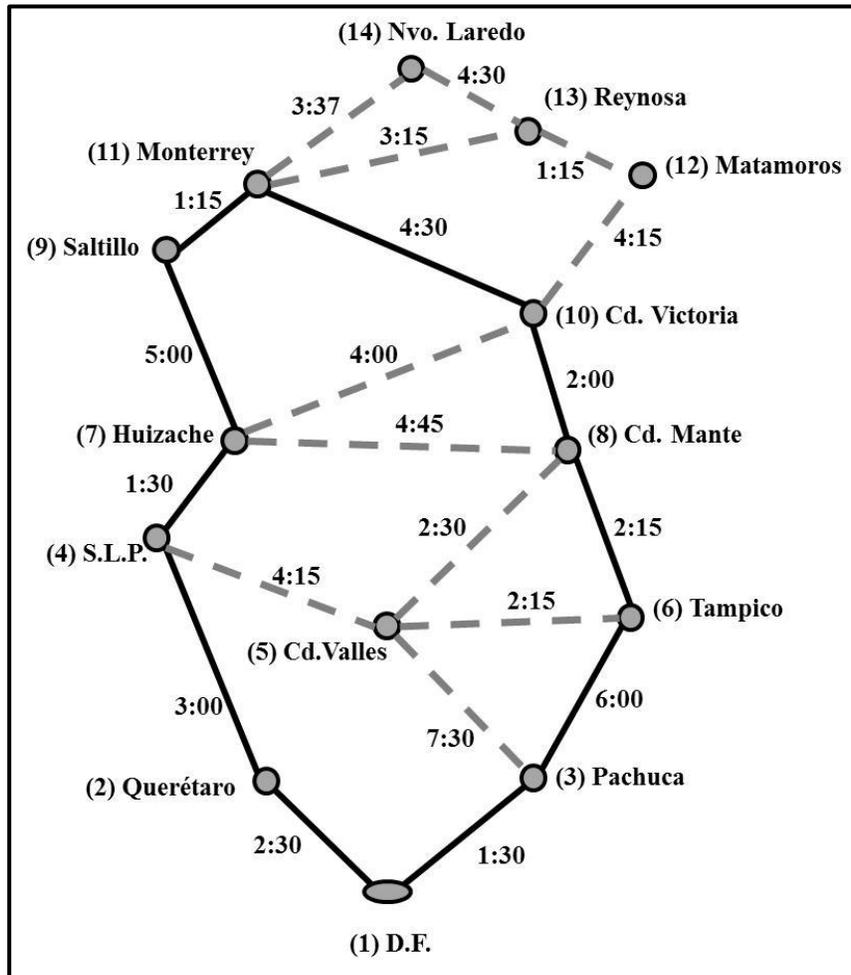


Figura 2.7. Asignación de flujos de equilibrio. Ejemplo numérico de la red simplificada.

En la primera ruta: DF – QRO – SLP – HUIZACHE – SALTILLO – MONTERREY el recorrido es de 13.25 h (13h 15 min). En la segunda ruta: DF – PACHUCA – TAMPICO – CD.MANTE – CD.VICTORIA – MONTERREY, el recorrido es de 16.25 h (16 h, 15 min). Estos son los tiempos a flujo libre, que significa que no hay congestión.

Para modelar la congestión, supóngase que por cada 100 vehículos que ingresan a la primera ruta, el tiempo de recorrido aumenta en 12 minutos, mientras que en la segunda ruta por cada 100 vehículos circulando, el tiempo de recorrido aumenta en 15 minutos.

Este supuesto define las funciones de costo del recorrido en las rutas considerando los volúmenes vehiculares presentes; estas son realmente funciones de volumen-demora. Entonces, las funciones de costo en las rutas, dependiendo de los volúmenes V_1 en la primera ruta y V_2 en la segunda ruta son como sigue:

$$\text{Primera ruta: } f_1(V_1) = 13.25 + 0.002V_1$$

$$\text{Segunda ruta: } f_2(V_2) = 16.25 + 0.0025V_2$$

El problema es encontrar cuántos vehículos circularán por cada ruta bajo los dos criterios de equilibrio así como el costo resultante en cada caso.

Para encontrar el equilibrio del usuario, se resuelve el siguiente problema de optimización:

$$\text{Min } C = \int (13.25 + 0.002V_1)dV_1 + \int (16.25 + 0.0025V_2)dV_2$$

$$\text{s. a. } V_1 + V_2 = 10000; \quad V_1, V_2 \geq 0 \text{ y enteros}$$

Resolviendo este problema con Solver de Excel se tiene el siguiente resultado:

$$V_1 = 6,223 \text{ veh}; \quad V_2 = 3,777 \text{ veh}; \quad \text{Total de vehículos-hora: } 256,946.8.$$

Cada usuario que sigue la primera ruta tarda: $13.25 + 0.002 \times 6223 = 25.7$ h; cada usuario que sigue la segunda ruta tarda: $16.25 + 0.0025 \times 3777 = 25.7$ h. Esta condición de equilibrio indica que ningún usuario puede mejorar su tiempo si cambia de ruta.

Para encontrar el equilibrio del sistema el problema que se resuelve es:

$$\text{Min } C = (13.25 + 0.002V_1)V_1 + (16.25 + 0.0025V_2)V_2$$

$$\text{s. a. } V_1 + V_2 = 10000; \quad V_1, V_2 \geq 0 \text{ y enteros}$$

La correspondiente solución es:

$$V_1 = 5,889 \text{ veh}; \quad V_2 = 4,111 \text{ veh}; \quad \text{Total de vehículos-hora: } 256,444.4.$$

Cada usuario de la primera ruta tarda: $13.25 + 0.002 \times 5889 = 25.0$ h; mientras que cada usuario de la segunda ruta tarda: $16.25 + 0.0025 \times 4111 = 26.5$ h.

El ejemplo muestra cómo en el equilibrio del usuario los tiempos totales (vehículos-hora) son mayores que para el equilibrio del sistema, en este caso con una diferencia de: $256,946.8 - 256,444 = 502.3$ veh-h.

En el equilibrio del sistema, la primera ruta tiene un tiempo mejor que en la segunda ruta y también mejor que la solución del equilibrio del usuario; pero a la vez el tiempo de la segunda ruta es peor que todos los demás tiempos.

Esto plantea la problemática del planificador de la red de transporte, que conociendo los flujos para el caso del equilibrio del sistema, debe buscar formas de inducir a los usuarios a seguir esos flujos, lo cual significa que algunos de ellos acepten mayores tiempos de recorrido para beneficiar al sistema de transporte en su conjunto reduciendo el número de vehículos-hora requeridos para los traslados.

Las soluciones del problema de asignación de vehículos a las distintas rutas dependen por completo de las funciones de volumen-demora que modelan la congestión en las redes de transporte. Por esa razón, la formulación de estas funciones debe en principio hacerse de modo que sus propiedades matemáticas reflejen adecuadamente el fenómeno de la congestión.

En los capítulos siguientes se revisan las funciones de volumen-demora más comunes en la práctica y se analizan sus propiedades matemáticas así como los requerimientos de parámetros para su utilización.

3 Las funciones de volumen-demora

Las funciones de volumen-demora (FVD) son el elemento crucial del modelo de asignación para lograr representaciones aproximadas de los flujos que circulan en las distintas rutas de una red de transporte.

Puesto que una función de volumen-demora $f(x)$ modela el comportamiento del tránsito vehicular en condiciones de congestión, algunas propiedades deseables para $f(x)$ son las siguientes.

1. $f(x)$ representa el tiempo de recorrido en un arco; el argumento x , puede ser el volumen vehicular presente en el arco o el porcentaje de la capacidad del mismo; en este último caso, $x \in [0, 1]$.
2. $f(x)$ es no-negativa, continua, monótona creciente y acotada en el dominio de su definición. Así se tiene correspondencia entre aumento de volumen vehicular y aumento de tiempo de recorrido, y una medida máxima del tiempo de recorrido cuando se llega a la saturación.
3. $f(x)$ tiene una forma analítica sencilla para manejo de cálculos, de modo que sea fácilmente transferible en diversas plataformas de cómputo.
4. $f(x)$ tiene derivadas primer y segundo orden al menos, para que la gráfica de f sea una curva razonablemente representativa de la variación del tiempo con la ocupación de la vía, para calcular costos marginales y también facilitar el uso de técnicas de optimización basadas en el gradiente de la función.

Ejemplos de este tipo de funciones y sus características matemáticas se examinan en este capítulo.

Como introducción al tema de las FVD primeramente se revisan los conceptos básicos de la relación entre velocidad de circulación y flujo presente en una red de transporte, que aclaran el fenómeno de la congestión que es particularmente importante en las redes carreteras.

3.1 Relaciones entre velocidad y flujo

El efecto más directamente observable de la congestión en una vía es la disminución de la velocidad de los usuarios a medida que los volúmenes vehiculares aumentan en esa vía.

La representación matemática de este efecto son las curvas de velocidad-flujo que describen las variaciones de la velocidad en tramos de la red en función del volumen vehicular presente.

Un buen ejemplo de estas curvas es el del programa COBA (Cost-Benefit Analysis) del Departamento del Transporte del Reino Unido. La forma general de estas curvas es como sigue (Lancashire County Council, 2010).

$$S(V) = \begin{cases} S_0 & \text{para } V \leq F \\ S_0 + \frac{(S_1 - S_0)(V - F)}{(C - F)} & \text{para } F < V \leq C \\ \frac{S_1}{1 + \frac{S_1(V - C)}{8dC}} & \text{para } V > C \end{cases}$$

donde:

S = velocidad en el tramo (km/h); S = d/t.

t = tiempo de recorrido del tramo (horas).

d = longitud del tramo (km).

V = flujo en el tramo (PCU/h).

S₀ = velocidad a flujo libre.

S₁ = velocidad a la capacidad del tramo.

F = máximo flujo en el cual las condiciones de flujo libre prevalecen.

C = capacidad del tramo.

La tabla 3.1 muestra algunos parámetros para esta FVD en autopistas británicas. Puede observarse que en todos los casos, la velocidad supuesta en el punto de saturación (flujo = capacidad) es la misma (45 km/h). El flujo crítico F es el valor máximo del flujo para el cual prevalecen aún las condiciones de flujo libre.

Tabla 3.1. Parámetros de funciones velocidad-flujo en el Reino Unido (Lancashire County Council, 2010).

Tipo de carretera	S0 Velocidad flujo libre (km/h)	S1 Velocidad en saturación (km/h)	F flujo crítico (pcu/h)	Capacidad (pcu/h)
<i>Rural D3 Motorway</i> . Interurbana, 3 carriles por sentido.	116	45	3600	7560
<i>Rural D2 Motorway</i> . Interurbana, 2 carriles por sentido.	112	45	2400	4860
<i>Rural D2/AP (A Trunk)</i> . Interurbana, 2 carriles por sentido, uso general (All Purpose). Troncal.	108	45	2160	4520
<i>Rural D2/AP</i> . Interurbana, 2 carriles por sentido, uso general (All Purpose).	105	45	2160	4360
<i>Rural D3/AP (A Trunk)</i> . Interurbana 3 carriles por sentido, uso general, troncal.	108	45	3240	6780
<i>Rural D3/AP</i> . Interurbana 3 carriles por sentido.	105	45	3420	6540

La Figura 3.1 muestra las curvas de velocidad (km/h) y tiempo de recorrido (min) para una carretera interurbana (*Rural D2 Motorway*) con los parámetros:

S_0 = velocidad a flujo libre = 112 km/h

S_1 = velocidad a la capacidad del tramo = 45 km/h

F = flujo crítico (límite para condiciones de flujo libre) = 2400 pcu/h

C = capacidad del tramo = 4860 pcu/h

Y suponiendo que d = longitud del tramo = 18 km.

