ISSN 0188-7297

Certificación ISO 9001:2008 ‡

Métodos de elección discreta en la estimación de la demanda de transporte

Eric Moreno Quintero

Publicación Técnica No. 335
Sanfandila, Qro., 2011

SECRETARÍA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES

INSTITUTO MEXICANO DEL TRANSPORTE

Métodos de elección discreta en la estimación de la demanda de transporte

Publicación Técnica No. 335
Sanfandila, Qro., 2011

Esta investigación fue realizada en la Coordinación de Integración del Transporte del Instituto Mexicano del Transporte, por el Dr. Eric Moreno Quintero.

Se agradecen la revisión y las sugerencias del Dr. Carlos Martner, Coordinador de Integración del Transporte; así como los comentarios y el apoyo bibliográfico del M. en I. Oscar Rico, de la Coordinación de Economía de los Transportes y Desarrollo Regional.

Índice

Resumen

Aunque los métodos de elección discreta aplicados al transporte crecieron rápidamente en los años 1990 y mostraron su eficacia para estimar la demanda del transporte, las fuentes que tratan estos métodos y sus aplicaciones siguen algo dispersos en la literatura. La enseñanza universitaria del transporte suele revisar los modelos Logit y sus aplicaciones, pero generalmente sin el detalle suficiente para un uso práctico. Por ello, una referencia básica de la metodología para estimar la demanda de transporte fundamentada en estos modelos, con detalles suficientes para iniciarse en la práctica, resulta útil; particularmente para planificadores del transporte. Este trabajo revisa la teoría de utilidad subyacente al problema de la elección discreta, así como los métodos estadísticos y las aplicaciones básicas de los modelos Logit en la estimación de la demanda de transporte; muestra ejercicios numéricos y cálculos trabajados con el paquete estadístico JMPv.9.0 y el complemento Solver de Excel. Este trabajo es introductorio, pero suficiente para familiarizarse con las elecciones discretas y modelar completamente situaciones sencillas de transporte. En el futuro, se extenderá el enfoque hacia los modelos Logit anidados, el diseño experimental, el valor del tiempo, los modelos Probit y otros temas avanzados de la estimación de la demanda.

Abstract

Even though discrete choice methods applied to transport grew rapidly in 1990, showing its effectiveness in estimating the transport demand, the sources explaining these methods and their applications are still somewhat scattered in the literature. University education often raises the Logit models and their applications to transport, but usually without sufficient detail for practical use. Therefore, a reference methodology for estimating transport demand based on these models, with enough detail to start the practice is useful, particularly for transport planners. This work reviews the underlying utility theory into the problem of discrete choice, as well as the statistical methods and the basic applications of Logit models in the estimation of transport demand. Numerical calculations and excercises are shown using the statistical package JMPv.9.0 and the Solver routine in Excel. This work is introductory, but enough to become familiarized with the discrete choice model fully in simple situations of transport. In the future, will widen the focus to the nested Logit models, experimental design, the value of time, Probit models, and other advanced issues of demand estimation.

Resumen ejecutivo

En la planeación del transporte, tanto de pasajeros como de carga, estimar la demanda del servicio es un componente indispensable para anticipar acciones y medidas de control que mejoren el desempeño de los sistemas de transporte y disminuyan sus impactos no deseados.

Por varios años, y todavía en la década de los ochenta, los pronósticos de demanda se basaron en métodos estadísticos que trabajaban con datos agregados de los usuarios del servicio. Tras observar las decisiones de los viajeros y sus respuestas a cambios en tarifas, tiempos de recorrido, etc.; los analistas buscaron explicar los atributos del servicio que determinaban las decisiones de los viajeros usando métodos estadísticos clásicos como la regresión lineal múltiple. Este enfoque, basado en observaciones de las acciones de los usuarios, es conocido como de *preferencias reveladas*; y si bien fue un primer paso en la estimación de la demanda, tuvo varias desventajas: la necesidad de colectar enormes cantidades de datos, la dificultad de conocer características de las opciones de transporte no elegidas por los viajeros o la dificultad de estimar las reacciones de los usuarios a la introducción de servicios nuevos que nunca habían sido ofrecidos.

A finales de los años setenta –y durante la década siguiente– surgió un enfoque diferente, basado en técnicas de investigación de mercados para averiguar las preferencias de los usuarios del transporte; este enfoque es conocido como de *preferencias declaradas*, pues se basa en encuestas hechas a los viajeros en el sistema de transporte. Con esta perspectiva fueron resueltas muchas de las limitaciones de las estimaciones agregadas que tuvieron en el caso de las preferencias reveladas; y aunque al principio los pronósticos logrados no fueron muy buenos, ya en la década de los años noventa la mejora en las técnicas estadísticas y en el diseño de cuestionarios mejoraron significativamente las estimaciones de demanda obtenidas. La característica básica de este enfoque es que los datos individuales de cada viajero son utilizados directamente.

La base teórica que sustenta el enfoque de preferencias declaradas es la modelación de elecciones discretas de los usuarios del transporte. Este tipo de modelos trata de reproducir el comportamiento de los viajeros que eligen frente a un número finito de opciones de viaje por algún motivo concreto (ir al trabajo, a la escuela, de compras, etc.), de manera que la demanda del sistema viene a ser el resultado de la suma de las elecciones individuales que hacen los viajeros.

Cuando se logra construir un modelo de elecciones discretas que representa razonablemente el proceso de toma de decisiones de los viajeros, entonces los usuarios que el modelo pronostique para las distintas posibilidades de viaje pueden sumarse para estimar el uso agregado de cada una de esas opciones.

Los tres elementos básicos de un modelo de elecciones discretas son:

1. Identificar opciones de viaje disponibles y conocidas por el viajero que decidirá.
2. Identificar variables que influyen en la decisión de viajar; p. ej. el tiempo de viaje, la tarifa, el número de transbordos, etc., relacionadas con el viaje, y además variables socioeconómicas (sexo, edad, ingreso, etc.) que caractericen a los usuarios.
3. Un modelo matemático que represente las elecciones del usuario en función de las variables que afectan su decisión de viajar.

Los dos primeros elementos pueden ser integrados con relativa facilidad.

El tercer elemento requiere de hipótesis apropiadas para representar la toma de decisiones de los viajeros. Lo primero que considera un modelo de elecciones del usuario es que cuando este elige una opción, manifiesta preferencia por lo elegido. Así, por ejemplo, si un usuario va a viajar en autobús en vez de usar su automóvil, muestra una preferencia por el transporte público.

Las preferencias del usuario en sus elecciones ante un conjunto de opciones dependen de los atributos de dichas opciones y de las características del propio usuario. Por ejemplo, los atributos del viaje que influyen en la decisión del usuario pueden ser el tiempo del viaje, el costo o la confiabilidad de los itinerarios; mientras que las características del usuario que influyen en sus preferencias pueden ser: edad, sexo, ingreso o posesión de automóvil.

Entonces, siendo la elección del usuario una muestra de sus preferencias, el modelo matemático se centra en las preferencias de los viajeros ante las opciones para viajar. El marco teórico adecuado para este fin es la Teoría de Utilidad, en el campo de la Economía, cuyo supuesto básico del comportamiento humano es que el valor de una decisión depende del bienestar que da o de la molestia que evita, que en términos económicos es la cantidad de *utilidad generada por la decisión*. Consecuencia de lo anterior es la hipótesis de que los usuarios del transporte siempre buscarán maximizar la utilidad derivada de las distintas opciones que enfrentan al tomar una decisión.

Este trabajo hace una revisión de las ideas básicas para familiarizarse con el tema de la estimación de la demanda con el enfoque de la maximización de la utilidad del viajero y el contexto probabilista de los modelos Logit, a fin de tener un documento que permita a los interesados en la aplicación de estas técnicas iniciarse en los detalles prácticos de su uso.

En el Capítulo 1 se resumen los antecedentes de los esfuerzos de modelación de la demanda de transporte a finales del siglo XX, y se presentan los enfoques de *preferencias reveladas* y *preferencias declaradas* que sustentan distintos métodos de estimación de demanda, así como las ideas fundamentales necesarias para desarrollar modelos de elección discreta, los cuales han mostrado su utilidad y su mayor alcance en términos de precisión de estimación en comparación con los métodos tradicionales utilizados en la década de los años ochenta.

En el Capítulo 2 se describen las ideas básicas para construir modelos de elección discreta. La sección 2.1 parte del principio de que los flujos de pasajeros en un sistema de transporte resultan de las elecciones de los viajeros, y que estos siempre maximizan la utilidad que les da el viaje (o en su defecto siempre minimizan los inconvenientes).

El principio de maximización de utilidad se vuelve operativo con la función de utilidad, una función matemática que representa las preferencias de los viajeros del sistema.

El valor numérico de esta función depende de los atributos de la opción de viaje considerada y de las características del individuo que decide. La propiedad de la función de utilidad que permite representar las preferencias del usuario está en que si su valor numérico para una opción de viaje “a” es mayor que el correspondiente a la opción de viaje “b”, entonces el individuo preferirá la opción “a” sobre la “b”; y viceversa, si el individuo prefiere la opción de viaje “x” sobre otra “y”, entonces la función de utilidad tendrá un valor mayor evaluada en “x” que evaluada en “y”. Ante la presencia de un número finito de opciones, el individuo elegirá la que tenga el mayor valor de la función de utilidad.

Los elementos de modelación de las preferencias con una función de utilidad son:

a) el conjunto de alternativas disponibles **A**, con las opciones de viaje conocidas y disponibles para el usuario (automóvil, taxi, tren, etc.). Cada opción “j” del conjunto **A** tiene un conjunto de atributos $\mathbf{X}_j$ que la determinan (tiempo de viaje, costo, etc.).
b) el conjunto de atributos **S** del individuo que elige y que son relevantes para la decisión como: edad, sexo, ingreso anual, número de automóviles poseídos, etc.

Con el principio de maximización de utilidad, se busca una función U que dependa tanto de los atributos de las opciones del conjunto **A** como de los atributos **S** del individuo que decide, y tal que para cualquier par de opciones *j*, *k* del conjunto **A** la siguiente relación:

$$U(X_j , S) > U(X_k , S)$$

indica que el usuario prefiere la opción *j* a la *k* y por tanto elegirá *j* si debe escoger entre ambas. Cuando elige entre varias opciones de **A**, elegirá la opción *j* siempre que se cumpla que: $U(X_j , S) > U(X_k , S)$ para todas las opciones *k* en **A**.

Para que la función de utilidad U(X_j , S) sea consistente, debe ser la misma para todas las opciones en **A**, con valores numéricos distintos para los distintos atributos $\mathbf{X_j}$ de las opciones en **A**; aunque puede haber coincidencia de valores para dos atributos $\mathbf{X}_j$ y $\mathbf{X}_{k,}$ en cuyo caso habrá indiferencia en la elección de ambas opciones; además, para una opción *j* dada, el valor numérico de U(X_j , S) debe depender sólo de los atributos X_j y S de la propia opción y del individuo, y no depender de los atributos de otras opciones en **A**.

Con la función de utilidad se visualiza la dependencia entre las preferencias y las elecciones de los viajeros y los atributos tanto del viaje como de las características socioeconómicas de los usuarios; además de que permite pronosticar las reacciones de los usuarios ante cambios de los atributos en las opciones de viaje (cambios en tiempos de viaje, tarifas, etc.).

Una función de utilidad para modelar las elecciones de los usuarios de un sistema de transporte no es única, Cualquier función matemática que represente numéricamente el orden de preferencias del viajero servirá como función de utilidad y dará las mismas predicciones de elección del usuario, independientemente del valor numérico o del signo que resulten de su fórmula analítica. Con la información de las funciones de utilidad aplicadas a los individuos se pueden obtener resultados agregados para pronosticar el comportamiento colectivo de los usuarios de un sistema de transporte; los ejemplos numéricos en la Sección 2.1 ilustran algunos casos.

Extendiendo el enfoque de modelación descrito con el principio de maximización de utilidad, en la Sección 2.1 se sigue con el enfoque probabilístico, el cual resuelve las contradicciones que se surgen con el uso de la función de utilidad cuando dos usuarios identificados con exactamente los mismos atributos de viaje, clasificados con las mismas características socioeconómicas y decidiendo ante un mismo conjunto de opciones eligen de modo distinto. O también cuando un mismo individuo enfrentado en ocasiones distintas a las mismas opciones de viaje, elige de manera diferente en cada ocasión.

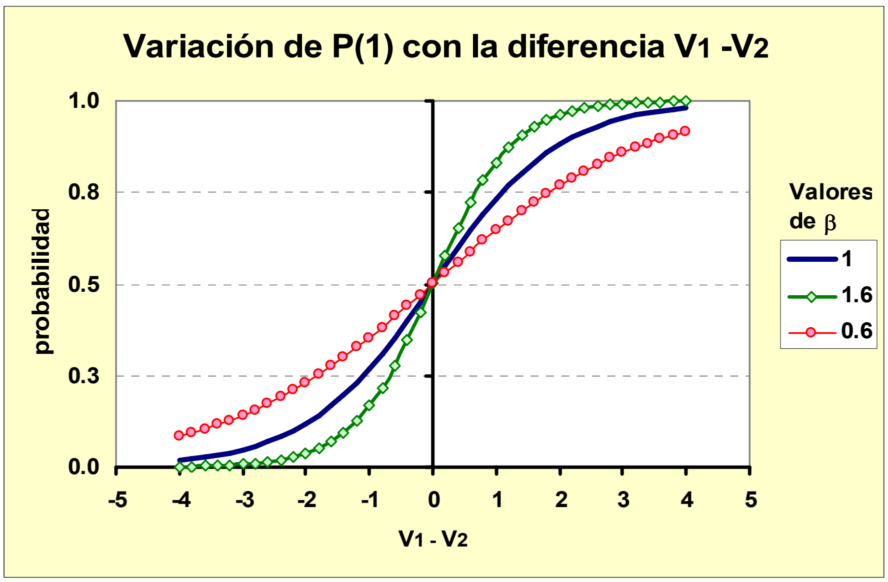
Luego de revisar algunas razones por las que los viajeros muestran variaciones que parecen contradictorias en sus elecciones, se discute la idea de utilidad aleatoria, que extiende el concepto de función de utilidad sumando un término de error para representar todos los factores no conocidos por el analista y que influyen en la decisión del viajero.

Ya con este concepto de utilidad aleatorio se prosigue en la Sección 2.2 con los modelos Logit, que son la versión probabilista de modelos de elección discreta más difundida en la literatura, y la que ha tenido más aplicaciones prácticas.

Comenzando con el modelo Logit binomial, para la elección entre dos opciones*"1"* y *"2"*, se revisa el modelo de elección que resulta ser una densidad logística donde la probabilidad de elegir la opción "1" es:

$$P(1) = \frac{e^{\beta V_1}}{e^{\beta V_1} + e^{\beta V_2}} = \frac{1}{1 + e^{-\beta(V_1 - V_2)}}$$

La gráfica de esta densidad tiene la forma de una “S” alargada y mapea el dominio de la variable ($V_1 - V_2$) que es la diferencia de utilidades entre la opción “1” y la opción “2”, sobre el intervalo [0, 1] que representa la probabilidad medida. Dependiendo del valor del parámetro β se obtienen distintas curvas como se ve en la siguiente gráfica.