La correspondiente curva de tiempo de recorrido se obtuvo de la relación $t = d / S$. Así, el tiempo de recorrido a flujo libre resulta $t = 18/112 = 0.161 h \approx 9.6 min$ a la velocidad correspondiente de 112 km/h.

En el nivel de saturación (4860 pcu/h) la velocidad cae a 45 km/h y el tiempo de recorrido resulta de 24 minutos aproximadamente.

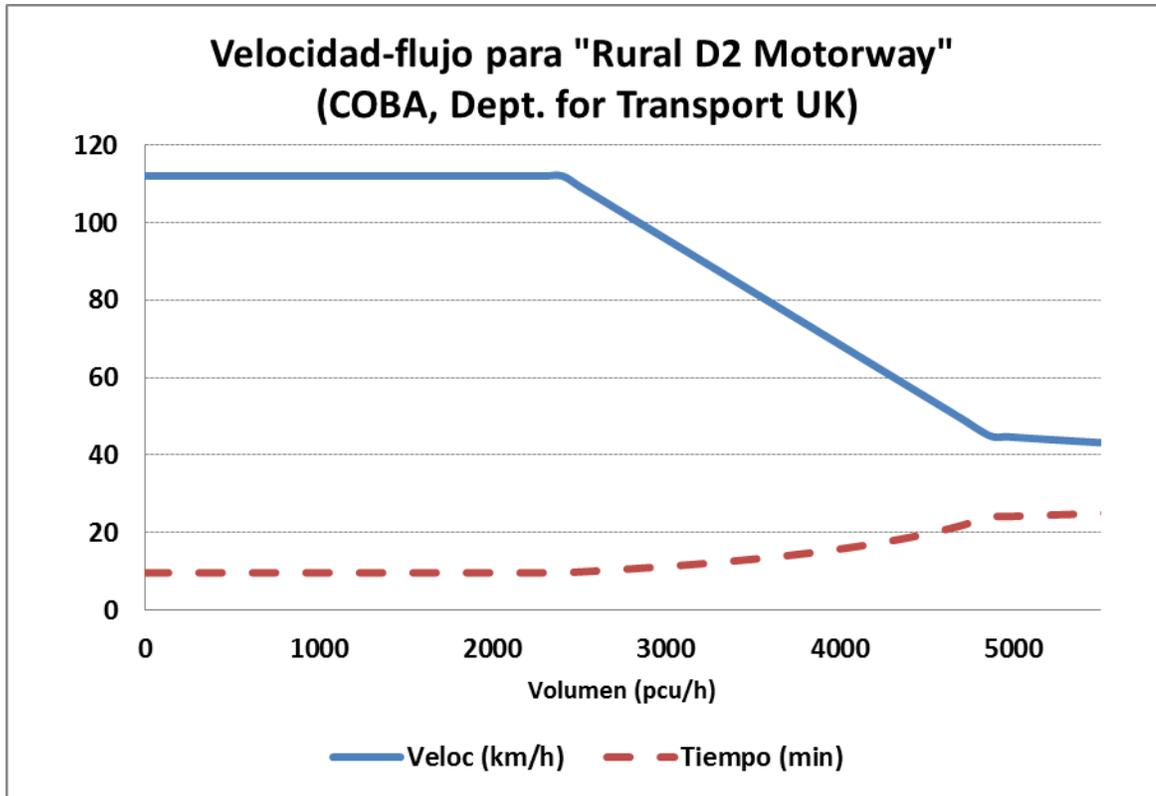


Figura 3.1. Ejemplo de curva velocidad-flujo. (Elaboración propia, con base en COBA, Lancashire County Council, 2010).

La curva de velocidad-flujo de la Figura 3.1 es una función lineal continua a trozos en la mayor parte de su dominio, entre el flujo cero y el de saturación, cuando el flujo es igual a la capacidad del tramo.

Para valores mayores al nivel de saturación, la forma funcional mostrada es de un recíproco del flujo en el tramo, como se ve en la expresión funcional de $S(V)$:

$$\frac{S_1}{1 + \frac{S_1(V - C)}{8dC}}$$

El modelo matemático en esta parte del dominio de la función reduce la velocidad asintóticamente a cero, y el tiempo aumenta constantemente, ya que:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \left[\frac{S_1}{1 + \frac{S_1(V - C)}{8dC}} \right] = 0$$

La función del ejemplo anterior, si bien es continua a trozos, tiene dos puntos donde el cambio de pendiente no es continuo (en $V = F$ y en $V = C$) y por tanto ahí no existe la derivada.

En el punto donde $V = F$, la pendiente cambia de cero (función constante = S_0 hasta antes de ese punto) a:

$$\frac{(S_1 - S_0)}{(C - F)} = \frac{45 - 112}{4860 - 2400} = \frac{-67}{2460}$$

que es la pendiente de la parte lineal decreciente hasta $V = C$.

Para el punto donde $V = C$, se considera la derivada de la función definida para valores $V > C$:

$$\frac{-S_1^2}{8dC \left[1 + \frac{S_1(V - C)}{8dC} \right]^2}$$

En el valor $V = C$ la pendiente cambia a:

$$\frac{-S_1^2}{8dC} = \frac{45^2}{8 \times 18 \times 4860} = \frac{-5}{1728}$$

Esta característica de la función mostrada puede dificultar la optimización de esta clase de funciones bajo los principios de Wardrop cuando se usan técnicas basadas en gradiente.

Para los valores de flujo $V > C$ se debe notar que en la realidad el flujo real ya no aumenta más allá de la capacidad. Esta condición se presenta cuando flujos adicionales a la saturación del tramo intentan ocuparlo, generando una situación inestable y la formación de colas en las entradas de la red.

Para propósitos de modelación, en algunos casos es conveniente considerar que para flujos mayores a la capacidad del tramo, la velocidad se mantiene constante en la correspondiente a la del flujo de saturación (Ortúzar and Willumsen, 2011), que en el ejemplo mostrado sería de 45 km/h.

Otras funciones de volumen-demora han aparecido en la literatura con mejor comportamiento matemático y que han dado buenos resultados en la modelación.

3.2 Funciones volumen-demora de uso común

Tres de las FVD más comunes reportadas en la literatura son: la función BPR, la función cónica y la función de Akcelik, que se describen enseguida.

Función del Bureau of Public Roads (BPR Function)

$$t(x) = t_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{x}{C} \right)^\beta \right]$$

donde t_0 = tiempo de flujo libre; x = flujo en el tramo; C = capacidad; α , β parámetros de calibración (Ortúzar and Willumsen, 2011).

Función Cónica de Volumen-Demora

$$t(x) = t_0 \left[2 + \sqrt{\alpha^2 \left(1 - \frac{x}{C} \right)^2 + \beta^2} - \alpha \left(1 - \frac{x}{C} \right) - \beta \right]$$

donde t_0 = tiempo de flujo libre; x = flujo en el tramo; C = capacidad; $\alpha > 1$; $\beta = \frac{2\alpha-1}{2\alpha-2}$ son parámetros de calibración (Spiess, 1990).

Función de Demora de Akcelik

$$t(x) = t_0 + D_0 + 0.25T \left[(x-1) + \sqrt{(x-1)^2 + \frac{16 \cdot J \cdot L^2 x}{T^2}} \right]$$

donde t = tiempo de recorrido; t_0 = tiempo de flujo libre; D_0 = demora por señalización en nodo en flujo libre; T = duración esperada de la demanda; L = longitud del tramo; J = parámetro de calibración; x = razón flujo-capacidad. (Caliper, 2005)

Función generalizada costo-demora (generaliza la BPR)

$$c(x) = k + \delta L + \phi t_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{x}{C} \right)^\beta \right]$$

donde $c(x)$ = costo generalizado; k = costo fijo en el tramo; δ = costo unitario por distancia; L = longitud del tramo; ϕ = valor del tiempo; t_0 = tiempo de flujo libre; α y β parámetros de calibración (Caliper, 2005).

La Figura 3.2 muestra ejemplos de estas curvas, con los parámetros más comúnmente usados para la función BPR ($\alpha = 0.15$, $\beta = 4$) y otros parámetros para las funciones Cónica y la de Akcelik, como se indica en la misma figura.

El argumento x de las funciones $f(x)$ en la Figura 3.2 es el nivel de saturación del tramo que representa la función; es decir, $x = \text{volumen vehicular} / \text{capacidad}$ representado en el eje horizontal; el eje vertical representa el tiempo de recorrido a partir del tiempo unitario que corresponde al tiempo de flujo libre, cuando el camino está despejado.

El comportamiento general de las curvas es parecido, aunque puede notarse que la BPR usual (con $\alpha = 0.5$, $\beta = 4$) es la que aumenta más lentamente que las otras. En los tres casos se observa un intervalo de saturación, alrededor del 0.125 en el que las tres curvas permanecen casi sin cambio.

Con los parámetros mostrados en esa figura, la función cónica es la que aumenta más en el punto de saturación; de hecho esta función siempre pronostica el doble de tiempo al llegar a ese punto.

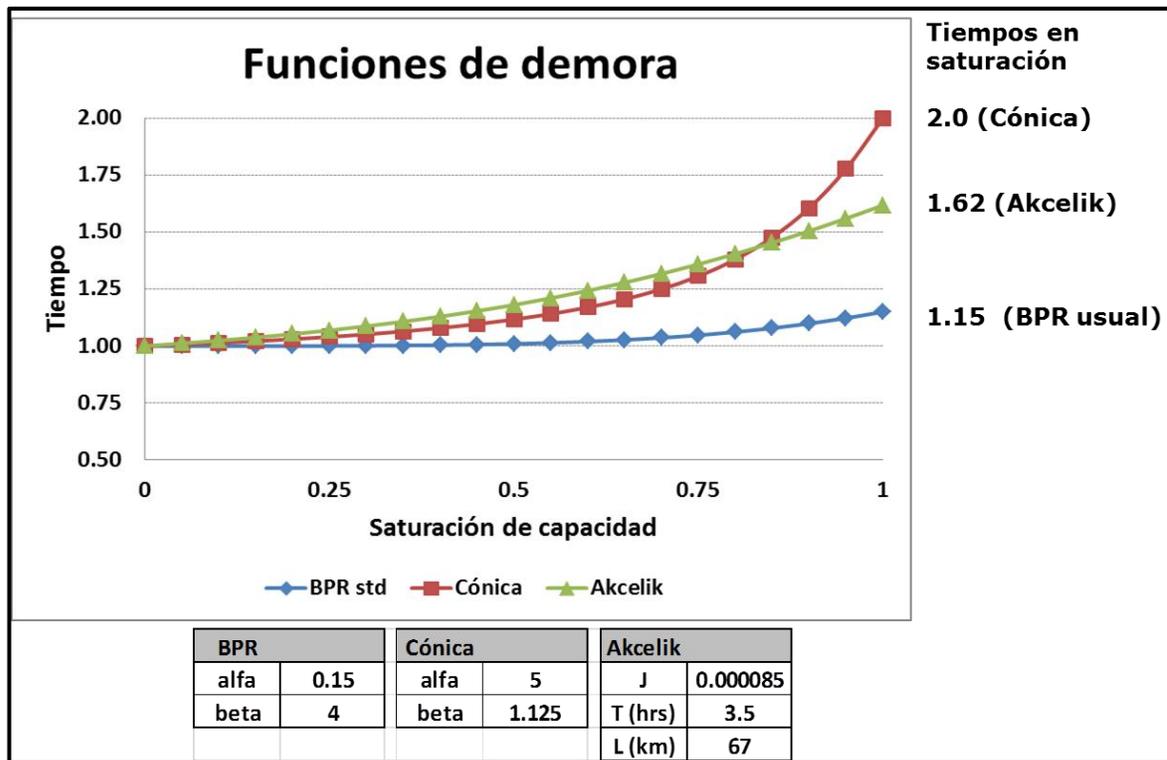


Figura 3.2. Algunas curvas de funciones de volumen-demora

El ejemplo muestra que una caracterización del tránsito vehicular que resulte realista con las funciones de volumen-demora, requiere de ajustar adecuadamente los parámetros que definen estas funciones.

Algunos estudios elaborados en el Instituto Mexicano del Transporte han trabajado con asignación intermodal de carga (Valdez y Mendoza, 2002, Centeno y Mendoza, 2003, Villegas et al. 2013), los primeros dos se basan en la combinación del sistema de información geográfica (SIG) denominado ArcView con un paquete especializado para asignación denominado Strategic Transportation ANalysis (STAN), mientras que el tercero se basa en un programa informático especializado en costos logísticos totales denominado Intermodal Transportation and Inventory Cost State Tool (ITIC-ST). Sin embargo, en ninguno de los trabajos antes mencionados se menciona el valor de los parámetros α o β que fueron usados. Gradilla (2011), por su parte que refieren el uso de la función BPR con los valores “estándar” para su aplicación en el contexto mexicano.

El problema de estimar los parámetros de las FVD se examina en el siguiente capítulo para las tres funciones ya mencionadas.

4 Comportamiento de las funciones y sus parámetros

Para utilizar las funciones de demora, primero es necesario calibrar sus parámetros usando datos de flujos reales (observados en campo). En principio, si se puede hacer mediciones de las velocidades de circulación de los vehículos en un tramo dado, a medida que aumenta la intensidad del flujo vehicular, se obtiene la curva clásica flujo-velocidad que es ampliamente utilizada en la teoría de flujo de tránsito. Un ejemplo se muestra en la Fig. 4.1.

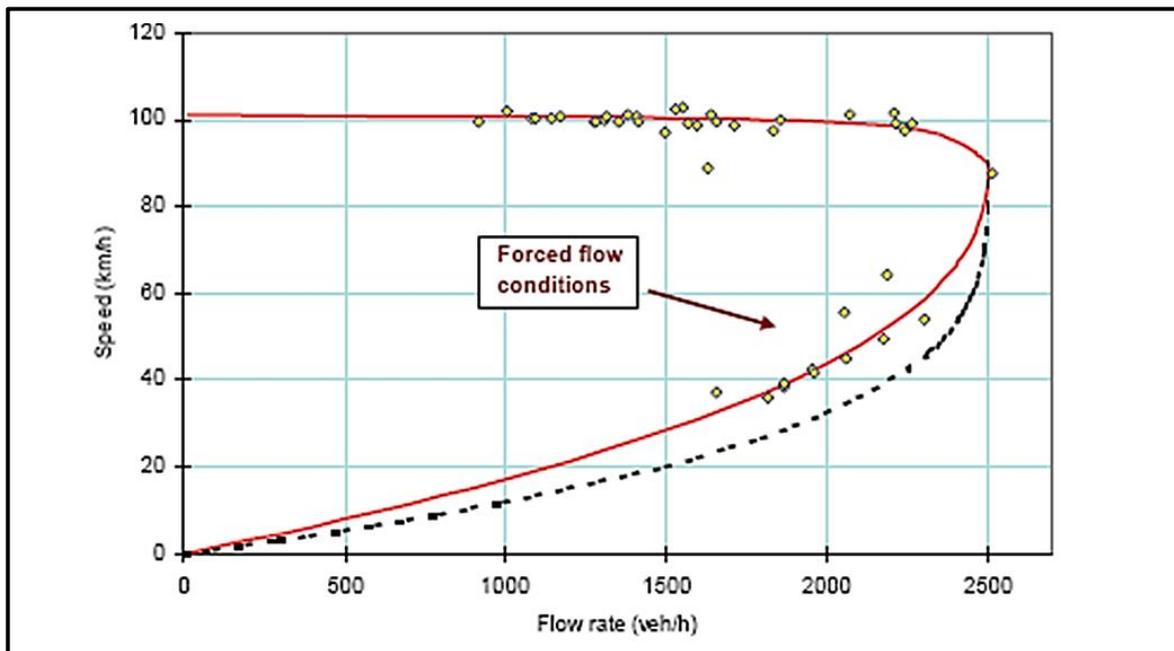


Figura 4.1. Velocidades medidas y estimadas como función de la tasa de flujo en la Eastern Freeway en Melbourne, Australia (incluyendo condiciones de flujo forzado. (Akcelik, R. ,2003).

La Figura 4.1 fue elaborada con datos observados en una autopista urbana de la ciudad de Melbourne en Australia y sirve como ejemplo de la relación que existe entre la velocidad de circulación y la intensidad de tránsito en un tramo de flujo libre (sin semáforos).

La curva tiene dos secciones claramente definidas, la primera antes del flujo máximo (capacidad de la vía) y la segunda, después de dicho punto.

En la primera parte de la curva la velocidad desciende conforme la intensidad de flujo aumenta; sin embargo, es importante destacar que hasta poco antes de alcanzar el flujo máximo, la velocidad desciende muy suavemente, haciendo evidente que en ese rango los conductores pueden elegir a voluntad su velocidad de circulación. En un punto cercano a la capacidad, la disminución de la velocidad se acentúa, mostrando que la presencia de otros vehículos comienza a tener efecto relevante en la elección de la velocidad por parte de los usuarios.

La primera parte de la curva corresponde a las condiciones de operación en que se definen los cinco niveles de servicio (de la A a la E) utilizados ampliamente en Ingeniería de Tránsito y es la región donde el comportamiento del tránsito se mantiene estable.

La segunda parte de la curva corresponde al nivel de servicio F y se caracteriza por presentar condiciones de operación inestable o de flujo forzado, con fuertes congestionamientos de tránsito. Los usuarios enfrentan grandes dificultades para maniobrar y la velocidad disminuye drásticamente, pudiendo alcanzar valores muy bajos, lo que produce que la intensidad de flujo también se reduzca notablemente (puesto que toma mucho tiempo el desplazamiento y circulan pocos vehículos por unidad de tiempo).

Por la forma de la curva, se presenta la singularidad de que se asocian dos condiciones de operación y de velocidad, radicalmente opuestas, a cada valor de la intensidad de flujo de tránsito, con excepción del valor máximo, que corresponde a la capacidad de la vía. La velocidad de operación para la que se alcanza la capacidad de la vía, que algunos autores llaman “velocidad óptima” o “velocidad crítica” (Kutz, 2004), es un valor importante desde el punto de vista de la modelación, como se verá en otros apartados del documento.

Conviene aclarar que el comportamiento observado en la citada Figura 4.1 corresponde a un caso particular observado (en Australia, en este caso) y que cada sección, de cada vía, tendrá un comportamiento distinto en lo particular, pero similar en lo general.

Las diferencias que más nos interesan desde el punto de vista de la modelación, se encuentran en el valor de la velocidad crítica (donde se alcanza la capacidad) y en la pendiente de la curva en la primera sección, pues, en general, entre mejores especificaciones de calidad tenga una vía, el valor de la velocidad crítica tiende a ser más alto y la pendiente de la curva más suave (como en el ejemplo analizado); en cambio, carreteras con menores especificaciones o de un carril por sentido, tienen una velocidad óptima menor y una pendiente negativa más pronunciada.

Un aspecto especialmente importante en la determinación de la velocidad crítica y la pendiente de la curva es la proporción de vehículos pesados en el flujo, puesto que en autopistas urbanas con una baja presencia de vehículos de carga las velocidades de operación y la afectación de vehículos adicionales en el flujo es

mucho menor que en el caso de carreteras con una presencia alta de vehículos de carga.

La utilidad de esta clase de datos es que permiten estimar los tiempos de recorrido del tramo (del que se sabe su longitud) a partir de las velocidades antes de saturación, con lo cual se pueden calibrar las funciones de demora con algún procedimiento estadístico adecuado.

Ahora bien, el llevar a cabo estas mediciones no siempre es fácil, pues se requiere de recursos, personal, aparatos de medición, y sobre todo, de presupuesto.

Las limitaciones de datos para calibrar funciones de demora, sin embargo, pueden reducirse haciendo un análisis básico del comportamiento de dichas funciones.

Primeramente, se consideran los valores que estas funciones toman cuando la variable flujo toma los valores $x = 0$ (correspondiente al llamado tiempo de flujo libre, cuando no hay impedimentos de circular) y $x = \text{capacidad del tramo}$ ó $x = 1$ si x representa la proporción flujo/capacidad.

Los resultados para las distintas funciones son como sigue.

- **BPR.** $t(0) = t_0$; $t(C) = t_0[1 + \alpha]$
- **Cónica:** $t(0) = t_0$; $t(C) = 2t_0$. Nótese que el tiempo en saturación es el doble del tiempo de flujo libre.
- **Akcelik.** $t(0) = t_0$; $t(1) = t_0 + D_0 + L\sqrt{J}$. La función de Akcelik incluye un término D_0 para demora por señalización en los nodos y considera la longitud L del tramo. Además, el tiempo en saturación es directamente proporcional a la longitud L del tramo.
- **Costo generalizado.** $t(0) = t_0$; $t(C) = k + \delta L + \phi t_0[1 + \alpha]$. La función de costo generalizado incluye costo fijo k en el tramo, costo unitario por distancia δ y valor del tiempo ϕ para el usuario.

Como se ve, todas las funciones consistentemente asignan el tiempo de flujo libre t_0 al caso en que el flujo es $x = 0$ y en la saturación ($x = \text{capacidad } C$ ó $x = 1$ si x representa el porcentaje flujo/capacidad) todas dan los tiempos esperados de tránsito en el tramo cuando éste opera a flujo máximo.

Las funciones mostradas son todas no-negativas, continuas, crecientes y diferenciables en su dominio de definición. Estas características permiten usarlas para estimar equilibrios de Wardrop con técnicas de gradiente y además permiten calcular las funciones de costo marginal a través de sus derivadas.

4.1 La función BPR

Esta función es de uso muy común en los modelos de flujo de tránsito y su sencilla formulación permite una interpretación útil de sus parámetros. La recomendación más común en referencias básicas y manuales de software es usar la BPR “estándar” con $\alpha = 0.15$ y $\beta = 4$; estos valores son usuales en modelación de redes urbanas. Esta función BPR “estándar” se obtuvo mediante ajustes de ecuaciones polinomiales con datos colectados en carreteras norteamericanas no congestionadas a finales de la década de los años 1950, en el desarrollo de los procedimientos de análisis del *1965 Highway Capacity Manual* (Skabardonis and Dowling, 1997).