En estas gráficas se ve que cuando $V_1 - V_2 = 0$, indicando que la utilidad de ambas opciones es la misma, la probabilidad de elegir la opción “1” es 0.5, que corresponde a la situación de indiferencia frente a la opción “2”. A medida que la diferencia $V_1 - V_2$ toma valores positivos cada vez mayores, la utilidad de la opción “1” resulta cada vez mayor comparada a la de la opción “2”, y la probabilidad de elegir la opción “1” tiende a uno; y viceversa, cuando la diferencia $V_1 - V_2$ toma valores negativos indicando que la opción “2” tiene mejor utilidad que la “1”, la probabilidad de elegir la opción “1” disminuye, aproximándose a cero. Este es el comportamiento esperado de un modelo de elecciones discretas, y es consistente con el principio de maximización de utilidad.

Prosiguiendo con el modelo Logit, se revisa luego el caso multinomial, en el cual hay N opciones, con utilidades sistemáticas V_1, V_2,…, V_N, y en el que la probabilidad de elegir la opción “*j*” es:

$$P(j)=\frac{e^{V_j}}{\sum_{k=1}^{N}e^{V_k}}=\frac{e^{V_j}}{e^{V_1}+e^{V_2}+...+e^{V_N}}=\frac{1}{1+e^{(V_j-V_1)}+e^{(V_j-V_2)}+...+e^{(V_j-V_N)}}$$

Con este modelo Logit multinomial, la sección 2.2 continúa con varios ejemplos numéricos de cálculo de probabilidades, de estimaciones agregadas de reparto porcentual de usuarios entre las opciones y de pronóstico de cambios en estos porcentajes ante cambios en los atributos del viaje, como p. ej. el aumento en el costo de combustibles. Otro ejemplo mostrado es el caso de la introducción de una alternativa nueva; es una de las ventajas que tienen estos modelos Logit, ya que permiten pronosticar comportamientos de usuarios en circunstancias donde no existen datos históricos debido a la novedad de dicha alternativa.

La sección 2.2 concluye revisando la introducción de constantes específicas para alternativas, que se usan para refinar el modelo de elección agregando constantes que determinen mejor la influencia de alguna opción particular; como es el caso en el que se compara la elección entre automóvil particular y transporte público considerando a los individuos que poseen automóvil y a los que no lo tienen. También se revisa una propiedad importante de los modelos Logit, que es la *independencia de las alternativas irrelevantes*, descrita por Luce y Suppes (1965) como sigue:

"Siempre que dos alternativas tengan probabilidades positivas de ser elegidas, la razón de una probabilidad a la otra permanece inalterada por la presencia o ausencia de cualquier otra alternativa adicional en el conjunto de opciones disponibles".

El capítulo 2 continúa con la Sección 2.3 que trata del desarrollo de las variables utilizadas en los modelos Logit; la conveniencia de desagregar los tiempos de viaje en el tiempo que el usuario viaja más los tiempos de acceso a paradas o terminales más los tiempos de espera. Esta sección muestra algunos ejemplos numéricos. Finalmente, el capítulo concluye con la Sección 2.4 en la que se discuten los detalles prácticos para determinar el conjunto de opciones que se puede utilizar en la modelación y muestra ejemplos numéricos de diversos cálculos con distintos conjuntos de opciones.

En el Capítulo 3, la Sección 3.1 aborda la cuestión de la estimación de los parámetros, comenzando con una discusión sobre el contexto estadístico del modelo y la necesidad de cambiar a un enfoque distinto al usado en la típica regresión lineal por mínimos cuadrados.

Luego de esta discusión, en la Sección 3.2 se analiza el proceso de estimación que se utiliza en los modelos Logit, que es el método de máxima verosimilitud, orientado a maximizar la función de densidad conjunta que depende de los parámetros β_1, β_2,…, β_j de un modelo Logit multinomial; en la cual se introducen los datos de la muestra obtenida de la población de usuarios para hacer el ajuste.

Se define la *función de verosimilitud L* de los atributos x_k de la muestra en función de los parámetros β^* como:

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \beta^*) = \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{1 + e^{\beta^*(V_j - V_1)} + e^{\beta^*(V_j - V_2)} + ... + e^{\beta^*(V_j - V_N)}}$$

Y se plantea el proceso de estimación como un problema de maximización no lineal que da como resultado los parámetros β^* que ajustan el modelo Logit:

$$Max_{\beta^*} \ \log L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \beta^*) = \log\left[\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{1 + e^{\beta^*(V_j - V_1)} + e^{\beta^*(V_j - V_2)} + ... + e^{\beta^*(V_j - V_N)}}\right]$$

Se muestran algunos ejemplos numéricos de ajuste de parámetros utilizando el módulo *Solver* de Excel para resolver el problema de optimización no lineal planteado en un modelo Logit binomial y en uno que incluye una constante específica de un reparto modal entre automóvil y autobús.

Continuando en la Sección 3.3, los resultados se comparan con los que da el módulo de regresión logística del paquete estadístico JMP v.9.0, en el cual se obtienen además criterios de bondad de ajuste estadística, como es la estadística de Wald y el porcentaje de aciertos entre elecciones pronosticadas contra elecciones observadas en la muestra.

Se discute también la significancia de los parámetros β^* estimados en el modelo y se dan criterios básicos para decidir la inclusión o exclusión de las variables en el modelo en atención al nivel de significación de sus parámetros estimados.

La sección 3.3 concluye con una serie de recomendaciones prácticas en la estimación de los parámetros del modelo, para evitar errores comunes en la construcción de este, como es el caso de tener demasiadas constantes específicas de opciones; la especificación inadecuada de las variables socioeconómicas que describen a los usuarios o el problema de la colinealidad perfecta entre variables incluidas en el modelo.

En el capítulo 4 se muestran algunas aplicaciones de los modelos de elección discreta. La sección 4.1 trata la cuestión de aplicar estos modelos al problema de elegir ruta en un sistema de transporte y al problema de elegir la hora de partida para un viaje.

En cada caso se mencionan los aspectos esenciales que deben ser considerados para modelar adecuadamente estos problemas de elección discreta y se sugieren factores convenientes para incluir en el proceso de modelado.

La sección 4.2 continúa con la revisión de los métodos para producir pronósticos agregados a partir de la información de elecciones discretas que proporcionan los modelos Logit. Estos pronósticos agregados son de gran interés para los analistas y modeladores del transporte, pues proporcionan las estimaciones básicas para propósitos de planeación de los sistemas de transporte. En esta sección se muestran algunos ejemplos numéricos de estimaciones agregadas con base en información de las elecciones individuales de los viajeros.

Es con estas estimaciones de las decisiones agregadas que se pueden prever el uso de los sistemas, sus dimensiones, su mejora; y en casos de servicios nuevos, la utilización potencial de los servicios y la magnitud esperada de recursos necesarios para operar eficientemente los servicios de transporte ofrecidos.

La sección 4.2 concluye con un resumen breve de métodos de pronóstico agregado con base en información de los modelos de elección discreta, recomendaciones de su uso según el caso que exista de disponibilidad de datos y algunos ejemplos numéricos ilustrativos.

Finalmente, en el Capítulo 5 se resumen los puntos principales de la revisión hecha en esta investigación y se dan sugerencias para trabajos futuros que continúen el tema con aspectos más avanzados.

1 Introducción

1.1 La estimación de la demanda de transporte

En el proceso de estimación de la demanda, los planificadores encuentran frecuentemente situaciones donde los usuarios del servicio deciden entre diversas opciones. Por ejemplo, quien va al trabajo decide entre usar automóvil propio o ir en transporte público; viaja a otra ciudad escogiendo entre autobús o avión; o envía carga ya sea por camión o por ferrocarril.

El planificador del sistema de transporte se interesa en el modo en que los usuarios eligen las alternativas, tanto para estimar el impacto de sus decisiones como para influir en ellas y así racionalizar el uso de recursos. Las campañas para reducir el uso del automóvil en favor del uso de transporte público; para diferir el uso del transporte público durante las horas pico o para transferir carga del autotransporte hacia el ferrocarril son ejemplos de esto.

La idea básica en cualquier esfuerzo para estimar la demanda de transporte es averiguar los factores que influyen en las decisiones de los usuarios y obtener datos adecuados para así anticipar en cierta medida las reacciones de estos usuarios, a los cambios en estos factores de decisión. Para ello es conveniente iniciar identificando las opciones que se le presentan a los usuarios de los sistemas de transporte (p. ej. taxi, autobús urbano, metro, automóvil propio) y los atributos que las caracterizan (tiempo de tránsito, costo, comodidad, seguridad, núm. de transbordos), para tener claro el panorama de decisiones que enfrentan los viajeros.

Desde el inicio de los estudios de transporte en la década de los años sesenta y hasta la década de los años ochenta, los modelos de demanda estaban basados en datos observados sobre las decisiones tomadas por los usuarios de los sistemas de transporte. Del seguimiento a las elecciones de los usuarios en sus viajes cotidianos o de sus reacciones a los cambios de tarifas, frecuencias de viaje, tiempos de recorrido, oferta de rutas, etc.; los analistas trataron de explicar los atributos del servicio de transporte que influenciaban las decisiones de los usuarios. Este enfoque se conoce como *preferencias reveladas*, ya que se basa en la observación de las elecciones de los usuarios en el uso de los sistemas de transporte en operación y en los cambios que ocurren en ellos.

Con este enfoque se obtienen medidas agregadas del comportamiento de los usuarios del transporte: matrices de origen-destino por modo de transporte, cuotas porcentuales de participación de los distintos modos en el movimiento de pasajeros, viajes promedio por persona a la semana, valores promedio de posesión de automóvil, etc.

Cabe señalar que en este enfoque, la observación directa del comportamiento de los usuarios no es algo fácil de lograr; más bien se dispone de encuestas con las respuestas de estos usuarios acerca de las decisiones que ya tomaron, o las que acostumbran tomar cuando utilizan los sistemas de transporte. Las observaciones que podemos obtener de contadores mecánicos o electrónicos, o de los boletos usados en el transporte pueden ser de alguna utilidad; pero estas observaciones no pueden dar información más detallada sobre las características del usuario (sexo, edad, nivel de ingreso, etc.) que pudieran auxiliar en el proceso de modelación de las decisiones de los viajeros.

Y aunque es de sentido común observar las decisiones de los usuarios ante las opciones ofrecidas por los sistemas de transporte en operación, o sus reacciones a variaciones en el servicio, la colecta de este tipo de datos tiene varias limitaciones. Entre estas se tienen (Ortúzar, 2000):

- El costo de las encuestas origen-destino que deben cubrir a un gran número de entrevistados
- La dificultad de detectar la influencia que ejercen en la decisión de los usuarios factores que no son directamente medibles, como es la calidad del servicio, o la comodidad del viaje
- La imposibilidad de saber características de las alternativas que no fueron escogidas
- La aparición frecuente de fuertes correlaciones entre las variables explicativas más relevantes (p. ej. costo del viaje y tiempo de viaje) que impiden desarrollar buenos modelos de pronóstico por la escasa variabilidad que tienen estos atributos tomados independientemente
- La dificultad de obtener datos para estimar las elecciones que harán los usuarios ante nuevos servicios de transporte que están apenas en su etapa de planeación y aún no existen ni operan

A finales de los años setenta, aparecieron en la literatura del transporte los primeros trabajos con el enfoque alternativo de las *preferencias declaradas*, basadas en técnicas de investigación de mercado que fueron llevadas al campo del transporte.

En este enfoque, se puede experimentar con diversos escenarios para elegir alternativas hipotéticas de transporte que se plantean al entrevistado para conocer sus preferencias. Las opciones presentadas al usuario pueden corresponder a situaciones reales en un sistema de transporte en operación o a situaciones hipotéticas de servicios que aún no se implementan, pero que pueden ser de su interés. La respuesta del usuario puede ser indicando el orden de su preferencia por las opciones (de la más deseada a la menos atractiva); dando una calificación a cada opción para indicar la intensidad de su preferencia o simplemente eligiendo la opción más atractiva de las presentadas. Los usuarios considerados pueden ser individuos que eligen personalmente sus opciones de viaje o grupos de personas que viajan juntos, como pueden ser empleados de una misma empresa, estudiantes que van a la misma escuela o familias que organizan sus viajes cotidianos.

Con este enfoque se resuelven varias de las limitaciones de las preferencias reveladas, ya que la cantidad de entrevistas requeridas suele ser menor, se pueden investigar las preferencias para servicios de transporte futuros que apenas están en proyecto y es posible también plantear cuestionarios que permitan identificar con más claridad la influencia que tienen en las elecciones de los usuarios factores que no se miden fácilmente, como es la conveniencia de un servicio (p. ej., que haya rutas escénicas, que circule en vías con poco congestionamiento), la seguridad (p. ej. la ausencia de carteristas en el transporte público, la seguridad de evitar choques) o el confort para el viajero (p. ej. el tipo de asiento o la temperatura dentro del vehículo).

El esquema general del enfoque de preferencias declaradas consta de los siguientes elementos:

- Se basa en las respuestas que los entrevistados dan a planteamientos de cómo actuarían ante diversas opciones ofrecidas por el sistema de transporte.
- Cada opción se presenta como un paquete de distintos atributos del viaje; como puede ser la tarifa, el tiempo de viaje, la seguridad, la comodidad, el número de transbordos, etc.
- La entrevista plantea las opciones hipotéticas de manera que el efecto de cada atributo individual del servicio pueda estimarse; para esto se utilizan técnicas de diseño experimental que ayudan a manejar las variaciones de los atributos con independencia estadística.
- El planteamiento de las opciones hipotéticas del servicio se hace de modo que el entrevistado las entienda claramente, le resulten realistas y sean cercanas a su experiencia cotidiana del sistema de transporte.

Una limitación importante en el enfoque de preferencias reveladas es que los entrevistados pudieran dar respuestas poco realistas de sus reacciones motivadas por un exagerado optimismo; de modo que ante las opciones planteadas, sus verdaderas elecciones no serían precisamente lo que dijeron que harían. Este problema se presentó con frecuencia al inicio del uso de esta metodología, en la década de los años setenta, en la que varios estudios basados en preferencias reveladas encontraron que alrededor de la mitad de los entrevistados tomaron decisiones distintas a las que dijeron que tomarían conforme a sus respuestas.

Otras limitaciones reportadas en la literatura son: el *sesgo de afirmación*, cuando el entrevistado ya sea con conciencia o no declara preferencias que a su juicio son las que el entrevistador desea recibir; el *sesgo de racionalización*, cuando el entrevistado da respuestas sesgadas en un intento de racionalizar sus propias acciones; el *sesgo de política* cuando el entrevistado intencionadamente responde para apoyar decisiones políticas que él piensa que resultarán de la encuesta (Ortúzar, 2000).

Estas limitaciones han sido superadas ampliamente mediante refinamientos de las técnicas estadísticas aplicadas en las encuestas de preferencias reveladas y que se desarrollaron en la década siguiente, cuando empezaron a surgir reportes que indicaban resultados bastante buenos en los pronósticos basados en las respuestas de los entrevistados.

Las mejoras en estos estudios se debieron –entre otras cosas– a la organización de las encuestas y al uso de métodos de diseño experimental que aseguraron que las variaciones en los atributos de las opciones presentadas al usuario fueran estadísticamente independientes unas de otras, en lo que se conoce como un *diseño ortogonal*.