Otros valores se han calibrado en los Estados Unidos para vías con distintas velocidades de diseño. La Tabla 4.1 muestra algunos valores que se obtuvieron con base en los procedimientos del *Highway Capacity Manual* de 1985 (NHCRP, 1998); mismas que pueden ser referencias para uso general.

Tabla 4.1. Valores de α y β para distintas vías en los Estados Unidos (NCHRP, 1998)

	Autopistas			Multi-carril		
	70 mph 113 km/h	60 mph 97 km/h	50 mph 81 km/h	70 mph 113 km/h	60 mph 97 km/h	50 mph 81 km/h
α	0.88	0.83	0.56	1	0.83	0.71
β	9.8	5.5	3.6	5.4	2.7	2.1

Las Figuras 4.2 y 4.3 muestran curvas con los datos de la Tabla 4.1 para autopistas y carreteras multicarril², comparadas con la función estándar de $\alpha = 0.15$ y $\beta = 4$.

En estas figuras se observa un comportamiento diferente de la función BPR para ambos tipos de camino, de tal manera que en las multicarril la curva comienza a subir más rápido que en las autopistas. Dicho comportamiento se explica por la diferencia en los atributos de calidad de servicio de ambos tipos de carreteras y la proporción de vehículos pesados presentes en el flujo. Los accesos no controlados a un camino forman zonas de conflicto entre los vehículos que se

² En términos generales, una autopista es una carretera con más de un carril de circulación por sentido, con altas especificaciones de diseño y accesos controlados. La principal diferencia con las carreteras multicarril radica en el control de acceso, pues en éstas hay mayor facilidad de entrada y salida de vehículos al camino, lo cual provoca el uso del suelo aledaño al camino para diversos propósitos.

incorporan a la vía por medio de éstos y los vehículos que ya están circulando en ella.

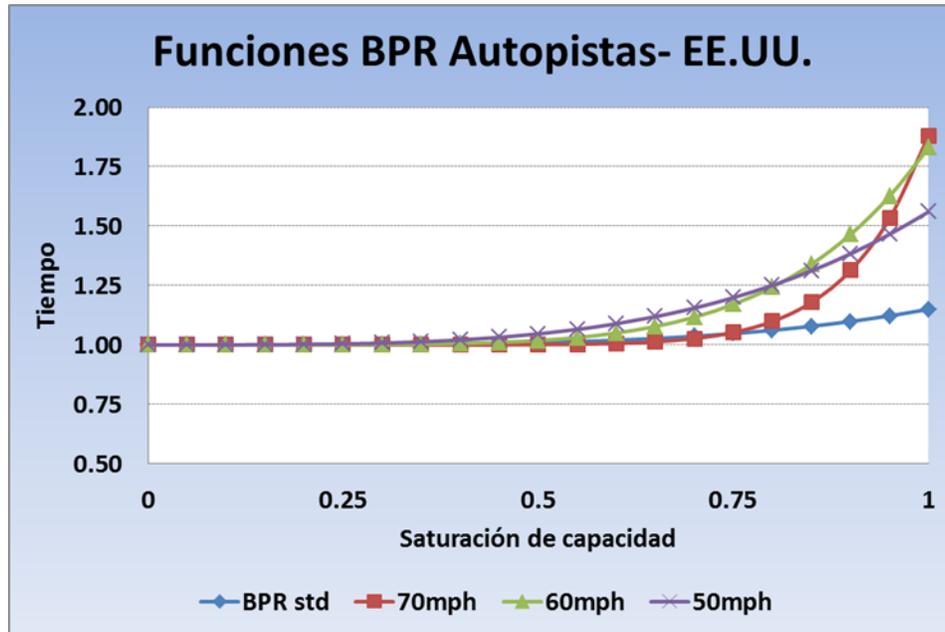


Figura 4.2. Curvas de la función BPR para autopistas (Freeways) norteamericanas (basadas en datos de NCHRP, 1998).

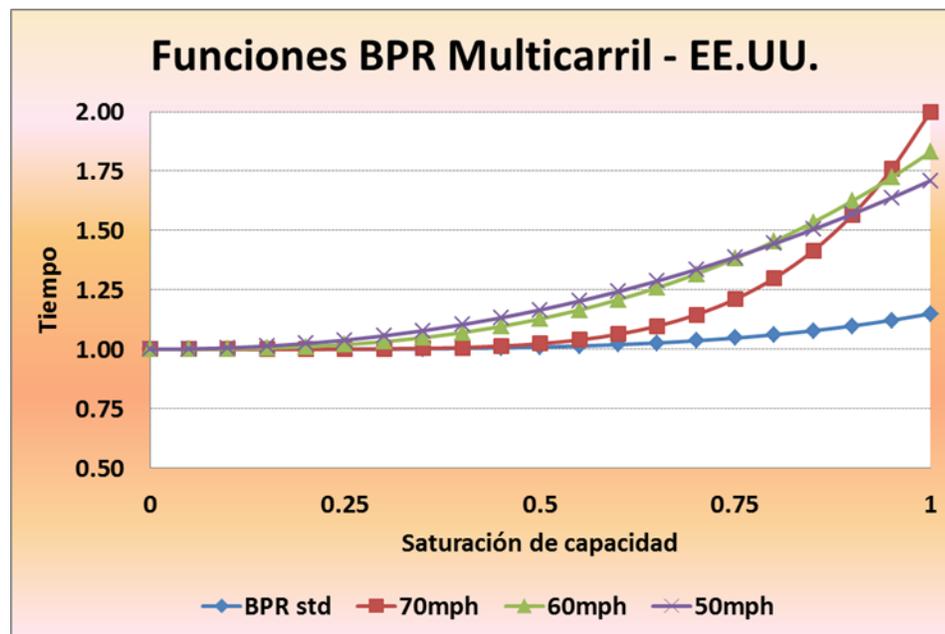


Figura 4.3. Curvas de la función BPR para vías multicarril (Multilane) norteamericanas (basadas en datos de NCHRP, 1998).

Las carreteras multicarril, a diferencia de las autopistas, cuentan con accesos no controlados, por lo que es de esperarse que un incremento en el flujo vehicular repercuta en un mayor decremento en la velocidad que el que se experimentaría en una autopista, la cual no presentaría esas zonas de conflicto.

En las autopistas, las condiciones de operación más favorables y el menor porcentaje de vehículos de carga, provocan que las libertades de maniobra y elección de la velocidad de circulación sean mayores para relaciones de saturación iguales.

Posteriores estudios de calibración en los Estados Unidos han generado más estimaciones de parámetros para la función BPR.

La Tabla 4.2 muestra estimaciones de los parámetros α y β reportados en el *Highway Capacity Manual 2000*. Los valores de la Tabla 4.2 se estimaron para el nivel de servicio "C" en las carreteras referidas (TRB, 2000).

En este nivel de servicio, el flujo vehicular es estable, pero es donde comienza el rango de volúmenes vehiculares en el cual los usuarios que ocupan la red empiezan a sentirse afectados significativamente por la presencia de nuevos usuarios ocupando la vía (Papacostas, 1987).

Tabla 4.2. Valores de α y β para distintas vías en los Estados Unidos, para el nivel de servicio "C" (TRB, Highway Capacity Manual 2000).

		Velocidad a flujo libre (km/h)	Velocidad en saturación (km/h)	α	β
	1	120	86	0.39	6.3
	2	112	85	0.32	7.0
Autopistas	3	104	83	0.25	9.0
	4	96	82	0.18	8.5
	5	88	80	0.10	10.0
Multi-carril	6	96	88	0.09	6.0
	7	88	82	0.08	6.0
	8	80	75	0.07	6.0
	9	72	67	0.07	6.0

La Figura 4.4 ilustra el comportamiento de algunas de las funciones de la Tabla 4.2. Se muestran las autopistas 1 y 4 y las Multicarril 6 y 8.

Como se aprecia en estas gráficas el aumento del tiempo de recorrido es menos pronunciado que en las curvas mostradas en las Figuras 4.3 y 4.4, debido a que los parámetros usados se estimaron para el nivel de servicio "C".

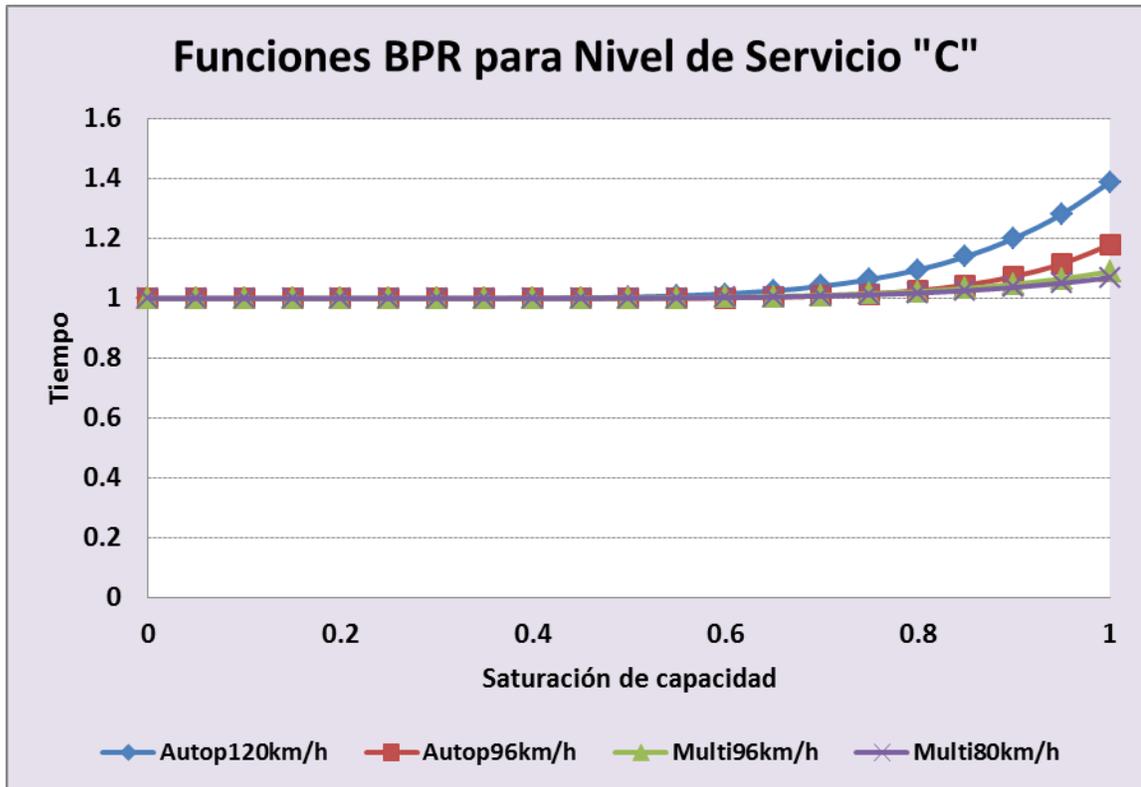


Figura 4.4. Curvas de la función BPR para autopistas y caminos multicarril norteamericanas en nivel de servicio "C" (con datos de TRB, HCM 2000).

La forma funcional de la función BPR permite hacer una interpretación de sus parámetros que puede resultar de utilidad para los procesos de calibración. La interpretación del parámetro α se muestra enseguida, considerando como variable $x = \text{flujo}/\text{capacidad}$, a fin de simplificar la presentación.

Interpretación de α en la Función BPR

La función BPR es como sigue: $t(x) = t_0[1 + \alpha x^\beta]$ con $x = \text{nivel de saturación}$, $0 \leq x \leq 1$. Puesto que cuando el flujo llega a la capacidad del tramo, con $x = 1$ se tiene:

$$t(1) = t_0[1 + \alpha] \quad \text{con lo que} \quad \alpha = \frac{t(1) - t_0}{t_0}$$

El parámetro α puede interpretarse como el porcentaje en que aumenta t_0 , el tiempo a flujo libre, cuando se llega a la saturación. La Tabla 4.3 enseña esta interpretación de α con los datos norteamericanos de carreteras, suponiendo que se tiene un tiempo a flujo libre $t_0 = 45$ min.

Tabla 4.3. Interpretación de parámetros α en carreteras norteamericanas (NCHRP, 1998).

	Autopistas			Multi-carril			
	70 mph 113 km/h	60 mph 97 km/h	50 mph 81 km/h	70 mph 113 km/h	60 mph 97 km/h	50 mph 81 km/h	BPR usual
Coficiente							
α	0.88	0.83	0.56	1	0.83	0.71	0.15
Minutos extra	39.6	37.4	25.2	45.0	37.4	32.0	6.8
Tiempo total	1h 25 min	1 h 22 min	1h 10 min	1 h 30 min	1 h 22 min	1 h 17 min	51.8 min

Así, por ejemplo, para una autopista con velocidad de diseño de 60 mph (97 km/h), el parámetro $\alpha = 0.83$ indicaría un 83% de demora en el nivel de saturación, lo que implica un aumento de 37.4 minutos más, dando un tiempo total de 45min + 37.4 min = 1 h 22 min.

Debido a que el parámetro α también puede expresarse mediante una relación entre la velocidad a flujo libre y la velocidad crítica³ (velocidad de operación a flujo máximo), su valor es directamente proporcional a la primera, misma que es más alta para carreteras con mejores especificaciones.

Por lo anterior, en la tabla se observa que los valores de α tienden a ser más altos para carreteras con mayores velocidades de diseño y mejores condiciones de operación

Interpretación de β en la Función BPR

Para interpretar el parámetro β en la función BPR, podría en principio despejarse el parámetro de la fórmula BPR, lo que resulta en la siguiente expresión.

$$\beta = \frac{\ln[t(x) - t_0] - \ln[\alpha t_0]}{\ln x}$$

Esa expresión no sugiere una interpretación clara o intuitiva para β sin embargo, recurriendo a la noción de elasticidad se puede describir el significado de β .

Este concepto, aunque de origen en la teoría económica, se usa en ingeniería para medir las variaciones de una función respecto a su variable.

³De la definición de velocidad se verifica fácilmente que $\alpha = \frac{v_0}{v_c} - 1$

Si la variable de una función se aumenta en un porcentaje determinado: $\Delta x/x$, el correspondiente cambio porcentual en la función será $\Delta f(x)/f(x)$. La elasticidad en un punto x del dominio es el cociente del cambio porcentual en la función entre el cambio porcentual en la variable. De este modo, la elasticidad indica el cambio en puntos porcentuales sobre la función $f(x)$ por cada punto porcentual que cambie la variable.

Para la función BPR, la elasticidad demora-flujo, es el cociente del cambio porcentual en el flujo dividido entre el cambio porcentual en el flujo que provoca la demora. Se puede representar por la función $E(x)$ como sigue:

$$E(x) = \frac{\% \text{ de cambio en demora}}{\% \text{ de cambio en flujo}}$$

Ya que esta relación cambia según el nivel de flujo x , se puede escribir la fórmula de la elasticidad demora-flujo E_t como sigue, usando la definición matemática de elasticidad:

$$E_t(x) = \frac{x}{t} \frac{dt}{dx} = \beta \frac{\alpha x^\beta}{1 + \alpha x^\beta}$$

Al evaluar la elasticidad en el nivel de saturación $x = 1$, resulta:

$$E_t(1) = \beta \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

de donde:

$$\beta = \frac{1 + \alpha}{\alpha} E_t(1)$$

Por tanto, se puede interpretar β como la elasticidad demora-flujo en el nivel de saturación multiplicada por el factor $\frac{1 + \alpha}{\alpha}$.

Con el ejemplo de las autopistas norteamericanas ya comentadas, la Tabla 4.4 muestra los valores de elasticidades en nivel de saturación calculados con base en el parámetro β de cada tipo de vía.

Tabla 4.4. Elasticidades en nivel de saturación en carreteras norteamericanas (NCHRP 1998).

Coeficiente	Autopistas			Multi-carril			BPR usual
	70 mph 113 km/h	60 mph 97 km/h	50 mph 81 km/h	70 mph 113 km/h	60 mph 97 km/h	50 mph 81 km/h	
α	0.88	0.83	0.56	1	0.83	0.71	0.15
β	9.8	5.5	3.6	5.4	2.7	2.1	4
Elasticidad en saturación	4.6	2.5	1.3	2.7	1.2	0.9	0.5

El hecho de que la elasticidad demora-flujo en el punto de saturación de la vía sea mayor para las carreteras con mejores especificaciones, sugiere que los incrementos marginales porcentuales en el tiempo de recorrido son mayores para las carreteras con mejores condiciones de operación.

Algunos inconvenientes en el uso de la función BPR

La función BPR ha sido usada ampliamente en modelos de asignación y suele estar disponible en software comercial de planeación del transporte. Sin embargo, la experiencia reportada en la literatura por los usuarios de estos modelos muestra algunas dificultades técnicas que se comentan a continuación.

Spiess (1990) hace notar que resulta deseable que para cualquier valor de α el valor de la función en el nivel de saturación duplique el valor del tiempo de flujo libre, condición que los analistas de tránsito juzgan razonable como comportamiento del flujo vehicular; esto, naturalmente no siempre ocurre, como se observó antes.

En la función BPR en el nivel de saturación, el factor por el que se multiplica el tiempo de flujo libre es $1 + \alpha$, y este valor es dos sólo cuando $\alpha = 1$.

Por otra parte, con los algoritmos de solución de equilibrios de Wardrop, el nivel de flujo suele exceder a la saturación, con valores de 3, 5 ó más veces la capacidad del tramo en las primeras iteraciones del algoritmo, lo que da enormes tiempos de recorrido que no resultan realistas.

Adicionalmente, para flujos vehiculares menores que la saturación, en particular para grandes valores de β , los tiempos de recorrido resultan prácticamente independientes del volumen en buena parte del dominio de definición.

Como ilustración, Spiess usa el valor $\beta = 12$ en un tramo con capacidad = 1000. La figura 4.5 ilustra el comportamiento de las curvas para tres valores de Alfa: 2, 4 y 8.

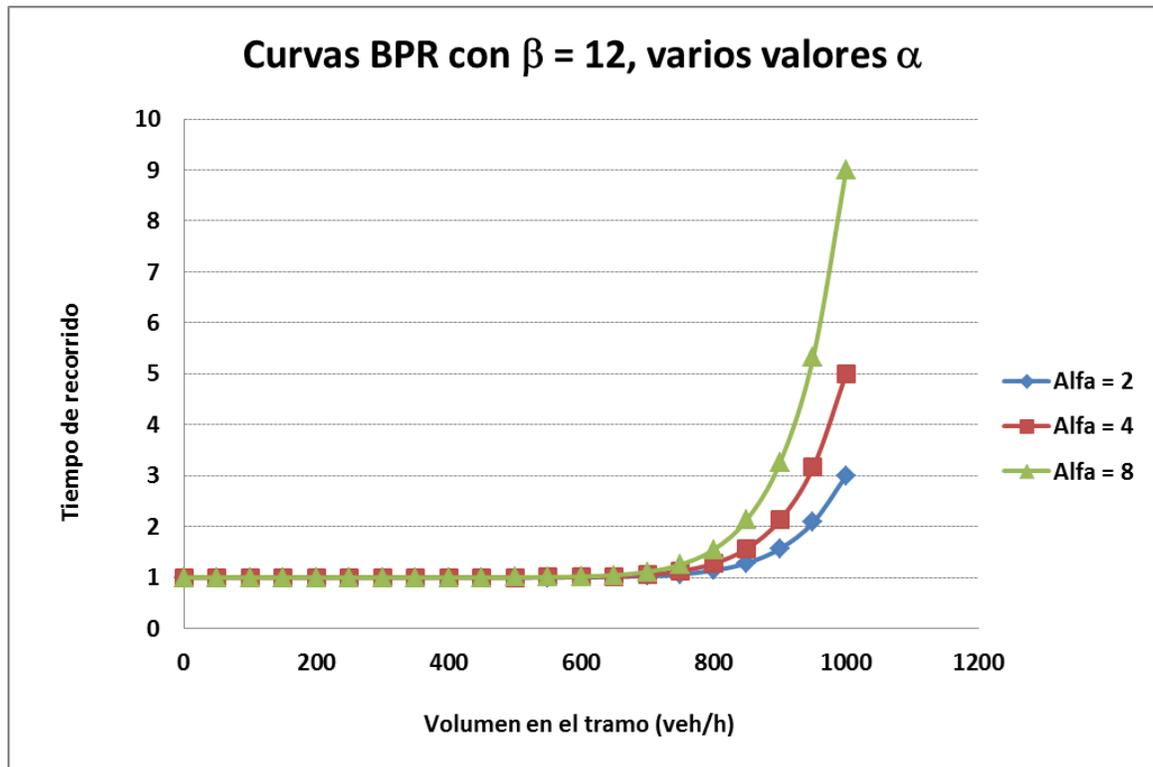


Figura 4.5. Curvas BPR con $\beta = 12$ (con datos de Spiess, 1990).

Puede notarse que para flujos menores de 600, no se ven cambios significativos en el tiempo de recorrido, y que también, para flujos cercanos a la capacidad, los tiempos de recorrido aumentan notablemente respecto al tiempo unitario de flujo libre.

Este comportamiento de las funciones para valores grandes de β podría provocar que el procedimiento de asignación degenera en una región local del dominio hacia una solución todo o nada, debido al comportamiento casi lineal en el rango de flujos menores a la capacidad, además de que la función ya no es estrictamente creciente en ese rango y la solución podría no ser única (Spiess, 1990).

Tales dificultades que pueden surgir en el manejo de la función BPR han llevado a la búsqueda de otras funciones de volumen-demora, como son la función Cónica y la de Akcelik que se discuten enseguida.

4.2 La función cónica de Volumen-Demora.

Esta función fue propuesta por Heinz Spiess en 1990 como una alternativa para mejorar los resultados que se obtienen con la función BPR (Spiess, 1990). La función contiene dos parámetros de calibración, α y β , aunque este último está definido a través de α .

La fórmula de la función cónica es como sigue, donde la variable X se toma como el cociente flujo/capacidad, para simplificar la discusión.

$$t(X) = t_0 \left[2 + \sqrt{\alpha^2(1 - X)^2 + \beta^2} - \alpha(1 - X) - \beta \right]$$

Donde $X = \frac{x}{C}$; $\alpha > 1$; $\beta = \frac{2\alpha-1}{2\alpha-2}$; $x = \text{flujo}$; $C = \text{capacidad}$

Valores para los parámetros α y β se han estimado en los Estados Unidos para varios tipos de caminos, que pueden ser usados como referencia. La Tabla 4.5 muestra algunos de estos valores estimados para varios tipos de autopistas en el estado de Florida (Mtoi and Moses, 2014).