Con esta metodología mejorada se han logrado buenos pronósticos de las preferencias de los usuarios del sistema de transporte respecto a:

- Modo de transporte usado (automóvil, autobús, avión, taxi, etc.)
- Ruta (de cuota, sin peaje, ruta segura, ruta escénica, etc.)
- Hora de inicio del viaje
- Destino del viaje (p. ej. para ir de compras, de vacaciones, etc.)
- Ubicación física (del hogar, del trabajo, de la escuela)
- Tipo de boleto (1ª clase, clase económica, de lujo)
- Operador del servicio
- Tipo de vehículo
- Frecuencia del servicio

De los pronósticos de las preferencias de los usuarios, al sumar a los que se deciden por cada opción posible, se obtienen estimaciones agregadas para dichas opciones.

1.2 El enfoque de la elección discreta

La idea central en el enfoque de elección discreta es que la demanda que tiene un sistema de transporte es el resultado de las elecciones que hacen los usuarios de las distintas opciones disponibles para viajar en ese sistema. Entre las elecciones que hacen los usuarios están el modo de transporte (automóvil, autobús, taxi, etc.); la ruta por usar; la hora o el destino del viaje (p. ej. para ir de compras, para ir a un cine o teatro, para ir a la escuela, etc.)

Para estimar la demanda de transporte se requiere de un modelo que represente razonablemente el proceso de toma de decisiones de los usuarios ante las opciones que tiene para viajar. Si el modelo de elecciones de los usuarios es adecuado, entonces los usuarios que el modelo asigne a las distintas opciones pueden ser sumadas para obtener las estimaciones agregadas del uso que tendrá cada una de esas opciones de viaje.

La construcción de un modelo de elecciones de los usuarios requiere tres elementos básicos:

1. La identificación de las opciones de viaje que estén disponibles y que sean conocidas por el usuario que tomará la decisión de viaje.
2. La identificación de variables que presumiblemente influyan en la decisión de viajar; como pueden ser el tiempo de viaje, el costo del servicio, el número de transbordos, etc., relacionadas con el propio sistema de transporte; y además variables socioeconómicas (sexo, edad, ingreso, posesión de automóvil, etc.) que caractericen a los distintos tipos de usuarios del sistema.
3. Un modelo matemático que represente las elecciones del usuario en función de las variables que afectan su decisión de viajar.

Los dos primeros elementos suelen integrarse sin mucha dificultad con la experiencia de analistas del sistema de transporte que tengan un conocimiento cotidiano del servicio.

El tercer elemento requiere de supuestos teóricos razonables y realistas para representar adecuadamente el proceso de toma de decisiones de los usuarios del sistema de transporte. El primer aspecto que debe considerar un modelo de elecciones del usuario es que cuando escoge una opción concreta, está manifestando una preferencia por esa opción. Así, por ejemplo, si un usuario toma el autobús para ir al trabajo –en vez de usar su automóvil– está indicando una preferencia por el transporte público.

Hay que notar que las preferencias manifestadas por el usuario en su elección están relacionadas con la circunstancia concreta que lo afecta y no con un mundo ideal sin restricciones; en el ejemplo anterior de la elección de autobús para ir al trabajo, antes de concluir que el usuario se guía por criterios ambientales o de reducción de la congestión, bien pudiera ser que su presupuesto reducido le impida pagar la gasolina que consumiría su automóvil o el gasto de estacionamiento.

Las preferencias manifestadas por el usuario en sus elecciones ante un conjunto de opciones dependen de los atributos que tienen estas y de las características del propio usuario. Así, atributos de las opciones de viaje que influyen en la decisión del usuario pueden ser el tiempo del viaje, su costo, la comodidad, la seguridad o la confiabilidad de los itinerarios; mientras que las características del usuario que influyen en sus preferencias pueden ser: edad, sexo, ingreso anual o posesión de automóvil

Entonces, siendo la elección del usuario una manifestación de sus preferencias, es pertinente dirigir el esfuerzo hacia la modelación de preferencias de los individuos ante las opciones que se les presentan para decidir.

Un marco teórico que resulta adecuado para este propósito es la Teoría de Utilidad. Esta teoría surgió en el ambiente de los economistas y se basa en una vieja postura filosófica del comportamiento humano, con el supuesto de que el valor de una decisión depende de la cantidad de bienestar que proporciona o de la cantidad de molestia que evita, lo que en términos económicos es la cantidad de *utilidad generada por la decisión*.

Consecuencia directa de esta idea es la hipótesis de que los consumidores (usuarios del transporte en nuestro caso) siempre buscarán maximizar la utilidad que pueden derivar de las distintas opciones que enfrentan al tomar una decisión. Esta posición es la que ha fundamentado el desarrollo de la teoría económica del consumidor, y del análisis de utilidad que se emplea en la Teoría de Decisiones (AmosWEB GLOSS*arama, 2010).

En los capítulos siguientes se describen las bases teóricas del enfoque de preferencias reveladas y los aspectos básicos del proceso de estimación de los parámetros de distintos modelos de elección que son de uso común en esta metodología.

2 Modelos de elección discreta

2.1 El modelado de las elecciones discretas

La modelación de la demanda de transporte parte de la premisa de que los flujos de pasajeros del sistema de transporte son el resultado de las elecciones que hacen los usuarios del sistema, ya sea como individuos o como grupos de decisión colectiva (familias, alumnos de escuelas, empleados de una empresa, etc.).

Estas elecciones pueden ser –por ejemplo– del modo de transporte por usar, la ruta, el destino o la hora en que se hará el viaje. Adicionalmente se supone que los usuarios del sistema de transporte toman decisiones racionales y expresan sus preferencias de viaje buscando maximizar la utilidad que les proporciona el viaje (o, en su defecto, minimizando los inconvenientes de realizar el viaje).

La aplicación del principio de maximización de la utilidad de los usuarios que eligen conforme a sus preferencias requiere del concepto de función de utilidad. La función de utilidad de un usuario es una función matemática cuyo valor numérico depende tanto de los atributos de la opción de viaje por considerar como de las características del individuo que decide. Esta función refleja el manejo de las preferencias del usuario por la propiedad de que si su valor numérico para la opción de viaje “a” es mayor que su valor numérico para la opción de viaje “b”, entonces el individuo preferirá la opción “a” sobre la “b”; y viceversa, si el individuo prefiere una opción de viaje “x” sobre otra “y”, entonces la función de utilidad tendrá un valor mayor evaluada en “x” que evaluada en “y”.

De este modo, la función de utilidad toma valores que se comportan conforme a las preferencias del usuario; y ante la presencia de un número finito de opciones, el individuo elegirá la más preferida, que es la que tiene el mayor valor de la función de utilidad.

Para trabajar con una función de utilidad se requiere definir los siguientes elementos:

a) el conjunto de opciones disponibles **A**, que contiene las opciones de viaje conocidas y que están disponibles para el usuario (automóvil propio, taxi, autobús, etc.). Cada opción “j” del conjunto **A** tiene asociado un conjunto de atributos $\mathbf{X}_j$ que la determinan (tiempo de viaje, costo, comodidad, etc.).

b) el conjunto de atributos **S** del individuo que hace la elección y que son relevantes para la toma de decisiones; estos suelen ser: edad, sexo, ingreso anual, número de automóviles poseídos, etc.

Siguiendo el principio de maximización de la utilidad, se busca una función U que depende tanto de los atributos de las alternativas del conjunto **A** como de los atributos **S** del individuo que toma la decisión de viaje y con la propiedad de que para cualquier par de opciones *j*, *k* del conjunto **A** la relación:

$$U(X_j , S) > U(X_k , S)$$

indica que el usuario prefiere la opción *j* a la opción *k* y por tanto elegirá *j* si debe escoger entre ambas. Cuando el individuo debe elegir entre varias opciones de **A**, elegirá la opción *j,* siempre que se tenga la relación: $U(X_j , S) > U(X_k , S)$ para todas las opciones *k* en **A**.

Para que la función de utilidad $U(X_j , S)$ sea consistente, debe ser la misma para todas las opciones en **A**, dando en general valores numéricos distintos para los distintos atributos $\mathbf{X_j}$ de las opciones en **A**; aunque pueden coincidir valores para dos atributos $\mathbf{X}_j$ y $\mathbf{X}_k$ en cuyo caso habrá indiferencia en la elección de ambas opciones; además, para una opción *j* dada, el valor numérico de $U(X_j , S)$ debe depender solamente de los atributos X_j y S de la propia opción y del individuo, y no depender de los atributos de otras opciones en **A**.

El siguiente ejemplo sencillo ilustra la forma en que una función de utilidad refleja las decisiones de los viajeros, considerando los atributos del viaje y las características de estos usuarios. Dos atributos básicos del viaje son el costo de este y el tiempo del traslado; una característica básica que distingue a los usuarios es su ingreso anual. Idealmente, todo viajero quisiera tener costos bajos y tiempos cortos en el viaje; sin embargo, ambas características no suelen estar juntas en los modos de transporte.

Suponiendo el viaje diario al trabajo, con una función de utilidad que dependa del costo *c* del viaje en pesos, del tiempo *t* del traslado en horas y del ingreso anual *I* del viajero en miles de pesos; la siguiente expresión:

$$U(c, t, I) = -0.5t - 2c/I \qquad \dots(1)$$

expresa la utilidad del viaje. Los signos negativos del tiempo y del costo indican la inconveniencia de estos atributos; y el cociente *c / I* mide la proporción del ingreso anual que representa el costo del viaje. Así, viajes más largos serán menos preferidos; y por otra parte, individuos con mayores ingresos percibirán menos inconveniencia en el costo del viaje.

Adicionalmente, con la función de utilidad en la ecuación (1) en la que dos de los atributos relevantes son el costo y el tiempo del viaje se puede estimar el valor monetario que tiene el tiempo para cada individuo; es decir, su *valor del tiempo*.

Tomando un valor fijo de utilidad U_0, en la ecuación (1), al calcular la tasa de variación del costo respecto al tiempo a través de la derivada de *c* respecto a *t* resulta:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{d\left(-I(U_0+0.5t)/2\right)}{dt} = -0.25I$$

La interpretación de esta última ecuación es que la tasa a la que el usuario intercambia su dinero (el costo del viaje) por su tiempo es proporcional a su ingreso anual. El signo negativo en la derivada refleja el hecho de que en general, tener menores tiempos al viajar implica tener mayores costos y viceversa.

El valor del tiempo resulta entonces igual al 25% del ingreso anual del individuo (expresado en miles de pesos). Así, por ejemplo, para un usuario con ingreso anual de $264 mil, el valor del tiempo es: 0.25×264 = $66/hora, mientras que para otro con ingreso anual de $96 mil, el valor del tiempo es: 0.25×96 =$24/hora. El mayor valor del tiempo para el usuario de mayor ingreso refleja la situación común de los hombres de negocios, los políticos o los personajes públicos que tienen ingresos elevados y que suelen elegir los modos de transporte más rápidos.

Suponiendo que hay tres opciones de viaje: automóvil propio, taxi colectivo o autobús con las siguientes características:

Modo	**Tiempo (hrs)**	**Costo ($)**
auto propio	0.30	18.00
taxi colectivo	0.40	15.00
autobús	0.75	6.00

al evaluar esta función de utilidad para los dos individuos del ejemplo anterior, uno con ingreso anual de $264 mil y otro con ingreso anual de $96mil, se obtienen los siguientes valores.

	Función U	
Modo	**I = $264 mil**	**I = $96 mil**
auto propio	-0.286	-0.525
taxi colectivo	-0.314	-0.513
autobús	-0.420	-0.500

La máxima utilidad del individuo con mayor ingreso es de –0.286 e indica que preferirá viajar en su automóvil propio; mientras que la máxima utilidad para el individuo de menor ingreso es de –0.500 y muestra que este usuario preferirá la opción del autobús.

Suponiendo ahora un aumento en los combustibles, que se refleje en el costo de los servicios como sigue:

Modo	Tiempo (hrs)	Nuevo costo ($)
auto propio	0.30	20.00
taxi colectivo	0.40	16.00
autobús	0.75	9.00

Al evaluar nuevamente la función de utilidad se obtiene:

	Función U	
Modo	**I = $264 mil**	**I = $96 mil**
auto propio	-0.302	-0.567
taxi colectivo	-0.321	-0.533
autobús	-0.443	-0.563

Este nuevo cálculo de la función de utilidad indica que el individuo de mayor ingreso seguirá usando su automóvil, pero el individuo de menor ingreso dejará el autobús para utilizar el taxi colectivo.

El ejemplo mostrado ilustra cómo la función de utilidad visualiza la dependencia entre las preferencias y las elecciones de los viajeros con los atributos tanto del viaje mismo como de las características socioeconómicas de los viajeros, además de que permite pronosticar las reacciones de los usuarios ante cambios de los atributos en las opciones de viaje. La función de utilidad ejemplificada depende sólo de dos atributos del viaje y de uno del usuario; sin embargo, se pueden manejar muchos atributos más para tener una modelación con mayor detalle.

Un aspecto importante en el manejo de las funciones de utilidad para estimar las preferencias de los viajeros antes las opciones de transporte es que el valor numérico de la función de utilidad no es relevante para identificar la intensidad con la que los viajeros prefieren las opciones; así, si para un viajero la función de utilidad vale 1 para la opción del autobús y vale 3 para la opción de taxi colectivo, no es inmediato deducir que prefiere tres veces más el colectivo que el autobús.

La elección del usuario depende solamente del orden de sus preferencias, y el principio de maximización de la utilidad señala que el usuario elegirá la opción de mayor utilidad, independientemente de si su valor es tan sólo ligeramente mayor que el de la opción que le sigue (Horowitz et al, 1986). Así por ejemplo, si los valores de una función de utilidad para los modos automóvil propio, taxi colectivo y autobús resultan ser: 12, 20, 16; el viajero elegirá el taxi colectivo. Y la decisión será la misma si los respectivos valores de la función de utilidad fueran: 12.5, 12.8 y 12.7.

Esta observación surge del hecho de que la función de utilidad se construye como una función matemática cuyos valores numéricos para las opciones por elegir siguen el mismo orden que las preferencias del viajero para esas opciones. Cualquier función matemática que represente numéricamente el orden de preferencias del viajero servirá como función de utilidad y dará las mismas predicciones de elección del usuario, independientemente del valor numérico o del signo que resulten de su fórmula analítica.

Así, habría una infinidad de funciones de utilidad que podrían usarse para un contexto específico de decisión del viajero. Por ejemplo, considerando la función de utilidad V de la ecuación (2):

$$V(c, t, I) = -0.5tI - 2c \qquad \ldots(2)$$

Al volver a calcular las utilidades tanto de U como de V en el primer ejemplo resulta:

	Función U		**Función V**	
Modo	**I = $264 mil**	**I = $96 mil**	**I = $264 mil**	**I = $96 mil**
auto propio	**-0.286**	-0.525	**-75.6**	-50.4
taxi colectivo	-0.314	-0.513	-82.8	-49.2
autobús	-0.420	**-0.500**	-111.0	**-48.0**

Las utilidades máximas aparecen en negritas y puede verse que la elección de los usuarios es la misma para ambas funciones de utilidad. El de mayor ingreso elige el automóvil propio y el de menor ingreso elige el autobús.