Tabla 4.5. Parámetros α y β de la función Cónica estimados para autopistas en Florida, EE.UU. (Mtoi and Moses, 2014).

Coeficiente	Autopistas			Caminos de cuota		
	Urbana	Residencial	Rural	Urbana	Residencial	Rural
α	1.028752	1.028752	1.035562	1.028752	1.035552	1.035552
β	18.390	18.390	15.060	18.390	15.064	15.064

La Figura 4.6 muestra las curvas resultantes para las autopistas rural y urbana referidas en la Tabla 4.5.

Puede verse en estas gráficas que el comportamiento es prácticamente lineal en el intervalo de definición, y que las dos curvas son sumamente cercanas. En el nivel de saturación, para el volumen igual a capacidad las curvas siempre pronostican el doble del tiempo inicial de recorrido a flujo libre.

Esta característica resulta inmediata de la definición de las funciones cónicas.

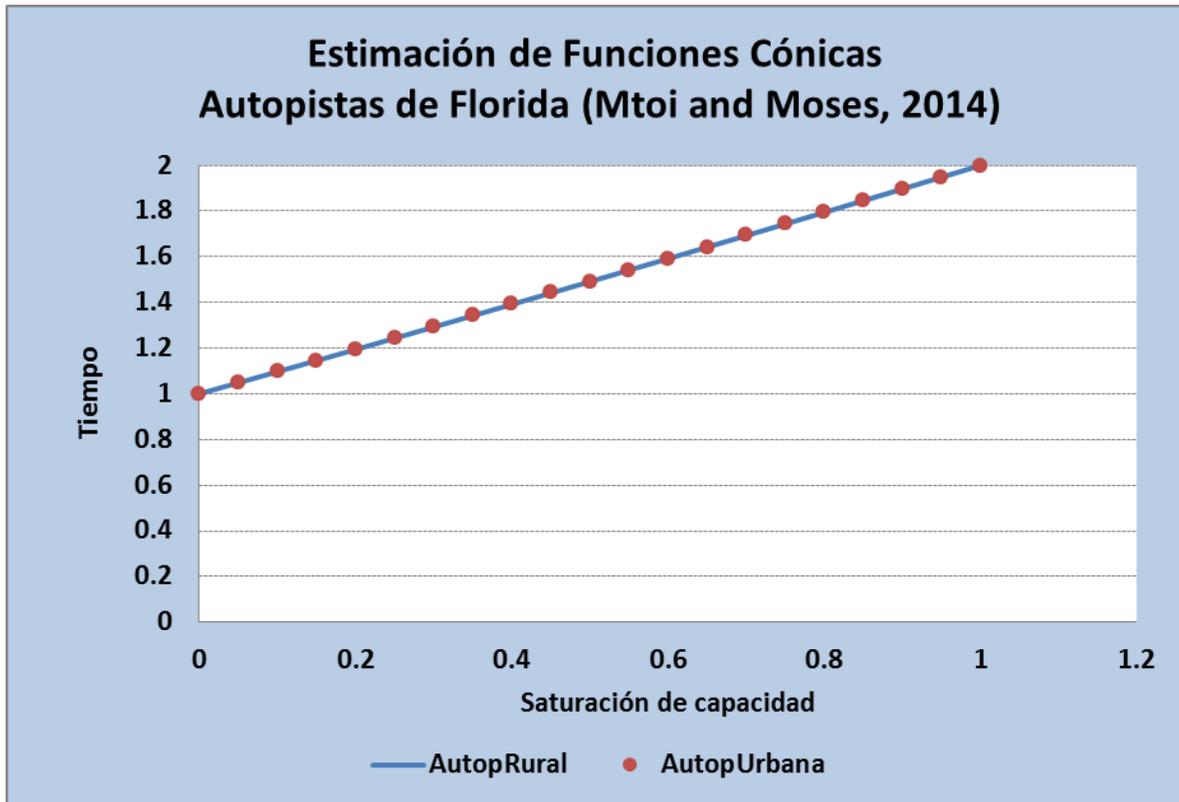


Figura 4.6. Curvas de la función Cónica estimados para autopistas en Florida, EE.UU. (Mtoi and Moses, 2014).

Interpretación del parámetro α en la función Cónica.

De la definición de la función cónica, en el nivel de saturación se tiene $t(1) = 2t_0$, indicando que la función cónica siempre asigna al nivel de saturación el doble de tiempo comparado al tiempo de flujo libre.

Puesto que en la expresión anterior no participa α entonces se calcula la elasticidad de la demora respecto al flujo, $E_t(X)$. La fórmula es la siguiente, aplicando la definición matemática de elasticidad:

$$E_t(X) = \frac{\alpha X [\sqrt{\alpha^2(1-X)^2 + \beta^2} - \alpha(1-X)]}{\sqrt{\alpha^2(1-X)^2 + \beta^2} [2 + \sqrt{\alpha^2(1-X)^2 + \beta^2} - \alpha(1-X) - \beta]}$$

Evaluando la elasticidad en los valores $X = 0$ y $X = 1$ resulta:

$$E(0) = 0; \quad E(1) = \frac{\alpha}{2}; \quad \text{con lo que } \alpha = 2E(1)$$

Entonces, el parámetro α puede interpretarse como el doble de la elasticidad en el nivel de saturación. El valor de β se calcula una vez obtenido el valor de α conforme a la fórmula dada en la definición:

$$\beta = \frac{2\alpha - 1}{2\alpha - 2}$$

4.3 La función de Akcelik

Esta función fue propuesta por Rahmi Akcelik y está referenciada en el Highway Capacity Manual 2000; solamente tiene el parámetro J a calibrar, y considera además del tiempo a flujo libre, la duración estimada de la demanda, la longitud del tramo y opcionalmente una medida de la demora en las intersecciones debido a señalización en esos puntos.

La forma funcional reportada en el *Highway Capacity Manual 2000* es como sigue.

$$t(x) = t_0 + D_0 + 0.25T \left[(x - 1) + \sqrt{(x - 1)^2 + \frac{16 \cdot J \cdot L^2 x}{T^2}} \right]$$

donde t = tiempo de recorrido; t_0 = tiempo de flujo libre; D_0 = demora en la intersección del nodo por señalización en flujo libre; T = duración esperada de la demanda; L = longitud del tramo; J = parámetro de calibración; x = razón flujo-capacidad.

Para modelar flujos de carga en carreteras, consideramos el parámetro $D_0 = 0$, ya que no suele haber semáforos en las intersecciones.

Entonces, la fórmula de Akcelik queda:

$$t(x) = t_0 + 0.25T \left[(x - 1) + \sqrt{(x - 1)^2 + \frac{16 \cdot J \cdot L^2 x}{T^2}} \right]$$

Estimaciones de parámetros para la función de Akcelik se han hecho en los Estados Unidos. La Tabla 4.6 enseguida muestra estimaciones del parámetro J para autopistas y carreteras multicarril norteamericanas, reportadas en el *Highway Capacity Manual 2000*.

Tabla 4.6. Parámetro J de la función Akcelik estimados para autopistas y multicarril norteamericanos. (Highway Capacity Manual 2000).

	Velocidad a Flujo libre km/h	Velocidad en saturación km/h	Parámetro J
Autopista	120	86	0.0000109
	110	84	0.0000079
	100	82	0.0000048
	90	80	0.0000019
Multicarril	100	88	0.0000019
	90	81	0.0000015
	80	74	0.0000010
	70	68	0.0000002

La Figura 4.7 muestra las correspondientes curvas de una autopista de 120 km/h y una multicarril de 100 km/h, referidas en la Tabla 4.6.

Se consideró una duración de la demanda de $T = 1$ h 15 min, y un tramo de longitud $L = 25$ km.

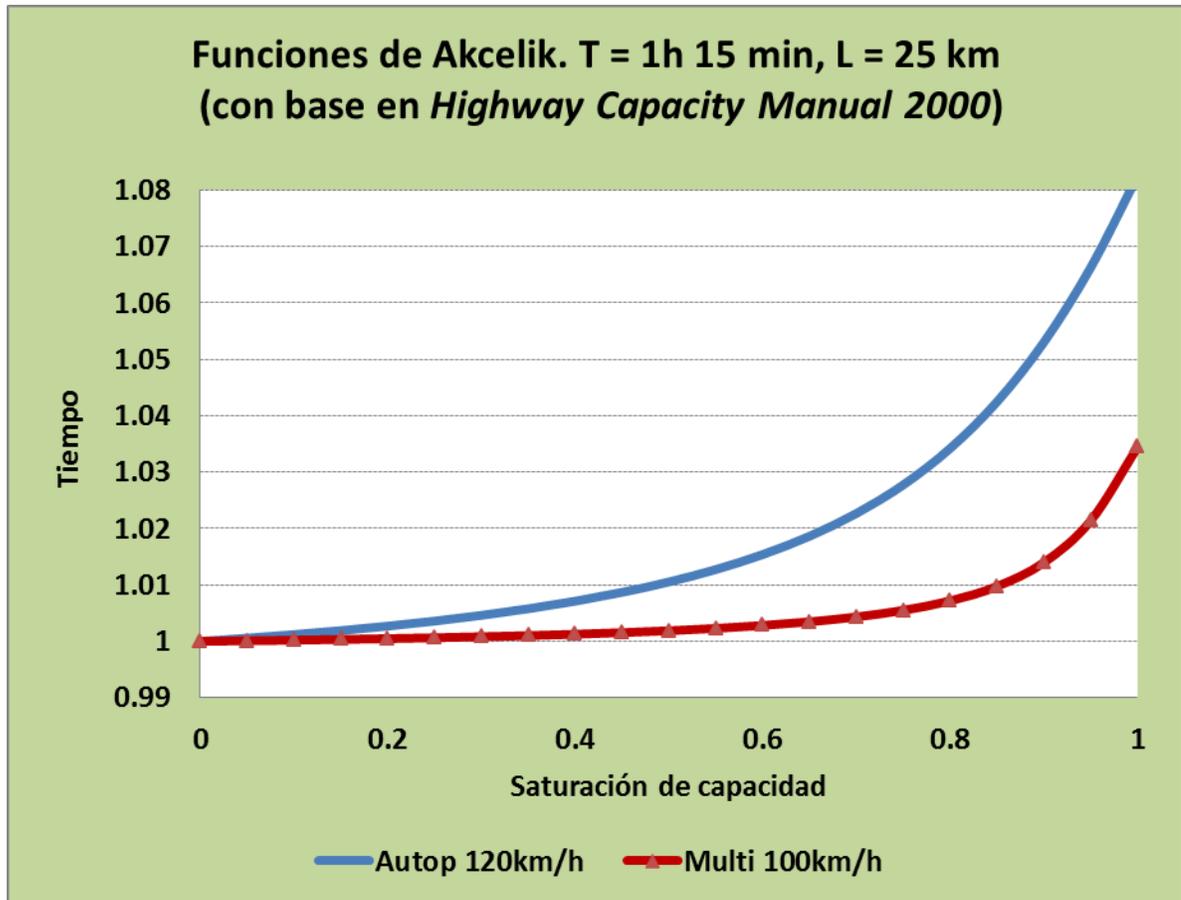


Figura 4.7. Curvas de la función Akcelik estimados para autopistas y multicarril norteamericanas. (Highway Capacity Manual 2000)

Interpretación del parámetro J de la función Akcelik

Cuando se llega al nivel de saturación, $x = 1$, con lo que el tiempo de recorrido es:

$$t(1) = t_0 + L\sqrt{J}$$

De modo que al despejar el parámetro J resulta:

$$J = \left(\frac{t(1) - t_0}{L} \right)^2 = \left(\frac{t(1)}{L} - \frac{t_0}{L} \right)^2 = \left(\frac{1}{L/t(1)} - \frac{1}{L/t_0} \right)^2$$

La última expresión se puede reescribir como:

$$J = \left(\frac{1}{\text{Veloc. Saturación}} - \frac{1}{\text{Veloc. Flujo Libre}} \right)^2$$

De donde, el parámetro J se puede interpretar como el cuadrado de la diferencia de los recíprocos de las velocidades de saturación y de flujo libre.