Las decisiones agregadas

El principio de maximización de la utilidad que se ha mostrado, permite describir y pronosticar las decisiones que tomará un individuo enfrentado a un conjunto de opciones de viaje. Para el propósito de la modelación de la demanda de transporte, sin embargo, lo que interesa es el comportamiento de grupos agregados de viajeros en un sistema de transporte.

Para aprovechar los resultados de la modelación de las elecciones individuales a través de la función de utilidad, lo único que se debe hacer es evaluar las preferencias de estos individuos y sumar sus contribuciones en los grupos que sean de interés para la modelación. En el siguiente ejemplo se muestra este procedimiento.

Considerando la función de utilidad de la ecuación (1), supongamos que se desea pronosticar las elecciones de los viajeros en un área urbana con las mismas opciones de viaje siguientes:

Modo	**Tiempo (hrs)**	**Costo ($)**
auto propio	0.30	18.00
taxi colectivo	0.40	15.00
autobús	0.75	6.00

y suponiendo la siguiente información sobre los ingresos anuales (en miles de pesos) de los viajeros en esa zona urbana:

Ingreso anual	**% población**
36	30
72	25
108	15
144	20
216	10

Se puede calcular entonces la utilidad de las opciones según el ingreso anual de los individuos, como sigue; donde la máxima utilidad aparece en negritas:

Utilidades de las opciones

ingreso anual	**auto propio**	**taxi colectivo**	**autobús**	**elección**
36	-1.150	-1.033	**-0.708**	autobús
72	-0.650	-0.617	**-0.542**	autobús
108	-0.483	**-0.478**	-0.486	colectivo
144	**-0.400**	-0.408	-0.458	auto propio
216	**-0.317**	-0.339	-0.431	auto propio

Esta última tabla permite pronosticar las elecciones que harán los viajeros de esa zona urbana.

Los de ingreso anual de $36 mil y $72 mil, que son un 55% del grupo considerado elegirán autobús; los de ingreso anual de $108 mil –que son un 15% del grupo– eligen taxi colectivo y el resto elegirán auto propio; como muestra la Figura 2.1

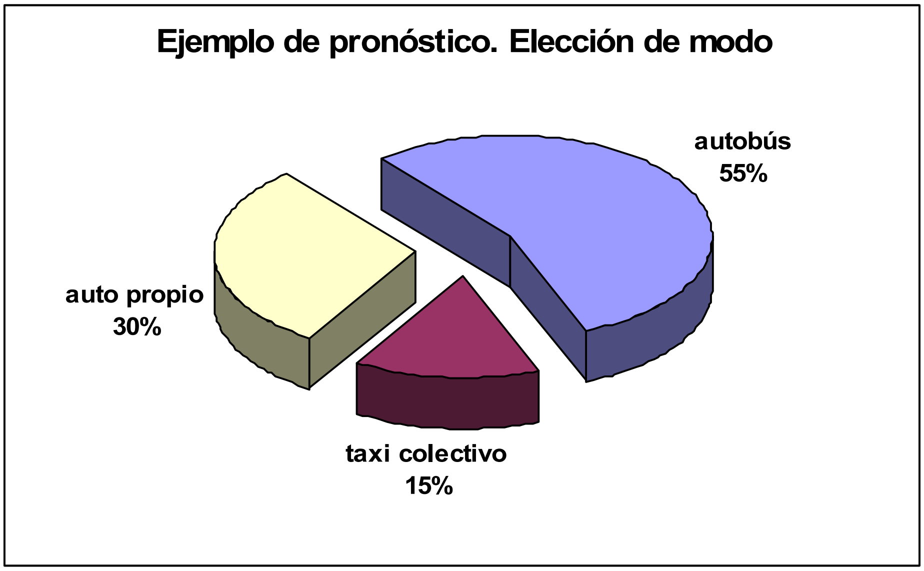


Figura 2.1. Pronóstico de elección de modo basado en la función de utilidad

El enfoque probabilístico

El modelado de las preferencias de los viajeros descrito en la sección anterior es un modelado determinístico, que supone un comportamiento idéntico de los viajeros cuando se enfrentan a las opciones de viaje y tienen exactamente los mismos atributos y características socioeconómicas.

Esta suposición, en el mundo real, no es del todo cierta. Se ha observado que es común encontrar que dos viajeros identificados con exactamente los mismos atributos de viaje, clasificados con las mismas características socioeconómicas y enfrentando una decisión ante un mismo conjunto de opciones eligen de modo distinto. Aún más, también ocurre que un mismo individuo enfrentado en ocasiones distintas a las mismas opciones de viaje elige de manera diferente en cada ocasión.

Varias razones explican este comportamiento: a) que individuos aparentemente idénticos en características socioeconómicas y que enfrentan los mismos atributos de las opciones de viaje tienen gustos distintos, o perciben los atributos de manera diferente; b) que el modelo de las opciones de viaje construido no tenga toda la información necesaria de las opciones del viaje; c) que el modelo desconozca la totalidad de las características socioeconómicas de los viajeros, que sean relevantes para la elección.

En una primera explicación de por qué los usuarios pueden mostrar variaciones en sus elecciones que pudieran parecer contradictorias, Kanafani (1983) sugiere tres razones básicas:

Primeramente, los individuos que hacen elecciones de viaje no siempre siguen reglas de decisión racionales, además de que su idiosincrasia y creencias no pueden conocerse detalladamente en un modelo determinista de elecciones.

En segundo lugar, el modelador que pretende pronosticar las elecciones de los usuarios no puede incluir en la función de elección la totalidad de factores que influyen en la decisión del usuario. Por otra parte, aún cuando pudiera incluir la totalidad de los factores en la función que modela las elecciones, sin duda resultaría una función tan complicada que no sería de uso práctico.

Y en tercer lugar, el propio individuo que toma las decisiones de viaje muy difícilmente podría tener una información perfecta sobre el sistema de transporte y las opciones que ofrece. De este modo, el conjunto de opciones que pudiera identificar el modelador del proceso de elecciones de viaje resultaría mucho mayor en comparación con el que realmente percibe el individuo que toma las decisiones, o también pudiera contener variables que el propio viajero ni siquiera puede percibir.

En una descripción más detallada, Horowitz et al (1986), identifican cinco limitaciones en la información utilizada para construir modelos de elección basados en el principio de maximización de la utilidad:

1. **La omisión de variables relevantes para la modelación de la utilidad**. Esto ocurre cuando en la simplificación de los modelos de utilidad no se incluyen variables importantes para explicar las preferencias del viajero. Si por ejemplo solamente son considerados el tiempo y el costo del viaje, pero para el usuario también es importante la comodidad del modo elegido, su privacidad o su seguridad; el modelo construido puede resultar inadecuado. Si consideramos el caso de las madres que viajan con sus niños del hogar a la escuela y viceversa, el atributo de la seguridad es por supuesto relevante.
2. **Los errores de medición de los atributos del viaje**. Estos errores surgen cuando la información alimentada en el modelo de utilidad no es lo suficientemente precisa. Por ejemplo, los tiempos reales de viaje en un trayecto pueden ser distintos de los tiempos esperados en los itinerarios, si es que el servicio se congestiona o si hay tiempos de transbordo que no aparecen registrados y que afectan al movimiento de los usuarios.
3. **Variables *proxy***. Esta clase de variables son datos que por sí mismos no son de interés para el problema de modelación, pero que por tener una fuerte correlación con la variable que sí interesa –y que por alguna razón no se puede medir directamente– son utilizadas en su representación. Por ejemplo, ante la dificultad de conocer el número promedio de automóviles que poseen los viajeros de un área urbana, que es un dato relevante para pronosticar su elección de modo de transporte, el ingreso anual de estos viajeros podría utilizarse como una aproximación a esta posesión de automóviles.

4. **Diferencias relevantes entre los viajeros**. Las diferencias en las características socioeconómicas de los viajeros pueden en algunos casos ser incluidas en los modelos de utilidad, como se mostró anteriormente con el ingreso anual de los viajeros. Sin embargo, otras diferencias relevantes pueden ser muy difíciles de conocer, como el caso de viajeros con incapacidades físicas que son sensibles a la falta de asientos en el transporte público, o los viajeros que se trasladan a citas prefijadas y para los cuales los tiempos de espera en una terminal no son aceptables para el logro de su objetivo.
5. **Variaciones día con día del contexto de la elección**. Los modelos de utilidad consideran los atributos del viaje y las características del viajero para pronosticar las elecciones que se harán, suponiendo que no hay cambios importantes en la repetición día con día de estas elecciones. Sin embargo puede haber cambios temporales, como el abandono del automóvil propio debido al servicio de mantenimiento o el abandono del servicio público de transporte a favor del automóvil cuando el viajero debe mover algún paquete incómodo o trasladar a un enfermo que no puede entrar al servicio público.

Estas limitaciones contribuyen a la aparición de variaciones en las elecciones que los viajeros hacen de sus opciones de viaje, que no pueden ser explicadas por los modelos deterministas de utilidad.

En cualquier caso, ya que los modelos de elección deterministas no pueden pronosticar adecuadamente en estas circunstancias, el modelado de las elecciones se extiende hacia un contexto de probabilidad, donde es posible manejar la falta de información precisa para describir por completo atributos de las opciones o características socioeconómicas de los viajeros.

Así, surgen los modelos de utilidad aleatoria que describen las preferencias de los viajeros en términos de probabilidad. Esta clase de modelos no pronostican la opción elegible por el viajero que toma la decisión, sino más bien calcula las probabilidades de elegir cada una de las distintas opciones; así, si una cierta opción tiene asociada una probabilidad de 0.75 de ser elegida, eso significa que aproximadamente en 3 de cada 4 ocasiones el viajero la elegirá, aun cuando no pueda decir en qué orden lo hará.

La forma más general de un modelo de utilidad probabilística U consiste en la suma de una parte de utilidad determinista V (llamada también sistemática) calculada con los atributos de las opciones para elegir y las características de los viajeros y un término de error e que representa una variable aleatoria que cuenta para las diferencias observadas en el modelo determinista. Se tiene entonces la forma: $U = V + e$.

Para que un modelo de elección probabilista sea adecuado para pronosticar las elecciones que harán los viajeros, es conveniente que tenga cuatro características básicas:

1. La probabilidad de elegir debe depender de las componentes deterministas de utilidad de todas las opciones disponibles para el usuario. La opción por elegir es la de mayor utilidad total, y depende de los valores relativos de utilidades totales de todas las opciones.
2. La probabilidad de que una opción sea elegida debe aumentar si su componente determinista de utilidad aumenta, y disminuir cuando la componente determinista de cualquier otra opción distinta aumenta. Esto ocurre porque al aumentar la componente determinista de utilidad en la opción considerada, la suma V + e aumenta y por tanto también su probabilidad; y del mismo modo, si la componente determinista de cualquier otra alternativa distinta aumenta, se espera que disminuya la probabilidad de que la primera opción considerada sea la de mayor utilidad.
3. El modelo de utilidad aleatoria debe manejar conjuntos de opciones con cualquier número de alternativas, para que no lo restrinja el número de estas y además aplicarse al caso de reducir este número (p. ej. la desaparición de un servicio de transporte) o al caso de aumentar el número de ellas (p. ej. con la introducción de un nuevo servicio).
4. El modelo deberá ser de fácil comprensión y uso en la práctica, para que pueda difundirse entre los interesados en la planificación del transporte.

Otras propiedades de los modelos probabilistas que resultan de gran utilidad son las siguientes (Ortúzar & Willumsen, 1994):

a) Puesto que estos modelos se estiman con datos de los individuos, resultan más eficientes en el uso de la información, ya que requieren menos datos al considerar cada decisión individual como una observación; esta propiedad contrasta con el proceso de la modelación de datos agregados de transporte, donde cada observación es generalmente el promedio de cientos de observaciones individuales.
b) Al tener datos individuales, se puede utilizar toda la variabilidad de la información colectada.
c) En virtud de que estos modelos obtienen probabilidades de elección de las opciones, empleando cálculos básicos de probabilidades pueden estimarse por ejemplo, el porcentaje esperado de viajeros que usarán dicha alternativa sumando las probabilidades de su elección en el conjunto de usuarios. También podrían modelarse un conjunto de decisiones independiente si se considera por separado cada decisión como una elección condicional, de modo que las probabilidades finales puedan multiplicarse para dar la distribución de probabilidad conjunta, como se ve en la siguiente ecuación:

$$\mathbf{P(f, d, m, r) = P(f) \times P(d \mid f) \times P(m \mid d, f) \times P(r \mid m, d, f)}$$

Donde:

f = frecuencia del servicio

d = destino del viaje

m = modo

r = ruta

d) El modelo de utilidad aleatoria puede incluir en principio cualquier número de variables explicativas, para las cuales se estiman coeficientes. Además de que esto extiende la flexibilidad del modelo para representar variables relevantes usadas en el desarrollo de políticas de transporte, también ofrece la oportunidad de calcular las utilidades marginales de los atributos representados en las variables; lo cual sirve para conocer su importancia relativa, así como la tasa de sustitución de un atributo por otro, como es el caso del valor del tiempo para los viajeros, que es un insumo importante en la evaluación de proyectos de inversión en transporte.

En las secciones siguientes se muestran algunos desarrollos comunes de este tipo de modelos de utilidad aleatoria.

2.2 El modelo Logit

El desarrollo de cualquier modelo probabilista de elección inicia suponiendo que los individuos cuyas elecciones se modelarán pertenecen a una población homogénea, actúan racionalmente y tienen toda la información necesaria para decidir; guiados por el principio de maximizar su utilidad. El significado de este supuesto en la modelación es que el analista que construye el modelo ha considerado ya todas las restricciones prácticas que afectan al individuo y por tanto ha identificado las opciones realmente accesibles y conocidas para el viajero que tomará las decisiones.

Las opciones de viaje disponibles para estos individuos están descritas por un conjunto **A**, y los atributos de estas opciones así como las características socioeconómicas de los individuos se describen por un vector **X** de atributos.

Cada opción $A_j \in \mathbf{A}$ tiene asociada una utilidad U_j para el individuo que decide, y se considera que está formada por dos componentes: V_j , la parte medible, sistemática, ligada a los atributos que tienen las alternativas; y e_j: el error aleatorio que permite tomar en cuenta el efecto de las percepciones, la idiosincrasia y los gustos del viajero, así como la carencia de información del modelador en la decisión del individuo.

De esta manera, se tiene:

$$U(i) = V(i) + e(i)$$

Donde:

U(i) representa la función de elección de la opción *i*

V(i) representa la función determinista de los atributos de la de la opción *i*

e(i) representa la componente aleatoria de la utilidad, que es una variable aleatoria con cierta distribución.

Con el supuesto de comportamiento racional del individuo, es posible especificar la forma de la función V(i) seleccionando variables que representen los atributos de las alternativas que interesan al viajero; una forma sencilla y comúnmente usada es la lineal, con coeficientes que indican la conveniencia del atributo:

$$V_i = b_0 + b_1 x_1 + ... + b_k x_k$$

Así, por ejemplo, es de esperarse que el costo del viaje tenga coeficiente negativo, mientras que el atributo de comodidad debería tener un coeficiente positivo asociado en la forma lineal.