Las funciones de volumen-demora que se han discutido en este capítulo son ampliamente usadas en la práctica. Cualquiera de ellas tiene ventajas y desventajas, relacionadas con la simplicidad de su forma funcional, su representación de la congestión en el nivel de saturación o la rapidez de respuesta en el tiempo de recorrido a medida que aumenta el flujo vehicular. Está además, la cuestión de obtener valores de sus parámetros que sirvan para modelados de asignación específicos.

En la literatura no se ha reportado alguna de ellas como la mejor de todas, y en algunos casos se usan combinadas en ejercicios de asignación.

Así, por ejemplo el software TransCAD ofrece la posibilidad de modelar algunos tramos de una red de transporte utilizando la función BPR mientras que en otros se puede utilizar una función Cónica, de modo que toda la red quede cubierta con funciones de volumen-demora.

En el capítulo siguiente se examinan algunos detalles para la aplicación de estas funciones en casos concretos, y en el último capítulo se hace un resumen de los hallazgos de este trabajo y se dan algunas sugerencias para la modelación con las funciones de volumen-demora analizadas.

5 Aplicabilidad de las funciones en la modelación

La aplicabilidad de las funciones de volumen-demora a un modelo de asignación en una red particular depende fundamentalmente de los parámetros que se utilicen para representar el comportamiento de los flujos vehiculares en esa red. Varios ejemplos de uso de las funciones BPR, de la Cónica y de la de Akcelik se han reportado en varios países, con los respectivos parámetros estimados mediante ejercicios de calibración en redes de transporte específicas en esos lugares.

El reporte NHCRP 365 del TRB norteamericano propone valores de α y β para la función BPR en autopistas y carreteras multicarril como se indica en la Tabla 4.1 que se reproduce enseguida. Estos valores se obtuvieron con los procedimientos del *Highway Capacity Manual 1985*.

	Autopistas			Multi-carril		
	70 mph	60 mph	50 mph	70 mph	60 mph	50 mph
Coefficiente	113 km/h	97 km/h	81 km/h	113 km/h	97 km/h	81 km/h
α	0.88	0.83	0.56	1	0.83	0.71
β	9.8	5.5	3.6	5.4	2.7	2.1

En el *Highway Capacity Manual 2000 (HCM 2000)* se proponen valores de α y β para la función BPR, considerando que se está representando el nivel de servicio "C", como se indica en la Tabla 4.2 que se reproduce enseguida.

		Velocidad a flujo libre (km/h)	Velocidad en saturación (km/h)	α	β
	1	120	86	0.39	6.3
	2	112	85	0.32	7.0
Autopistas	3	104	83	0.25	9.0
	4	96	82	0.18	8.5
	5	88	80	0.10	10.0
	6	96	88	0.09	6.0
Multi-carril	7	88	82	0.08	6.0
	8	80	75	0.07	6.0
	9	72	67	0.07	6.0

En su formulación original, la función BPR “estándar”:

$$t(x) = t_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{x}{C} \right)^\beta \right]$$

x corresponde al flujo vehicular circulante y C corresponde a la capacidad del tramo.

De esta manera, la referencia al nivel de servicio “C”, tiene que ver con la idea de *capacidad práctica* que corresponde aproximadamente al 80% de la capacidad del camino, y es el nivel en que debe considerarse el flujo para la aplicación de la función BPR. Debido a eso, se recomienda a los modeladores no aplicar la función BPR con máxima capacidad $x = C$, sino con la capacidad práctica para lograr buenas representaciones de los tiempos de recorrido los tramos modelados⁴ (Skabardonis and Dowling, 1997).

El *HCM2000* también reporta estimaciones del parámetro J de la función de Akcelik. La tabla completa de valores para carreteras interurbanas se muestra en la Tabla 5.1 enseguida, que amplía la información de la Tabla 4.6.

Tabla 5.1 Parámetro J de la función Akcelik estimados carreteras norteamericanas. (Highway Capacity Manual 2000).

Tipo de Camino	Velocidad a Flujo libre km/h	Velocidad en saturación km/h	Parámetro J
Autopista	120	86	0.0000109
	110	84	0.0000079
	100	82	0.0000048
	90	80	0.0000019
Multicarril	100	88	0.0000019
	90	81	0.0000015
	80	74	0.0000010
	70	68	0.0000002
Carret. 2-carriles	100	60	0.0000444
	90	50	0.0000790
	80	40	0.0001560
	70	30	0.0003620

⁴ Lo cual, además, permite que la relación x/c tome eventualmente valores mayores a uno, situación poco “real” cuando se toma c igual al flujo máximo posible.

Otros valores de los parámetros para vías urbanas con señalización se pueden encontrar también en estas referencias, pero no se examinan en este trabajo, ya que el interés original es analizar tránsito interurbano.

La empresa consultora australiana Akcelik & Associates Pty Ltd, fundada por Rahmi Akcleik, autor de la función de volumen demora que lleva su nombre, ha reportado estimaciones del parámetro J de esa función.

Estos valores se muestran en la Tabla 5.2, y se estimaron en carreteras australianas.

Tabla 5.2. Valores J de la función de Akcelik (Akcelik & Associates, 1991).

Tipo de camino	Descripción	Velocidad a flujo libre (km/h)	Capacidad veh/h/carril	Parámetro J
1	Autopista	120	2000	0.1
2	Autopista urbana sin interrupciones	100	1800	0.2
3	Autopista urbana con interrupciones	80	1200	0.4
4	Vía secundaria con interrupciones	60	900	0.8
5	Vía secundaria con congestión	40	600	1.6

Consideraciones para aplicar las funciones en el caso de México

De la revisión hecha para las funciones de volumen-demora discutidas, se tiene un panorama general de los rangos de valores que pueden tener los parámetros de estas funciones.

Los valores de referencia, si bien son de países con carreteras que no son idénticas a las carreteras mexicanas, pueden ser una guía de aplicación si se consideran las similitudes entre esos caminos y los que tenemos en México para el transporte interurbano.

De este modo, como un primer paso para aplicar estas funciones, y considerando que en nuestro país las condiciones medias de operación en autopistas son menos favorables que, por ejemplo, sus correspondientes norteamericanas, puede ser razonable intentar la modelación de las autopistas mexicanas asimilándolas a las autopistas norteamericanas de velocidad de diseño 60 mi/h (97 km/h), y las carreteras mexicanas multicarril (generalmente libres de peaje) con las norteamericanas de velocidad de diseño de 60 mi/h (97 km/h) en algunos casos y de 50 mi/h (81 km/h) para los casos con condiciones de operación menos favorables.

Los parámetros que se podrían usar entonces para los caminos en México serían como indica la Tabla 5.3.

Tabla 5.3. Parámetros tentativos para la función BPR en carreteras mexicanas.

	Autopistas	Carreteras multicarril	
Coefficiente	100 km/h	100 km/h	80 km/h
α	0.83	0.83	0.71
β	5.5	2.7	2.1

Las curvas BPR correspondientes a esta elección de parámetros se muestran en la Figura 5.1, considerando el tiempo de recorrido a flujo libre como $t_0 = 1$.

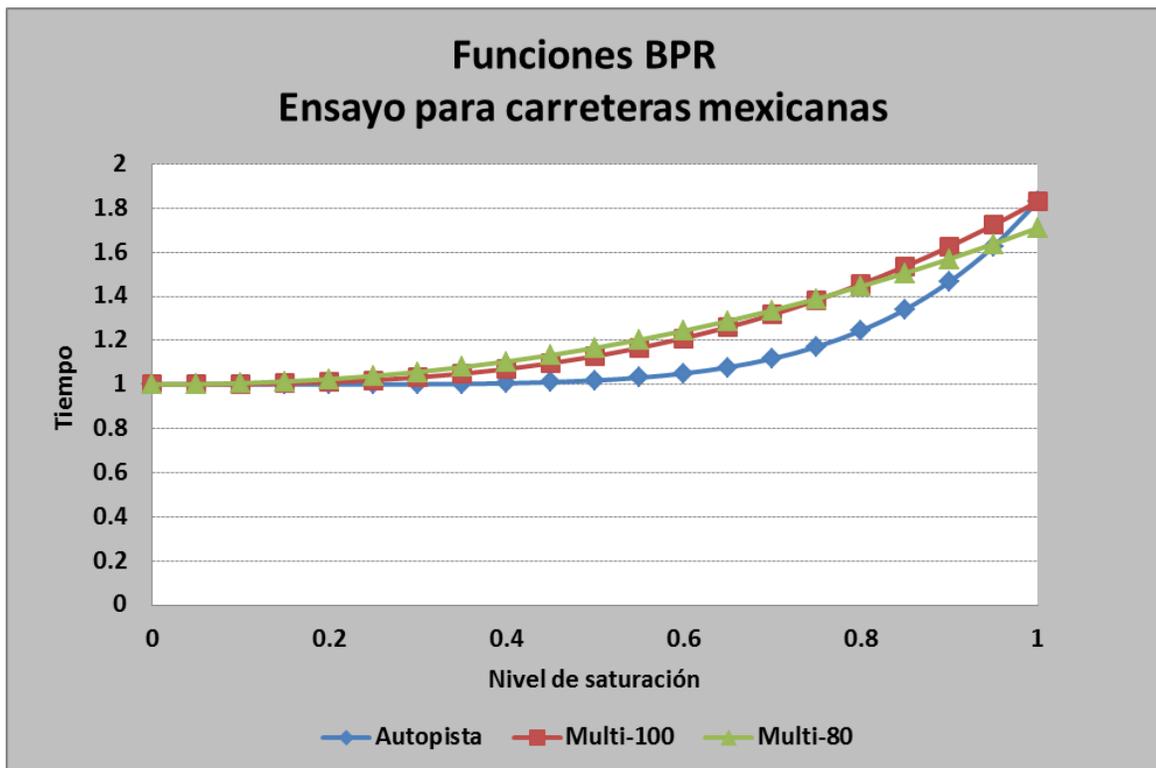


Figura 5.1. Funciones BPR para ensayo en carreteras mexicanas (elaboración propia).

Las curvas de la Figura 5.1 muestran en el nivel de saturación valores del tiempo de recorrido con aumentos entre 70% ($t = 1.7$) y 80% ($t = 1.8$), que parecen representar un comportamiento razonable del tiempo de recorrido en presencia de congestión.