La determinación de la forma funcional de la componente aleatoria e(i) es algo menos directo, ya que en principio requeriría de la observación del individuo que decide en varias ocasiones en condiciones de experimento controlado para determinar la variabilidad de sus percepciones y de ahí proponer una forma funcional. Como esto es realmente difícil de implantar en la práctica, es necesario adoptar supuestos estadísticos razonables sobre la componente aleatoria *e(i)*, como se verá más adelante (Kanafani, 1983).

Siguiendo el principio de maximización de la utilidad por el individuo, se puede esperar que elija la opción *i* que perciba como la de mayor utilidad, y esto se refleja por el hecho de que el valor de U(i) es mayor que cualquier otro valor U(j) para cualquier otra opción *j* disponible en el conjunto **A**.

Entonces, la probabilidad *P(i)* de que la opción *i* sea elegida está dada por:

$$P(i) = P\,[\,U(j) < U(i)\,] \text{ para toda } j \neq i \qquad \ldots(3)$$

Desarrollando la expresión anterior resulta:

$$P(i) = P\,[e(j) - e(i) < V(i) - V(j)] \text{ para toda } j \neq i \qquad \ldots(4)$$

O equivalentemente:

$$P(i) = P\,[e(j) < V(i) - V(j) + e(i)] \quad \text{para toda} \quad j \neq i \quad \ldots(5)$$

Y considerando la distribución de probabilidad conjunta F(·) de las componentes aleatorias e(1), e(2), …, e(i), …, e(N), para N opciones disponibles, así como la función de densidad marginal de la componente aleatoria *i* , f_i (·), la probabilidad anterior puede ser calculada como:

$$P(i) = \int F\big[V(i) - V(j) + e(i)\big] f_i(\theta)d\theta \quad para \quad j \neq i$$

Para hacer manejable la expresión anterior, se necesitan hipótesis sobre la distribución de probabilidad conjunta de los errores *e(i)*. La primera hipótesis es considerarlos independientes e idénticamente distribuidos (IID) y la segunda, se refiere a la forma de su distribución de probabilidad.

Distintas formas para la distribución de probabilidad de las diferencias e(j) – e(i) generan distintos modelos; p ej. de probabilidad lineal al suponer una distribución uniforme, o Probit si se supone una distribución normal. Una forma que ha resultado muy utilizada es la Logit.

En el modelo Logit, al suponer que los errores e(i) tienen una distribución Gumbel (también llamada de valores extremos), se puede demostrar que las diferencias e(j) – e(i) resultan tener una distribución Logística (Ben-Akiva & Lerman, 1985).

El segundo término en la ecuación (4) es la función de distribución acumulada (FDA) de las diferencias e(j) – e(i), por lo que la probabilidad de elegir la opción “i” en el modelo Logit viene dada por la densidad Logística:

$$P(i) = \frac{e^{V_i}}{e^{V_i} + e^{V_j}} = \frac{1}{1 + e^{-(V_i - V_j)}} \quad \ldots(6)$$

La gráfica de P(i) contra la diferencia V_i – V_j en la ecuación (6) es una curva alargada en forma de “S” similar a las curvas de reparto de pasajeros entre modos de transporte (p. ej. usuarios de automóvil y usuarios de transporte público) que fueron obtenidos empíricamente en los primeros estudios de transporte urbano para estimar las proporciones de pasajeros que escogerían cada modo según la diferencia entre el costo de las opciones (Ortúzar & Willumsen, 1990).

Los modelos Logit son una familia de modelos de elección discreta; de los más conocidos están los siguientes. Cuando sólo hay dos elecciones posibles, tenemos un modelo Logit Binario; si hay más de dos opciones, se tiene el modelo Logit Multinomial; y si existen semejanzas en algunas opciones que se puedan "anidar" en una clasificación común (p. ej. autobús urbano y taxi colectivo como opciones de "transporte público") se obtiene un modelo Logit Anidado. (Ortúzar & Willumsen, 1990).

2.2.1 El modelo Logit binomial

El caso más sencillo de modelo Logit es el que considera solamente dos opciones para elegir, como es el caso más simple de considerar para un viaje los atributos del costo y el tiempo. Considerando las componentes sistemáticas de la utilidad para las dos opciones como V_1 y V_2, el modelo más general para la probabilidad de que la opción 1 sea elegida aparece enseguida, donde β es un parámetro de calibración para el modelo:

$$P(1) = \frac{1}{1 + e^{-\beta(V_1 - V_2)}}$$

La Figura 2.2 muestra la gráfica de P(1) contra los valores de la diferencia $V_1 - V_2$ para varios valores del parámetro β.

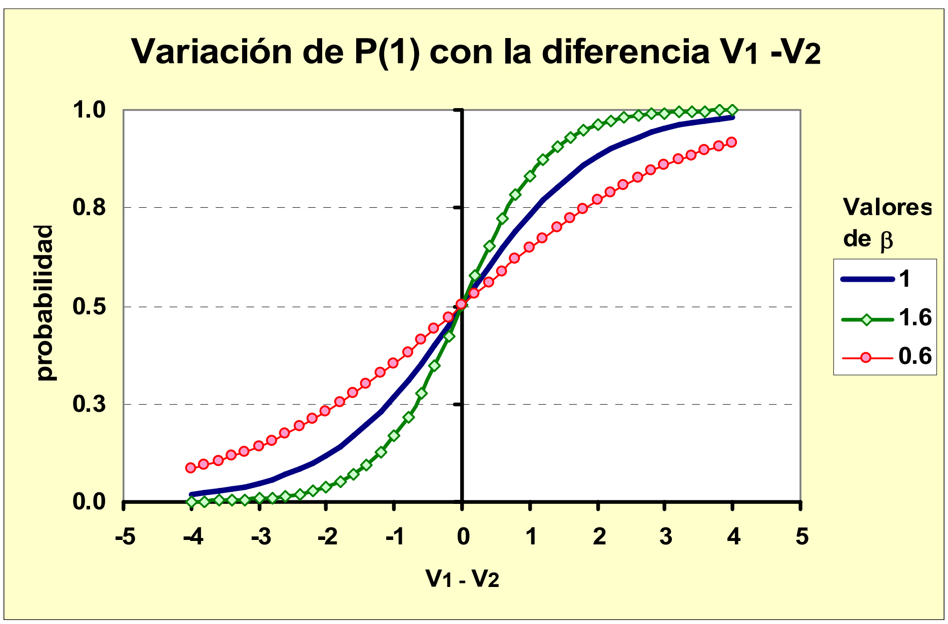


Figura 2.2. Modelo Logit binomial

En esta gráfica puede verse que cuando la diferencia $V_1 - V_2 = 0$, indicando que la utilidad de ambas opciones es la misma, la probabilidad de que el individuo elija la opción 1 es del 50%, correspondiendo al caso de indiferencia frente a la opción 2.

A medida que la diferencia $V_1 - V_2$ toma valores positivos cada vez mayores indicando que la utilidad de la opción 1 es cada vez mayor comparada a la de la opción 2, la probabilidad de elegir la opción 1 aumenta tendiendo a uno; y viceversa, cuando la diferencia $V_1 - V_2$ toma valores negativos indicando que la opción 2 tiene mejor utilidad que la 1, la probabilidad de elegir la opción 1 disminuye aproximándose a cero.

En la Figura 2.2 también vemos que si la utilidad V_1 aumenta y V_2 queda fija, la diferencia $V_1 - V_2$ aumentará, igual que la probabilidad de elegir la opción 1. Esto mismo ocurre si estando fija la utilidad V_1, V_2 disminuye, con el mismo efecto de aumentar la diferencia $V_1 - V_2$. Es decir, el modelo Logit binomial pronostica una mayor probabilidad de elegir la opción 1 cuando esta mejora su utilidad o cuando la opción 2 disminuye la suya; lo que es consistente con el supuesto básico de que el usuario busca maximizar su utilidad.

2.2.2 El modelo Logit multinomial

El modelo Logit binomial de la sección anterior puede ser extendido de modo natural para considerar más de dos opciones de elección del usuario. Si se considera que existen N opciones, con utilidades sistemáticas $V_1, V_2, \ldots, V_N$, la forma básica del modelo para la probabilidad de elegir la opción "*j*" es la siguiente:

$$P(j) = \frac{e^{V_j}}{\sum_{k=1}^{N} e^{V_k}} = \frac{e^{V_j}}{e^{V_1} + e^{V_2} + \ldots + e^{V_N}} \quad \cdots (7a)$$

simplificada a:

$$P(j) = \frac{1}{1 + e^{(V_j - V_1)} + e^{(V_j - V_2)} + \ldots + e^{(V_j - V_N)}} \quad \cdots (7b)$$

De la ecuación (7a) se ve que la probabilidad de elegir una opción "*j*" aumenta si crece su componente sistemática de utilidad V_j; pues la función exponencial en el numerador es creciente; de igual modo la probabilidad se reduce si alguna de las alternativas $k \neq j$ aumenta su utilidad, pues aumenta el denominador de esta expresión. Esta característica es consistente con el marco teórico del comportamiento del usuario.

Observando la ecuación (7b) resalta una propiedad importante del modelo Logit multinomial: la probabilidad de elegir una opción *"j"* depende sólo de las diferencias entre las componentes sistemáticas de utilidad V_k de las opciones. O sea, la probabilidad de elegir la opción "j" depende sólo de las diferencias: $V_j - V_1$, $V_j - V_2$, … etc. Esto se relaciona con la observación acerca de la irrelevancia que tiene el valor numérico de la función de utilidad, y del hecho de que las decisiones del usuario que manifiestan sus preferencias, reflejan solamente el orden en que las elige, y es este orden el que se expresa por los valores numéricos de las diferencias en las utilidades, sin importar su valor numérico particular.

Un ejemplo numérico del modelo Logit

El siguiente ejemplo numérico ilustra el uso del modelo Logit multinomial para analizar las elecciones de viaje de un usuario. Considerando que tenemos las opciones de viaje: auto propio, taxi colectivo y autobús con sus atributos y la función de utilidad U de la sección (2.1):

Modo	Tiempo (hrs)	Costo ($)
auto propio	0.30	18.00
taxi colectivo	0.40	15.00
autobús	0.75	6.00

	Función U	
Modo	**I = $264 mil**	**I = $96 mil**
auto propio	-0.286	-0.525
taxi colectivo	-0.314	-0.513
autobús	-0.420	-0.500

Y numerando a las opciones como 1: auto propio; 2: taxi colectivo; 3: autobús, las probabilidades de elegir las tres opciones para el usuario con ingreso anual de $264 mil se calculan como sigue:

$$P(1) = \frac{e^{-0.286}}{e^{-0.286} + e^{-0.314} + e^{-0.420}} = 0.351$$

$$P(2) = \frac{e^{-0.314}}{e^{-0.286} + e^{-0.314} + e^{-0.420}} = 0.342$$

$$P(3) = \frac{e^{-0.286}}{e^{-0.286} + e^{-0.314} + e^{-0.420}} = 0.307$$

El cálculo indica que la elección más probable para este usuario es la opción 1 (auto propio), resultado que coincide con el análisis previo de su función de utilidad.

Para el usuario con ingreso anual de $96 mil, el cálculo es el siguiente:

$$P(1) = \frac{e^{-0.525}}{e^{-0.525} + e^{-0.513} + e^{-0.500}} = 0.329$$

$$P(2) = \frac{e^{-0.513}}{e^{-0.525} + e^{-0.513} + e^{-0.500}} = 0.333$$

$$P(3) = \frac{e^{-0.500}}{e^{-0.525} + e^{-0.513} + e^{-0.500}} = 0.338$$

ello indica que la elección de mayor probabilidad es la opción 3, correspondiente al autobús; nuevamente este resultado es consistente con la discusión previa sobre las utilidades en este ejemplo. En los dos ejemplos numéricos ilustrados puede verificarse que las sumas de las probabilidades de las tres opciones siempre dan uno, ya que el usuario debe elegir sólo una de ellas.

El modelo Logit también pronostica los cambios en las elecciones de los usuarios, ante modificaciones de los atributos de las opciones consideradas. Tomando como ejemplo el aumento de combustibles mostrado en la sección 2.1 y la nueva función de utilidad:

Modo	**Tiempo (hrs)**	**Nuevo costo ($)**
auto propio	0.30	20.00
taxi colectivo	0.40	16.00
autobús	0.75	9.00

	Función U	
Modo	**I = $264 mil**	**I = $96 mil**
auto propio	-0.302	-0.567
taxi colectivo	-0.321	-0.533
autobús	-0.443	-0.563

Los nuevos cálculos de probabilidades Logit para el usuario de mayor ingreso son:

$$P(1) = \frac{e^{-0.302}}{e^{-0.302} + e^{-0.321} + e^{-0.443}} = 0.351$$

$$P(2) = \frac{e^{-0.321}}{e^{-0.302} + e^{-0.321} + e^{-0.443}} = 0.344$$

$$P(3) = \frac{e^{-0.443}}{e^{-0.302} + e^{-0.321} + e^{-0.443}} = 0.305$$

Mientras que para el usuario de menor ingreso resultan:

$$P(1)=\frac{e^{-0.567}}{e^{-0.567}+e^{-0.533}+e^{-0.563}}=0.329$$
$$P(2)=\frac{e^{-0.533}}{e^{-0.567}+e^{-0.533}+e^{-0.563}}=0.340$$
$$P(3)=\frac{e^{-0.563}}{e^{-0.567}+e^{-0.533}+e^{-0.563}}=0.330$$

En este nuevo cálculo, la probabilidad más alta de elección para el usuario de mayor ingreso sigue siendo la opción 1 (auto propio); pero para el otro usuario, la elección de mayor probabilidad es la opción 2 (taxi colectivo), lo que coincide con el análisis de utilidad previo de la sección 2.1.

Las probabilidades calculadas pueden usarse para estimar el reparto de los usuarios entre las opciones de viaje. Por ejemplo, si sabemos que el 6% de los usuarios son de ingresos promedio anual de $264 mil y el 94% restante de ingreso anual de $96 mil; con el esquema original de costos, la probabilidad de que un usuario tenga ingreso alto y también escoja taxi colectivo, considerando que estos eventos son independientes, es el producto de sus respectivas probabilidades:

P(taxi colectivo) = P(ingreso alto) ×P(taxi colectivo) = 0.06×0.351 = 0.021

Así, para estimar la proporción de usuarios que elegirán taxi colectivo se tiene:

P(taxi colectivo) = P(ingreso alto) ×P(taxi colectivo) + P(ingreso bajo) ×P(taxi colectivo) =

0.06×0.351 + 0.94×0.329 = 0.330

La tabla siguiente resume estos cálculos de probabilidades para el escenario original de costo y el nuevo escenario luego del aumento del costo.

Modo	costo orig	nuevo costo
auto propio	0.330	0.330
taxi colectivo	0.334	0.341
autobús	0.336	0.329

En la tabla se ve que el nuevo esquema de costo no altera la fracción de usuarios que eligen auto propio (un 33%), pero luego del aumento hay una migración de usuarios del autobús hacia el taxi colectivo, de: 0.341 – 0.334 = 0.07 (un 7%).