Las curvas que modelan las carreteras libres de peaje, comienzan a aumentar sus tiempos de recorrido en niveles de saturación menores que los de las correspondientes a las autopistas, lo cual es una representación realista de que las autopistas tienen especificaciones más altas que las carreteras libres, y además tienen un confinamiento que limita los accesos de los usuarios a diferencia de las carreteras libres de peaje donde es más sencillo incorporarse al flujo circulante.

Los tiempos de recorrido, considerando el tiempo de flujo libre $t_0 = 1$ para estas curvas de ensayo se muestran en la Tabla 5.4.

Tabla 5.4. Tiempos de recorrido para ensayo de funciones BPR en carreteras mexicanas (elaboración propia).

Tiempos de recorrido con funciones BPR; $t_0 = 1$			
Saturación	Autopista 100 km/h	Libre Peaje 100 km/h	Libre Peaje 80 km/h
0	1	1	1
0.8	1.24	1.45	1.44
1	1.83	1.83	1.71

Tocante a las correspondientes velocidades para el nivel de saturación del 80% del flujo y en el de saturación de capacidad, como la velocidad se calcula como *distancia / tiempo*, y el tiempo de recorrido aumenta conforme a la formulación de la función BPR, la velocidad resultante tanto en el nivel de saturación 0.8 como en el de saturación 1.0 se obtiene simplemente dividiendo la velocidad de flujo libre entre el tiempo aumentado por la congestión que calcula la función BPR.

La Tabla 5.5 muestra los resultados para los tipos de carretera mencionado.

Tabla 5.5. Velocidades para ensayo de funciones BPR en carreteras mexicanas (elaboración propia).

Velocidades con funciones BPR (km/h)			
Saturación	Autopista 100 km/h	Libre Peaje 100 km/h	Libre Peaje 80 km/h
0	100	100	80
0.8	80.4	68.8	55.4
1	54.6	54.6	46.8

Los valores de velocidad al 80% del nivel de saturación en la tabla anterior parecen ser representaciones razonables del comportamiento de los flujos en las carreteras mexicanas, por lo que puede considerarse que los parámetros elegidos para las funciones BPR son de utilidad en la modelación de asignación de flujos para el transporte interurbano en México.

Respecto de las interpretaciones que se discutieron en el capítulo 4, puede decirse que algunos parámetros pueden estimarse con observaciones directas del tránsito vehicular en los caminos de interés.

Primeramente, en la función BPR el parámetro α resulta ser el porcentaje de aumento del tiempo de flujo libre en condiciones de saturación; este valor es relativamente fácil de observar y puede ser un primer paso en la modelación.

El parámetro β en la función BPR necesita de medir la elasticidad flujo-volumen justo en el nivel de saturación. Esta medición es algo más complicada que la observación del parámetro α , pero en principio pudiera instrumentarse para medir los porcentajes de cambio en el tiempo de recorrido con los correspondientes cambios en la intensidad de flujo para puntos cercanos a la saturación.

Para la función Cónica, el parámetro correspondiente α también está ligado a la medición de elasticidades en el punto de saturación, y en principio tiene la misma dificultad de medición que el parámetro β de la función BPR.

En el caso de la función de Akcelik, el parámetro J se relaciona con mediciones de la velocidad de flujo libre que es fácilmente observable, y la velocidad de saturación, que también es relativamente fácil de observar. En este sentido, parece que la estimación del parámetro de la función de Akcelik es aún más factible de obtener que en el caso de las otras funciones de volumen-demora.

Finalmente, cualquiera que sea la función volumen-demora que se utilice en la modelación, conviene siempre comparar los resultados del modelo de asignación con información de flujos reales observados en las carreteras.

En México se dispone de la información de flujos en encuestas origen-destino que realiza la Dirección General de Servicios Técnicos de la SCT que se publica en las series de Datos Viales, y que son una referencia básica para comparar los flujos pronosticados en modelos de asignación contra los flujos reales medidos en campo. Esta información es de carácter anual, y por lo pronto sólo puede usarse para estimaciones de flujos de asignación de movimientos anuales.

Cabe notar que al usar la referencia de los Datos Viales que se menciona, en particular con los movimientos del transporte de carga, se acepta implícitamente que los usuarios eligen libremente las rutas en sus movimientos, en principio buscando la ruta de mejor tiempo, y esto naturalmente plantea que el modelado de asignación debe realizarse con el Equilibrio del Usuario en vez del criterio del Equilibrio del Sistema.

6 Conclusiones

La modelación de flujos en redes viales es una actividad fundamental en el análisis de sistemas de transporte carretero, en la planificación de las actividades de transporte y en última instancia en la planificación económica y social.

La calidad de la modelación de los flujos en las redes influye de manera determinante en la calidad de las estimaciones de los impactos que resultan de modificaciones en las políticas de transporte o en la organización de los sistemas de actividades.

El pronóstico de flujos vehiculares es un insumo central para el diseño y evaluación de modificaciones a las redes carreteras; resultando evidente que un buen diseño y una buena evaluación son posibles solo con un buen pronóstico, el que a su vez está condicionado por una modelación certera y confiable.

La modelación de flujos en redes viales requiere definir correctamente las funciones de volumen-demora, que representan las impedancias de viajar por los tramos de la red estudiada.

Si bien la literatura reporta diversas funciones de este tipo, tres de las más utilizadas en la práctica son a) la función del Bureau of Public Roads norteamericano, llamada Función BPR, b) la función Cónica y c) la función de Akcelik.

La función de uso más generalizado, debido a la simplicidad de su formulación, es la BPR, misma que se define mediante dos parámetros denominados α y β .

La BPR de uso general, utiliza $\alpha = 0.15$, y $\beta = 4$; sin embargo, tales valores se sugieren normalmente para ambiente urbano y por ello, otros valores para los parámetros se han reportado en la literatura en varios lugares del mundo para otros ambientes. De estos valores, las estimaciones de α y β de la BPR para autopistas y carreteras multi-carril en EE.UU. pueden orientar la elección de parámetros para México, debido a las similitudes entre los correspondientes tipos de carretera en los dos países.

El procedimiento ortodoxo para obtener estimaciones de los parámetros de las diversas funciones de volumen-demora comentadas, exige en principio hacer mediciones en campo de velocidades y flujos observados, a fin de obtener las curvas velocidad-flujo que se usan regularmente en estudios de tránsito.

Una vez obtenidos los datos correspondientes, sigue un proceso estadístico de ajuste de curvas que lleva a la estimación de los parámetros y a su uso para el

cálculo de los tiempos de recorrido en los caminos estudiados. Si bien este procedimiento puede dar buenas estimaciones de los parámetros buscados, su aplicación requiere de tiempo y recursos que suelen ser escasos, en particular en las agencias de planificación gubernamentales.

Como una alternativa a esta problemática para estimar los parámetros de las funciones volumen-demora, la interpretación de los parámetros de las funciones que se discute en este trabajo ofrece una guía de observaciones en campo que son más sencillas de obtener y que permitirían en principio estimar estos parámetros de manera más económica.

Adicionalmente, la interpretación de los parámetros de las funciones aporta conocimiento sobre su significado operacional y de la caracterización de los diversos caminos donde se aplican.

Las interpretaciones de α y β encontradas para la función BPR; así como las de α para la Cónica y de J para la Akcelik, sugieren observar las rutas de interés en el punto de saturación (nivel de servicio E) a fin de:

- Medir aumentos porcentuales del tiempo de recorrido y estimar α en la BPR.
- Estimar la elasticidad tiempo-flujo en saturación para inferir el valor β en la BPR o para estimar el valor α en la Cónica.
- Estimar tiempos o velocidades de saturación para estimar J en la Akcelik.

Estas interpretaciones permiten estimar los parámetros de interés con un número menor de observaciones que en los estudios clásicos de velocidad-flujo, lo que representa una simplificación en el proceso de calibración.

Finalmente, el uso de estas funciones de volumen-demora en los ejercicios de asignación, con las recomendaciones comentadas en este trabajo, permitirá refinar la precisión de los pronósticos de flujos en las redes estudiadas, y podrá acercarse cada vez más a los flujos observados en los conteos vehiculares reportados en los Datos Viales ya referidos en este trabajo.

Bibliografía

Akçelik, R. (1991). *Travel time functions for transport planning purposes: Davidson's function, its time-dependent form and an alternative travel time function*. Australian. Road Research 21 (3), pp. 49–59. (Minor revisions: December 2000).

Akcelik, R. (2003). *Speed-Flow Models for Uninterrupted Traffic Facilities. Technical Report*. Akcelik & Associates Pty Ltd. Australia.

Bazaraa, M.S. and Jarvis, J.J. (1977). *Linear programming and network flows*. John Wiley and Sons. New York.

Caliper Corporation. (2005). *Travel Demand Modeling with TransCAD 4.8*. Caliper Corporation. USA.

Centeno, A., Mendoza, A. (2003). Modelo de asignación intermodal multiproducto para las operaciones de carga por autotransporte y ferrocarril. Publicación Técnica 222. Instituto Mexicano del Transporte. Querétaro. México.

Gradilla, L. (2011). Planeación de infraestructura de transporte: Identificación de tramos críticos para el funcionamiento de redes carreteras. Publicación Técnica 354. Instituto Mexicano del Transporte. Querétaro. México

Kutz, Myer. (2004) *Handbook of Transportation Engineering*, Mc. Graw-Hill. USA

Lancashire County Council. (2010). *Heysham – M6 Link Road Traffic Model. Local Model Validation Report*. Appendix D. Lancashire, UK.

Moreno E., Rico O., Bustos A., Martner C. y Montooya R. (2014). *Reparto Modal Óptimo del Transporte Terrestre de Carga en México. 1ª. Etapa*. Publicación Técnica No. 413. Instituto Mexicano del Transporte. Querétaro. México

Mtoi, E. and Moses, R. (2014) *Calibration and Evaluation of Link Congestion Functions: Applying Intrinsic Sensitivity of Link Speed as a Practical Consideration to Heterogeneous Facility Types within Urban Network*. Journal of Transportation Technologies, 4, 141-149.

NCHRP.(1998). Travel Estimation Techniques for Urban Planning. Report 365. TRB. Washington, D.C.

Ortúzar, J. D. and Willumsen, L. (2011). *Modelling Transport*. 4th edition. John Wiley. Chichester. UK.

Papacostas, C.S. (1987). *Fundamentals of Transportation Engineering*. Prentice-Hall Inc. USA.

Sheffi, Y. (1985). *URBAN TRANSPORTATION NETWORKS: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*. Prentice-Hall Inc., New Jersey. USA.

Skabardonis, A. and Dowling, R. (1997). Improved Speed-Flow Relationships for Planning Applications. *Transportation Research Record No. 1572*. Transportation Research Board. Washington, D.C.

Speiss, H. (1990). Conical Volume-Delay Functions. *Transportation Science*. Vol. 24, No. 2. ORSA, Baltimore, USA.

Spiess, H. (1990) *Technical Note—Conical Volume-Delay Functions*. *Transportation Science* 24(2):153-158. <http://dx.doi.org/10.1287/trsc.24.2.153>

TRB. Transportation Research Board. (2000). *Highway Capacity Manual 2000*. National Research Council. Washington, D.C.



Carretera Querétaro-Galindo km 12+000
CP 76700, Sanfandila
Pedro Escobedo, Querétaro, México
Tel +52 (442) 216 9777 ext. 2610
Fax +52 (442) 216 9671

publicaciones@imt.mx

<http://www.imt.mx/>