La introducción de una nueva alternativa

Uno de los temas de mayor interés para la planeación de los sistemas de transporte es la estimación de las respuestas de los usuarios cuando se introduce un nuevo servicio. El enfoque de preferencias reveladas, basado en la observación de las acciones de los usuarios solamente, puede dar información de lo que ocurre con los sistemas de transporte ya establecidos, pero está limitado ante la perspectiva de un nuevo servicio que nunca ha sido observado.

El modelo Logit permite la estimación de las respuestas de los usuarios a la introducción de un nuevo servicio si existe la información de las utilidades estimadas que los atributos del nuevo servicio tienen para los usuarios, como se ilustra con el ejemplo siguiente. Considerando la función de utilidad de la ecuación (1) y las tres opciones: 1) auto propio, 2) taxi colectivo; 3) autobús, más una nueva opción de tren ligero con los siguientes atributos:

Modo	Tiempo (hrs)	Costo ($)
auto propio	0.30	18.00
taxi colectivo	0.40	15.00
autobús	0.75	6.00
tren ligero	0.50	12.00

El cálculo de utilidades, para usuarios de ingresos anuales de $264 mil y $96 mil está en la tabla siguiente; donde aparecen con negritas los valores máximos:

	Función de utilidad U	
Modo	**I = $264 mil**	**I = $96 mil**
auto propio	**-0.286**	-0.525
taxi colectivo	-0.314	-0.513
autobús	-0.420	**-0.500**
tren ligero	-0.341	**-0.500**

La tabla indica que para los usuarios de alto ingreso el auto propio es la mejor opción y que para los usuarios de ingreso bajo resulta prácticamente indiferente usar el autobús o el tren ligero. El cálculo de probabilidades con el modelo Logit multinomial así como el reparto modal esperado considerando un 6% de usuarios de ingreso alto y el resto de ingreso bajo es como sigue:

Modo	I = $264 mil	I = $96 mil	Reparto modal
auto propio	**0.264**	0.246	24.7%
taxi colectivo	0.256	0.249	25.0%
autobús	0.230	**0.252**	25.1%
tren ligero	0.250	**0.252**	25.2%

La tabla muestra cómo la introducción del servicio de tren ligero lleva a una migración de usuarios de las opciones previas. En la situación original, sin el tren ligero y con los costos originales, se esperaba que un 33% de usuarios eligieran auto propio, un 34.1% taxi colectivo y un 32.9% autobús. La introducción del tren ligero ha reducido el uso de auto propio al 24.7% de usuarios, la de taxi colectivo al 25%, así como la del autobús al 25.1%; la diferencia con los valores originales son los usuarios que deciden tomar el tren ligero como nueva opción.

Las constantes específicas de las alternativas

Con el modelo Logit mostrado, resulta claro que dos opciones que tengan exactamente los mismos valores de utilidad en sus componentes sistemáticas obtendrán la misma probabilidad de ser elegidas por el usuario. En la realidad, sin embargo, el hecho de que dos alternativas coincidan en atributos –por ejemplo– tanto en tiempo de viaje como en costo, no significa que sean exactamente iguales. Factores como la comodidad, la seguridad, las vistas escénicas, etc. pueden afectar la decisión que toma el usuario; aun cuando los atributos básicos de tiempo y costo sean los mismos.

En principio, si se desea diferenciar entre dos alternativas que coincidan en los atributos básicos de tiempo y costo, habría que incorporar a la función de utilidad otras variables que representen los atributos adicionales de comodidad, seguridad, etc. Sin embargo, en la práctica puede resultar muy difícil de medir estos factores de diferenciación.

Una forma de lograr esta diferenciación es agregar un término constante a las componentes sistemáticas de utilidad de las alternativas, para representar la influencia de todos esos factores que no son fácilmente observables y que podrían explicar las preferencias del usuario sobre las opciones. Estos términos constantes son conocidos como *constantes específicas de las alternativas* (alternative-specific constants, en inglés).

Para aclarar el uso de estas constantes específicas en un modelo Logit, consideremos una función de utilidad con los atributos de tiempo (t) y costo (c) del viaje para las opciones: 1) auto propio y 2) autobús, que contiene constantes específicas A_j para cada alternativa como sigue:

$$U(1) = A_1 + \alpha t_1 + \beta c_1 + e(1); \quad U(2) = A_2 + \alpha t_2 + \beta c_2 + e(2)$$

donde los coeficientes α y β ponderan la importancia del tiempo y el costo; t_j es el tiempo en la opción "*j*"; c_j es el costo en la opción "*j*"; A_j es la constante que distingue a la opción y los errores e(j) son la componente aleatoria de la utilidad.

La probabilidad de que el usuario se decida por la opción 1 es:

$$P_1 = P[A_1 + \alpha t_1 + \beta c_1 + e(1) > A_2 + \alpha t_2 + \beta c_2 + e(2)], \text{ que equivale a:}$$

$$P_1 = P[e(1) - e(2) > (A_2 - A_1) + \alpha t_2 - \alpha t_1 + \beta c_2 - \beta c_1]$$

De esta última ecuación se puede ver que la probabilidad depende solamente de la diferencia entre las constantes específicas $A_2 - A_1$, de modo que es conveniente normalizar estas constantes a una sola, asignada solamente a una de las opciones; esta opción es conocida como la alternativa base.

El siguiente ejemplo ilustra cómo la adición de constantes específicas a las opciones refina el modelo Logit y permite una estimación más realista de las probabilidades de elección del usuario.

Suponiendo la elección que enfrenta un usuario para un viaje de trabajo, donde dispone de tres opciones: 1: auto propio; 2: auto compartido (familiares; colegas); 3: autobús; con las siguientes características:

Modo	**Tiempo (hrs)**	**Costo ($)**
1: auto propio	0.30	20.00
2: auto compartido	0.40	14.00
3: autobús	0.75	10.00

Del ejemplo de la ecuación (1) de la sección 2.1, con c = costo del viaje, t = tiempo del viaje, I = ingreso anual del usuario, la utilidad sistemática de la opción "*j*" es la siguiente:

$$V(c, t, I) = -0.5t_j - 2c_j/I \quad \ldots(8)$$

Considerando otros factores adicionales en las opciones que pueden influenciar al usuario como es la comodidad, la seguridad del viaje, etc., el uso del auto propio puede ser más atractivo que el del auto compartido; a su vez esta opción sería más atractiva que el uso del autobús. Para distinguir estos factores se agregan a las alternativas constantes específicas. Tomando como opción base el autobús, las nuevas funciones de utilidad son:

Para auto propio: $V_1(c, t, I) = 0.50 - 0.5t_1 - 2c_1/I$

Para auto compartido: $V_2(c, t, I) = 0.25 - 0.5t_2 - 2c_2/I$

Para autobús: $V_3(c, t, I) = -0.5t_2 - 2c_2/I$

El signo de las constantes específicas de alternativas y sus valores numéricos indican la presencia de otros factores además del costo y el tiempo que pueden favorecer la elección de la opción.

Calculando las utilidades para el caso de usuarios con ingreso anual de $36 mil, así como sus probabilidades de elección con un modelo Logit, se tiene:

	Sin constante		Con constante específica	
Modo	**Utilidad**	**P(j)**	**Utilidad**	**P(j)**
1: auto propio	-1.261	0.269	-0.761	0.347
2: auto compartido	-0.978	0.357	-0.728	0.359
3: autobús	-0.931	0.374	-0.931	0.293

Los cálculos muestran que sin la constante específica, el autobús tendría la mayor utilidad; mientras que agregando la constante específica, el auto compartido es el de mayor utilidad para el usuario. Las probabilidades de las opciones son muy distintas cuando se incluye la constante específica que cuando no.

Horowitz et al (1986) señalan que la adición de las constantes específicas para las alternativas tiene el efecto de mejorar la estimación del modelo Logit, como aparece en el siguiente ejemplo numérico.

Considerando dos opciones de elección, 1: automóvil propio; 2: autobús, con el único atributo del tiempo de viaje y las siguientes utilidades sistemáticas con una constante específica para la opción 1:

Auto propio: $V_1(t) = 1 - 0.5t_1$

Autobús: $V_2(t) = -0.5t_2$

La probabilidad de elegir auto propio está dada por:

$$P_C(1) = \frac{1}{1+e^{-0.5(t_2-t_1)-1}} \quad ...(9)$$

La Figura 2.3 muestra la gráfica de la ecuación (9) contra las diferencias $t_2 - t_1$; el subíndice “C” indica que el modelo lleva constante específica para la alternativa 1, mientras que el subíndice “S” significa que el modelo es sin constante específica.

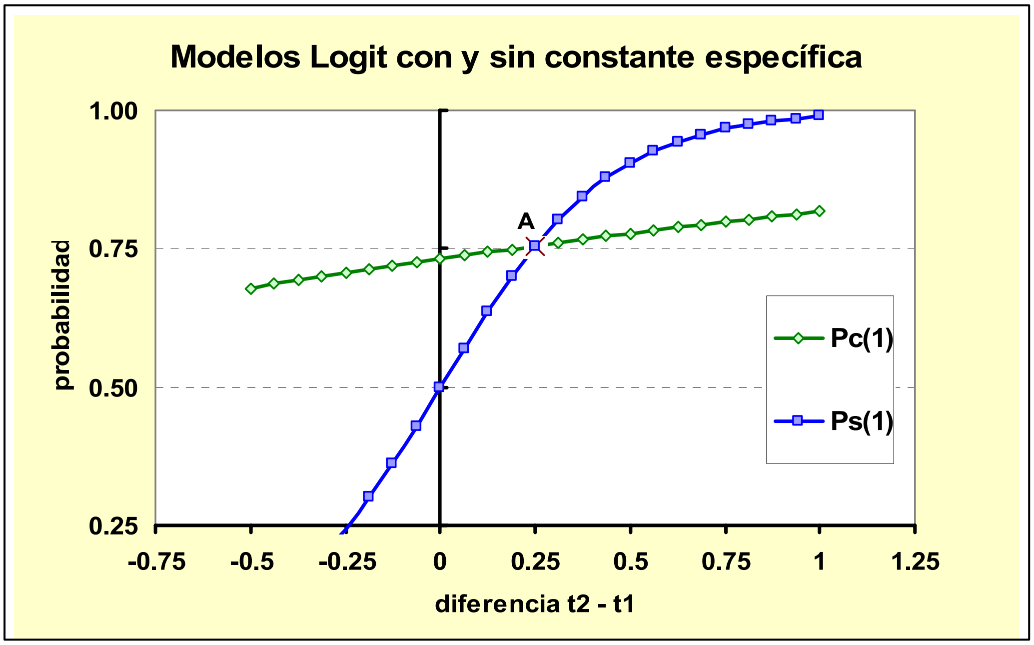


Figura 2.3. Modelos Logit con y sin constante específica

Suponiendo que se dispone de observaciones de elecciones de usuarios cuya diferencia entre el tiempo en autobús y el tiempo en automóvil propio es de 15 minutos, es decir: $t_2 - t_1 = 0.25$; entonces la probabilidad de elegir auto propio puede ser calculada con la fórmula previa, de lo que resulta:

$$P_C(1) = \frac{1}{1 + e^{-0.5(0.25)-1}} = 0.755$$

El punto "**A**" en la Figura 2.3 corresponde a este cálculo.

Si ahora consideramos el modelo sin constante específica para las alternativas, la forma general para la probabilidad de elegir la opción 1 sería la siguiente (el subíndice "S" indica que es un modelo sin constante específica), donde β es un parámetro de calibración:

$$P_S(1) = \frac{1}{1 + e^{\beta(t_2 - t_1)}}$$

Naturalmente, con este modelo, cuando $t_2 - t_1 = 0$, $P_S = 0.5$, como se ve en la Figura 2.3. Para que este modelo se ajuste a las observaciones que se tienen de los usuarios con diferencia de 15 minutos en los tiempos de autobús y automóvil, se debe calcular el valor de β para que P_S (0.25) = 0.755.

De la ecuación:

$$P_S(1) = \frac{1}{1+e^{\beta(0.25)}} = 0.755$$

Despejando apropiadamente se encuentra el valor de β = 4.5, con lo que el modelo sin constante específica es:

$$P_S(1) = \frac{1}{1+e^{4.5(t_2-t_1)}}$$

cuya gráfica aparece también en la Figura 2.3.

Comparando estas gráficas se nota que la variación de la probabilidad de elegir la opción 1 con el cambio en las diferencias $t_2 - t_1$ es mucho mayor en el modelo $P_S(1)$ que en el modelo $P_C(1)$; lo que significa que al evaluar el efecto de los cambios en los tiempos de traslado de las alternativas con el modelo sin constante específica se da una sobreestimación que podría resultar en pronósticos de mala calidad, en comparación con la respuesta más moderada del modelo $P_C(1)$ que incluye esta constante específica para la opción del automóvil propio.

2.2.3 La independencia de las alternativas irrelevantes

Una propiedad que tiene el modelo Logit multinomial es la llamada *independencia de las alternativas irrelevantes (IAI)*. Esta propiedad describe el hecho de que para cualquier individuo que decide entre alternativas, la razón entre las probabilidades de elegir dos opciones *"j, k"* del conjunto de estas, depende solamente de los atributos de las dos opciones y no de la presencia de otras opciones distintas o de sus atributos.

Ortúzar y Willumsen (1994) comentan la descripción de la propiedad IAI como un axioma usado en Teoría de Decisiones y que fue explicada por Luce y Suppes (1965) como sigue:

"Siempre que dos alternativas tengan probabilidades positivas de ser elegidas, la razón de una probabilidad a la otra permanece inalterada por la presencia o ausencia de cualquier otra alternativa adicional en el conjunto de opciones disponibles".

Para ilustrar esta propiedad, consideramos el modelo Logit de la ecuación (7a) con tres opciones: 1) auto propio; 2) taxi colectivo; 3) autobús y las probabilidades de elegir las opciones 1 o 2:

$$P(1) = \frac{e^{V_1}}{e^{V_1} + e^{V_2} + e^{V_3}}$$

$$P(2) = \frac{e^{V_2}}{e^{V_1} + e^{V_2} + e^{V_3}}$$

Entonces, la razón P(1) / P(2) es:

$$\frac{P(1)}{P(2)} = \frac{\dfrac{e^{V_1}}{e^{V_1} + e^{V_2} + e^{V_3}}}{\dfrac{e^{V_2}}{e^{V_1} + e^{V_2} + e^{V_3}}} = \frac{e^{V_1}}{e^{V_2}}$$

Indicando que esta razón depende solamente de los atributos de las opciones auto propio y taxi colectivo; es decir, que la presencia de la alternativa del autobús en nada cambia la relación.

Las limitaciones en la modelación que implica la propiedad IAI en el modelo Logit multinomial es ilustrada con la paradoja de los autobuses rojos y azules, que ha sido ampliamente difundida en la literatura del tema y que se describe a continuación.

La paradoja de los autobuses rojos y azules

Suponiendo que para un viaje al trabajo los usuarios pueden elegir entre la alternativa de automóvil propio (“a”) o autobús (“b”) y que las respectivas utilidades de estos modos de transporte son iguales: $V_a = V_b$, la aplicación del modelo Logit binomial da las probabilidades de elegir como:

$$P(a) = P(b) = ½$$

En esta circunstancia, un nuevo operador de autobuses comienza a ofrecer el servicio con la misma calidad que el servicio de autobús original; es decir, el mismo costo, las mismas rutas y paradas, etc. Para distinguir su servicio, el nuevo operador pinta sus autobuses de azul, ya que los autobuses originales son rojos.

Aceptando que el color de los autobuses no es un factor que influya en la decisión de los usuarios para su viaje al trabajo, lo que cabría esperar es que los usuarios de autobús se distribuyeran equitativamente entre los autobuses rojos y los azules, de modo que las probabilidades esperadas de elección de las tres opciones disponibles serían:

$$P(a) = ½;\ P(br) = ¼\ ;\ P(ba) = ¼$$

donde los índices son: “a” = auto propio; “br” = autobús rojo y “ba” = autobús azul.

Si ahora se usa el modelo Logit multinomial de la ecuación (7a), considerando que la utilidad de la opción auto propio es igual a la del autobús original, y que este tiene la misma utilidad que el autobús azul nuevo, resulta:

$$V_a = V_{br} = V_{br} = V$$

donde V es el valor común de las utilidades de las alternativas, las probabilidades de elección para cualquier opción son:

$$P(a) = {}^1/_3;\ P(br) = {}^1/_3\ ;\ P(ba) = {}^1/_3$$

Este pronóstico del modelo Logit indica que el porcentaje de usuarios que eligen automóvil, cuya expectativa sería del 50% comparado con los usuarios que eligen autobús, se ha reducido al 33.3%, y sugiere una migración hacia el servicio de autobuses. Ya que los autobuses nuevos son prácticamente equivalentes a los autobuses originales, este resultado parece inverosímil; ya que la calidad del servicio de autobuses no ha mejorado.

El pronóstico inverosímil del modelo Logit se debe a la propiedad IAI, que es inevitable dada la estructura del modelo.

Una forma común de evitar que la propiedad IAI del modelo Logit lleve a pronósticos poco realistas es la adición de variables explicativas a las componentes deterministas de la utilidad en el modelo, que sirvan para reflejar la presencia de otros factores que permitan distinguir las elecciones de los usuarios. El siguiente ejemplo numérico ilustra la forma de agregar este tipo de variables.

A partir de las funciones de utilidad descritas en la ecuación (8) y con los mismos atributos para elegir entre: 1) auto propio; 2) auto compartido y 3) autobús, se agrega a las funciones de utilidad la variable A que indica el número de automóviles que posee el usuario que elige la opción, como sigue:

Para auto propio: $V_1(c, t, I) = 0.50 - 0.5t_1 - 2c_1/I + 2.5A$

Para auto compartido: $V_2(c, t, I) = 0.25 - 0.5t_2 - 2c_2/I + 1.5A$ …(10)

Para autobús: $V_3(c, t, I) = -0.5t_2 - 2c_2/I$

Con base en los cálculos para usuarios con ingreso anual de $20 mil, las utilidades y probabilidades asociadas de elección son las siguientes; donde aparece en negritas la mejor de las opciones:

			Utilidades No. de autos poseídos			Probabilidad No. de autos poseídos		
Modo	**Tiempo (hrs)**	**Costo ($)**	**0**	**1**	**2**	**0**	**1**	**2**
1: auto propio	0.30	20.00	-1.650	**0.850**	**3.350**	0.273	**0.623**	**0.839**
2: auto compartido	0.40	14.00	**-1.350**	0.150	1.650	**0.368**	0.309	0.153
3: autobús	0.75	10.00	-1.375	-1.375	-1.375	0.359	0.067	0.007

Ingreso anual
20

Este cálculo indica que para los usuarios que no tienen auto propio, participar en un esquema de auto compartido, con alguien que sí tiene auto y repartiendo los gastos, es más atractivo que usar auto propio en comparación a los que tienen al menos un auto (el hecho de que no posea auto, no significa que le sea imposible pedir prestado uno, y viajar al trabajo en “auto propio”; la probabilidad del evento no es exactamente cero). Tanto en el caso de los que tienen un auto como los que tienen dos, las probabilidades de usar el auto propio son mucho mayores que las de las otras alternativas.

Si ahora suponemos que se aplica una política de limitar el uso del auto propio mediante la implantación de parquímetros que eleven el costo de usar el automóvil, digamos de $20 a $30 para el uso de auto propio y de $14 a $16.50 para los que comparten auto, mientras que el servicio de autobús sigue sin cambios, los nuevos cálculos son:

			Utilidades No. de autos poseídos			Probabilidad No. de autos poseídos		
Modo	**Tiempo (hrs)**	**Costo ($)**	**0**	**1**	**2**	**0**	**1**	**2**
1: auto propio	0.30	30.00	-2.650	-0.150	**2.350**	0.134	0.426	**0.709**
2: auto compartido	0.40	16.50	-1.600	**-0.100**	1.400	0.384	**0.448**	0.274
3: autobús	0.75	10.00	**-1.375**	-1.375	-1.375	**0.481**	0.125	0.017

Ingreso anual
20

Este nuevo cálculo indica una migración de usuarios que no poseen auto hacia el uso del autobús, y otra migración de usuarios que poseen sólo un auto, al uso del auto compartido; debido a que el aumento de costo fue más elevado para los que usan su auto propio que para los que comparten.

Considerando las probabilidades de elección como una medida del porcentaje de usuarios que elegirán las opciones, es interesante observar los cambios en las probabilidades de elección de alternativas provocados por el aumento del costo por los parquímetros. La siguiente tabla muestra estos cambios, donde las entradas fueron calculadas restando al valor de la probabilidad de elección luego del aumento de costo por estacionamiento, el valor original de la probabilidad antes del aumento. La siguiente tabla muestra los resultados.

Variación de la probabilidad

	No. de autos poseídos		
Modo	**0**	**1**	**2**
1: auto propio	-0.138	-0.197	-0.130
2: auto compartido	0.016	0.139	0.121
3: autobús	0.122	0.058	0.010
Suma:	0.000	0.000	0.000

De esta tabla puede verse que en todos los casos disminuyó la probabilidad de elegir uso del auto propio; además, la suma en las columnas da cero, esto indica que lo perdido en una entrada se gana en las demás.

De este modo, para los usuarios que no poseen auto, la probabilidad de conseguir “auto propio” para viajar se redujo en 13.8%; la cual se sumó al uso de auto compartido en 1.6% y al de autobús en 12.2%. Para los usuarios que poseen un auto, la probabilidad de usar el propio se redujo en 19.7%, repartido en 13.9% para usar auto compartido y en 5.8% para uso del autobús. Y para los usuarios que poseen dos autos, la reducción de usar auto propio se redujo en 13%, que se repartió en un 12.1% para auto compartido y en 1% para uso de autobús.

Si en este modelo no se hubiera agregado la variable que mide el número de automóviles poseídos por los usuarios, el resultado hubiera sido el siguiente:

Costo original

Modo	**Tiempo (hrs)**	**Costo ($)**	**Utilidad**	**Probab**
1: auto propio	0.30	20.00	-1.650	0.273
2: auto compartido	0.40	14.00	**-1.350**	**0.368**
3: autobús	0.75	10.00	-1.375	0.359

Nuevo costo

Modo	**Tiempo (hrs)**	**Costo ($)**	**Utilidad**	**Probab**
1: auto propio	0.30	30.00	-2.650	0.100
2: auto compartido	0.40	16.50	-1.600	0.287
3: autobús	0.75	10.00	**-1.375**	**0.359**

En estos cálculos, con el costo original se pronosticaría el uso del auto compartido como la mejor opción, y para el nuevo costo la predicción sería el autobús como la mejor opción ignorando las posibilidades de participación en el modo de auto compartido, lo cual es un pronóstico poco realista.

2.3 Las variables en la modelación

En el desarrollo de un modelo Logit de elección discreta, la identificación de las variables explicativas de la conducta de los usuarios es una tarea básica que debe realizarse para que el modelo construido sea realista y consistente con los planteamientos teóricos de la situación de transporte modelada, así como con las políticas aplicables en ese contexto.

Como se comentó anteriormente, el enfoque probabilista con el que fue descrito el modelo Logit puede manejar ventajosamente carencias de información de los posibles factores que influyen en la decisión de los usuarios al considerar errores aleatorios en la percepción de la utilidad. Esto alivia mucho de la presión sobre los modeladores que no siempre pueden conocer o colectar toda la información que quisieran para modelar las elecciones de los usuarios.

Sin embargo, esta virtud del modelo Logit no implica que un buen modelo pueda construirse *con cualquier subconjunto de factores de influencia* en la decisión del viajero. Hay ciertas variables explicativas que representan factores que afectan la decisión del usuario y que es necesario incluir para tener un modelo útil, aunque no se puede decir que existe una lista universal de variables explicativas que siempre deben estar en todos los modelos de elección discreta.

La selección de variables adecuadas depende del objetivo perseguido con el modelo, de la aplicación que se le dará y de los datos disponibles; esta selección suele estar basada en la experiencia y visión de los modeladores que conocen el sistema de transporte estudiado y su pertinencia puede ser verificada con pruebas estadísticas de confianza y significación.

Horowitz et al (1986) proponen el uso de tres tipos de variable en los modelos: 1) variables de políticas de transporte, 2) variables socioeconómicas que describen características de los viajeros o grupos de interés y 3) variables que influyen en la elección de las opciones de transporte y que están relacionadas con las dos primeras; además, sugieren que en las funciones de utilidad siempre se añadan constantes específicas para todas las opciones excepto para una (la opción base).

El primer tipo de variable que mencionan Horowitz et al tiene que ver con el uso de los modelos para pronosticar la aplicación de medidas o políticas para controlar o mejorar el desempeño de los sistemas de transporte; ejemplos típicos son los pronósticos de elección de modo, cuando se prevé un aumento de tarifas en el transporte público o cuando se va a introducir un nuevo modo más rápido o de mejor respuesta ecológica. Los pronósticos serán de utilidad si el modelo incluye variables explicativas relacionadas con estas políticas; como pueden ser las tarifas de los autobuses, los tiempos de recorrido o la frecuencia de un tren ligero, la puntualidad de un servicio de tranvía (p, ej. medida como el porcentaje de llegadas a tiempo a las terminales), etc. Este tipo de variable correspondería a los atributos propios de la opción mencionados en la discusión sobre utilidad en la sección 2.1.

Las variables socioeconómicas que caracterizan a los viajeros o a los grupos de interés para el sistema de transporte estudiado sirven para distinguir los efectos de las políticas aplicadas al sistema, en los distintos estratos o grupos de usuarios. De esta manera, el modelo debería pronosticar el efecto que un aumento de tarifas en el transporte público tendría en los grupos de usuarios de más bajos ingresos; la atracción de usuarios hacia el servicio de autobús por una reducción tarifaria o por trato preferencial a estudiantes o personas de edad avanzada. Ejemplos de estas variables son el ingreso promedio anual de los distintos estratos de usuarios, el número de automóviles poseídos y la edad o el sexo de los usuarios. Este tipo de variable correspondería a la caracterización de los usuarios mediante atributos incluidos en la función de utilidad mencionada en la sección 2.1.

El tercer tipo de variable que mencionan Horowitz et al son las que influyen en las decisiones del usuario y que están relacionadas con las dos primeras. En el desarrollo de un modelo de elecciones discretas, es común encontrarse con variables que por sí mismas no son de interés para el contexto del sistema de transporte estudiado; pero que están relacionadas con las otras variables, tanto de política como de caracterización socioeconómica de los usuarios; y que por tanto, al excluirlas del modelo, generarían pronósticos equivocados.

Por ejemplo, si se considera en un modelo de elección los atributos de tiempo y costo del viaje (variables de política) e ingreso de los usuarios (variable socioeconómica), pero no es de interés saber si el usuario posee automóvil; la fuerte correlación que suele haber del alto ingreso en un individuo con la posesión de automóvil puede ser un factor importante que limite las posibilidades de pronóstico del modelo, si es que no incluye la variable de posesión de automóvil en su especificación.

La desagregación del tiempo en el viaje

Entre los atributos de interés para el usuario está el tiempo requerido para el viaje. Este tiempo, para describirlo con más detalle, es la suma del tiempo que el usuario pasa propiamente viajando más el tiempo que tarda esperando en terminal o caminando hacia ella. En general, el tiempo requerido por un viaje puede considerarse como el tiempo dentro del vehículo más el tiempo requerido fuera del vehículo para hacer uso de la opción de viaje.

La importancia de separar el tiempo de viaje en componentes está en que sus efectos sobre la percepción del usuario pueden ser distintos, pese a estar objetivamente medidos con un mismo cronómetro. De este modo, 10 minutos de viaje dentro del vehículo pueden percibirse como menos inconvenientes que 10 minutos de espera para abordar el vehículo en una parada o terminal. En general, la experiencia reportada en la literatura de modelación de elecciones discretas indica que los tiempos fuera de vehículo de una opción de viaje suelen percibirse con mayor incomodidad por los usuarios, que los tiempos dentro del vehículo.

De igual manera, puede detallarse más el tiempo fuera del vehículo separándolo en el tiempo de caminata o acceso hasta la parada o la terminal, más el tiempo de espera para abordar el vehículo; estas diferencias de percepción deberían reflejarse en los coeficientes de las respectivas variables en el modelo de elección que se construya para representar la situación.

Si un modelo de elección discreta usa una sola variable de tiempo que represente el tiempo total de viaje, entonces automáticamente considera el efecto de las variaciones de los tiempos dentro y fuera del vehículo como equivalentes para el usuario; y no podrá distinguir las reacciones de los usuarios a opciones de viaje en las que el tiempo de espera o de acceso a una alternativa resulte demasiado inconveniente.

En el siguiente ejemplo numérico se ilustra la desagregación del tiempo de viaje y su efecto en el pronóstico de las elecciones de los usuarios.

Considérense los tiempos de las opciones: 1) automóvil; 2) autobús separados en el tiempo dentro del vehículo y tiempo fuera de vehículo, como sigue:

	Tiempo (hrs)		
opción	**dentro del veh**	**fuera de veh**	**total**
1. automóvil	0.55	0.05	0.60
2. autobús	0.70	0.10	0.80

Tomando como atributo solamente el tiempo total del viaje en cada opción, las probabilidades de elección entre ellas están dadas por el Modelo 1:

$$P(1) = \frac{e^{-0.60}}{e^{-0.60} + e^{-0.80}} = 0.550$$

$$\cdots \text{(M1)}$$

$$P(2) = 1 - P(1) = 0.450$$

Con los atributos de los tiempos dentro y fuera del vehículo en cada opción, y la función de utilidad: $U = -0.5Td_k - 2Tf_k$ donde Td_k es el tiempo dentro del vehículo y Tf_k es el tiempo fuera del vehículo para la opción “k”, las probabilidades de elección son:

$$P(1) = \frac{e^{-0.5\times0.55-2\times0.05}}{e^{-0.5\times0.55-2\times0.05} + e^{-0.5\times0.70-2\times0.10}} = 0.544 \qquad \cdots \text{(M2)}$$

$$P(2) = 1 - P(1) = 0.456$$

Lo primero que se ve en los cálculos es que el modelo 1 asigna una probabilidad ligeramente mayor a la elección de automóvil que la asignada por el modelo 2; el cual considera las utilidades de los tiempos dentro y fuera del vehículo distintas.

Si hubiera un aumento en el tiempo de viaje, ya sea dentro o fuera del vehículo, el modelo 1 no podría distinguir el efecto por separado, pues sólo reconoce el efecto en el tiempo total del viaje. Así, por ejemplo si se desea estimar el efecto de un aumento de 9 minutos (0.15 hrs.) en dos escenarios:

a) Aumentando sólo el tiempo dentro del autobús, es decir: Td_2 + 0.15
b) Aumentando sólo el tiempo fuera del autobús, es decir: Tf_2 + 0.15

El modelo 1 sólo detectaría un aumento del tiempo total del autobús: 0.80 + 0.15 = 0.95, mientras que el modelo 2 distinguiría los casos a) y b). Los cálculos resultantes de la probabilidad de elegir automóvil usando los modelos 1 y 2 son como sigue:

Aumento de	Probab (automóvil)		Cambio en la Probab.	
tiempo	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 1	Modelo 2
---	0.550	0.544	---	---
Td_2 + 0.15	0.587	0.562	0.037	0.019
Tf_2 + 0.15	0.587	0.617	0.037	0.073

Como puede observarse de los cálculos, el modelo 1 sólo distingue un aumento en el tiempo total del traslado y pronostica un aumento de 3.7% en la probabilidad de elegir automóvil. El modelo 2, en cambio, pronostica solamente un aumento de 1.9% en la probabilidad de elegir automóvil cuando aumenta 9 minutos el tiempo de viaje dentro del autobús, pero pronostica un aumento de 7.3% en la probabilidad de elegir automóvil cuando el incremento de 9 minutos ocurre en el tiempo fuera del autobús.

Los factores de ponderación de estos tiempos dentro y fuera para el autobús (–0.5 para el tiempo dentro y –2 para el tiempo fuera) intentan reflejar el mayor efecto que tiene en la percepción de utilidad de los usuarios, cuando los retrasos ocurren en la espera de autobuses en paradas y terminales, en comparación con los retrasos a bordo de los vehículos cuando ya están en movimiento.

La desagregación de los tiempos de las opciones de viaje puede detallarse aún más considerando que los tiempos de viaje en automóvil son percibidos de manera completamente diferente de los tiempos relacionados con el autobús; con lo cual los modelos tendrían tiempos para cada opción, dentro y fuera, de modo que el tiempo dentro del automóvil, $Td_{1,}$ tendría algún coeficiente negativo en el caso de la función de utilidad para el automóvil, y tendría coeficiente cero en la función de utilidad para el autobús.

Los ejemplos anteriores muestran cómo la consideración de diversas variables que entran en un modelo puede cambiar los pronósticos obtenidos cuando se estiman efectos de políticas de transporte por aplicar. Como ejemplos de variables que han sido utilizadas en la modelación de elecciones discretas en el medio e transporte urbano, Horowitz et al (1986) señalan las siguientes:

1. Tiempo total de viaje o el logaritmo del tiempo total de viaje.
2. Tiempo dentro del vehículo o el logaritmo de ese tiempo
3. Tiempo fuera del vehículo
4. Tiempo fuera del vehículo dividido por la distancia recorrida
5. Tiempo y distancia de caminata para tener acceso al vehículo
6. Tiempo de espera en paradas o terminales
7. Tiempo entre llegadas de vehículos en el transporte público
8. Tiempo de transbordo
9. Número de transbordos en una ruta
10. Costo total del viaje
11. Costo total del viaje dividido por el ingreso anual del viajero
12. Costo de operar el automóvil dividido por el ingreso anual del viajero
13. Costo de estacionamiento dividido por el ingreso anual del viajero
14. Peaje dividido por el ingreso anual del viajero
15. Tarifa de autobús dividida por el ingreso anual del viajero
16. Ingreso anual del viajero
17. Número de miembros en el hogar del viajero
18. Número de automóviles que se poseen en el hogar: autos por trabajador en la familia; autos por licencia de conducir vigente.
19. Número de licencias de conducir vigentes en el hogar del viajero
20. Nivel de empleo en el lugar de trabajo del viajero
21. Variables mudas para indicar: si se trabaja en el sector comercial o financiero; si el viajero es jefe de familia; su sexo o edad, etc.

Una vez que el modelador ha identificado variables que le permitan razonablemente representar el problema de transporte de su interés, es necesario especificar el conjunto de opciones consideradas como disponibles para los usuarios. Este punto es tratado en la siguiente sección.

2.4 La determinación del conjunto de opciones

Una vez identificadas variables adecuadas para un modelo de elección discreta, es necesario determinar cuál es el conjunto de opciones que está disponible a los usuarios para su proceso de decisión.

Para que un conjunto de opciones sea útil al objetivo de modelar las elecciones de los usuarios, es conveniente que tenga tres características: 1) que las alternativas incluidas sean mutuamente exclusivas para el usuario, 2) que el conjunto de opciones sea exhaustivo y 3) que el número de opciones sea finito y manejable (Train, 2009). Las dos primeras características podrían parecer restrictivas, pero en la práctica pueden ser resueltas.

Por ejemplo, el requerimiento de que dos alternativas sean mutuamente exclusivas podría ser poco claro cuando un usuario utiliza varios modos para llegar a su destino; digamos primero en automóvil al estacionamiento de una terminal y luego en autobús. Entonces, las opciones podrían definirse como: a) sólo automóvil; b) sólo autobús; c) automóvil y autobús, las cuales resultan mutuamente exclusivas.

Del mismo modo, si un conjunto de opciones no es exhaustivo porque hay algunas que los usuarios no elegirán, podemos añadir al conjunto la opción “ninguna de las otras alternativas” con lo que el conjunto expandido de opciones resulta entonces exhaustivo.

En principio, el conjunto de opciones de un viajero consiste de todas las opciones existentes que tienen una probabilidad estrictamente mayor que cero de ser elegidas. Si se considera la elección del modo de transporte para un fin determinado (ir al trabajo, ir a la escuela, ir de compras, etc.), la aplicación práctica de este supuesto teórico llevaría a considerar diversas opciones de viaje que en la realidad son raramente usadas (p. ej. para ir al trabajo: caminata, ir a caballo, en bicicleta, en lancha, etc.) y para las cuales además sería bastante difícil conseguir datos.

De esta manera, desde un punto de vista práctico, la modelación de las elecciones de opciones de viaje no se altera demasiado si se eliminan las opciones que rara vez son usadas, y se consideran solamente aquellas cuya probabilidad de ser escogidas es lo suficientemente grande como para tener un valor práctico.

Para describir con mayor precisión el conjunto de opciones que se propondrá para la modelación, es común utilizar reglas de generación de opciones que permiten excluir con más seguridad algunas de ellas, sin incurrir en errores serios.

Así, la opción de viajar individualmente en automóvil podría ser excluida para los individuos que no poseen un vehículo. Ahora bien, si existe información de que algunos individuos que no poseen automóvil propio pueden conseguir uno –por ejemplo prestado por un tiempo, alquilado o proporcionado por la empresa para la que se trabaja– entonces la opción de viajar individualmente en automóvil debe ser considerada.

Un ejemplo del uso de estas reglas está en un estudio descrito por Ben-Akiva y Lerman (1985) realizado con datos de Washington D.C. y que consideraba tres opciones de viaje: a) viajar solo en automóvil; b) viajar en auto compartido; c) viajar en autobús urbano. Para determinar cuáles opciones podían estar disponibles a los individuos se usaron las tres reglas siguientes:

1. Cualquier individuo sin licencia de manejo no puede elegir la opción de manejar solo en automóvil.
2. Cualquier individuo de un hogar en el que no hay vehículo no puede elegir la opción de manejar solo en automóvil.
3. Cualquier individuo que viva o trabaje en un lugar donde no haya una parada de autobús a una distancia de a lo más media milla (800 m. aproximadamente) no puede elegir el modo de autobús.

Los datos que se puedan obtener de los individuos que eligen ayudan a esclarecer si se considera o no la opción para el conjunto de estas.

No hay un método riguroso de determinar el conjunto de opciones para un modelo de elección discreta. En casos como la elección de modo de transporte, el número de opciones imaginables es relativamente pequeño; en cambio para la elección de destino de viaje, las opciones pueden ser muchísimas, y el modelador podría verse obligado a considerar solamente las registradas efectivamente en una muestra de datos; o tal vez considerar todos los posibles destinos, pero agregándolos en zonas o centroides.

El siguiente ejercicio numérico ilustra cómo el cálculo de probabilidades de elección puede cambiar si se ofrece o no una alternativa en un conjunto de opciones.

Considerando las funciones de utilidad de las ecuaciones (10), con las siguientes características de las tres opciones: auto propio (viajar individualmente en auto); auto compartido y autobús:

Modo	**Tiempo (hrs)**	**Costo ($)**
1: auto propio	0.30	20.00
2: auto compartido	0.40	14.00
3: autobús	0.75	10.00

Considerando a individuos con ingreso anual de $20 mil y que sólo poseen un automóvil las funciones de utilidad son:

1. Para auto propio: $V_1(20, 0.30, 20) = 0.850$
2. Para auto compartido: $V_2(14, 0.40, 20) = 0.150$
3. Para autobús: $V_3(10, 0.75, 20) = -1.375$

Las respectivas probabilidades del modelo Logit se calculan como sigue:

$$
\begin{aligned}
P(1) &= \frac{e^{V_1}}{e^{V_1}+e^{V_2}+e^{V_3}} = \frac{e^{0.850}}{e^{0.850}+e^{0.150}+e^{-1.375}} = 0.623 \\
P(2) &= \frac{e^{V_1}}{e^{V_1}+e^{V_2}+e^{V_3}} = \frac{e^{0.150}}{e^{0.850}+e^{0.150}+e^{-1.375}} = 0.309 \qquad \cdots(11) \\
P(3) &= \frac{e^{V_1}}{e^{V_1}+e^{V_2}+e^{V_3}} = \frac{e^{-1.375}}{e^{0.850}+e^{0.150}+e^{-1.375}} = 0.067
\end{aligned}
$$

Si las ecuaciones (11) describen correctamente las elecciones de los individuos a las tres opciones de viaje, entonces para un individuo que no tuviera acceso al autobús –porque vive o trabaja en una zona alejada de las rutas de autobuses y sus paradas– el siguiente modelo Logit binomial describiría sus probabilidades de elegir solamente entre usar auto propio o elegir auto compartido, donde naturalmente P(3) = 0:

$$
\begin{aligned}
P(1) &= \frac{e^{V_1}}{e^{V_1}+e^{V_2}} = \frac{e^{0.850}}{e^{0.850}+e^{0.150}} = 0.668 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots(12) \\
P(2) &= \frac{e^{V_2}}{e^{V_1}+e^{V_2}} = \frac{e^{0.150}}{e^{0.850}+e^{0.150}} = 0.332
\end{aligned}
$$

Como puede verse, al considerar el conjunto de opciones con las tres alternativas: 1, 2 y 3 las probabilidades de elegir auto propio y auto compartido son de 62.3% y 30.9% respectivamente; mientras que si el conjunto de opciones se reduce a dos alternativas: 1 y 2 (ya que no se tiene acceso al autobús) las probabilidades de elegir auto propio y auto compartido cambian a 66.8% y 33.2% respectivamente.

La propiedad de IAI del modelo Logit explica este resultado. La proporción P(1)/P(2) en las ecuaciones (11) con tres opciones es: 0.623 / 0.309 = 2.014, que se mantiene exactamente igual que la proporción P(1)/P(2) en las ecuaciones (12): 0.668 / 0.332 = 2.014.

El ejemplo muestra cómo la decisión de incluir o no incluir a una opción dada, cambia las evaluaciones de la probabilidad de elegir las demás opciones.

El resultado anterior sugiere que la determinación del conjunto de opciones debe basarse en la experiencia y el juicio del modelador acerca del contexto de transporte que esté considerando, y debe hacerse con mucho cuidado, ya que el conjunto de opciones tiene una fuerte influencia en la asignación de probabilidades.

3 La estimación de parámetros en los modelos

Los ejemplos de modelación mostrados en las secciones anteriores utilizaron formas particulares de las funciones de utilidad asociadas a las distintas opciones, para luego calcular las probabilidades de elección y de ahí estimar los repartos de usuarios entre las alternativas. En la práctica, el modelador de un sistema de elecciones de transporte no conoce directamente la forma particular que tienen las funciones de utilidad ni los valores numéricos de los coeficientes asociados; cuando mucho, el modelador tiene una lista de variables que parecen pertinentes para modelar la conducta de los viajeros.

Para avanzar en la modelación de las elecciones de viaje, se necesita entonces proponer una forma de la función de utilidad y buscar un proceso para estimar los valores numéricos de los coeficientes que se encuentren en esta fórmula. En este capítulo se revisan los aspectos básicos de estas tareas.

3.1 El contexto estadístico del modelo

Para entender las acciones del usuario, el modelador muestrea las distintas situaciones que ocurren. Por ejemplo, para distintas combinaciones de costo y de tiempo de viaje, digamos en autobús y en automóvil, se observan las elecciones de los pasajeros. Basado en los datos de la muestra, el modelador busca una *regresión*; esto es, una función o una curva que se ajuste a los datos lo mejor posible a fin de poder estimar situaciones que aún no han sido observadas.

Estrictamente hablando, un modelo de regresión se construye para predecir el valor medio de una variable aleatoria de interés (p. ej. los km que viaja el usuario) cuando se conocen los valores de otras variables consideradas como explicativas (p. ej. costo del viaje, el tiempo de viaje, el número de transbordos, el ingreso del viajero, etc.) Formalmente, si la variable de respuesta es Y, el valor medio de esa variable cuando la variable explicativa X toma el valor x, es el valor esperado condicional de Y cuando X vale x: $E(Y \mid X = x)$, de modo que el modelo de regresión de Y respecto a X es alguna ecuación que expresa $E(Y \mid X = x)$ en términos de los valores x.

El caso más simple es cuando el valor medio de Y es una función lineal de su variable explicativa y se supone que Y se distribuye normalmente con varianza constante σ^2:

$$E(Y \mid X) = \beta_0 + \beta_1 x$$

donde β_0 y β_1 son parámetros que se deben estimar. Una formulación alterna de la ecuación de regresión anterior es la siguiente:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

en la que ε es un error aleatorio de media 0 y varianza σ^2 (Nelson, 2004).

Al modelar la elección de opciones podría preguntarse si es posible aplicar un modelo de regresión lineal ajustado por mínimos cuadrados ordinarios (MCO) para estimar el efecto de las elecciones de los usuarios, en vez de usar el enfoque de modelación Logit que se ha descrito en el capítulo 2. Hay razones por las que esto no es adecuado.

Para empezar, las elecciones de los usuarios pueden manifestarse como un "Sí" (asociado típicamente al valor "1") o un "No" (asociado al valor "0"), o también pueden verse como la proporción de usuarios que eligen una opción (p. ej. "Sí" al uso de automóvil).

Si consideramos un modelo lineal de los errores aleatorios de la utilidad, con una distribución uniforme, se tendría una función continua de las variables explicativas que no acota la respuesta entre 0 y 1; ya sea ésta discreta (0 ó 1) o sea la proporción de usuarios eligiendo una opción. El Modelo Logit, en cambio, acota la respuesta entre 0 y 1 como se muestra en la Figura 3.1.

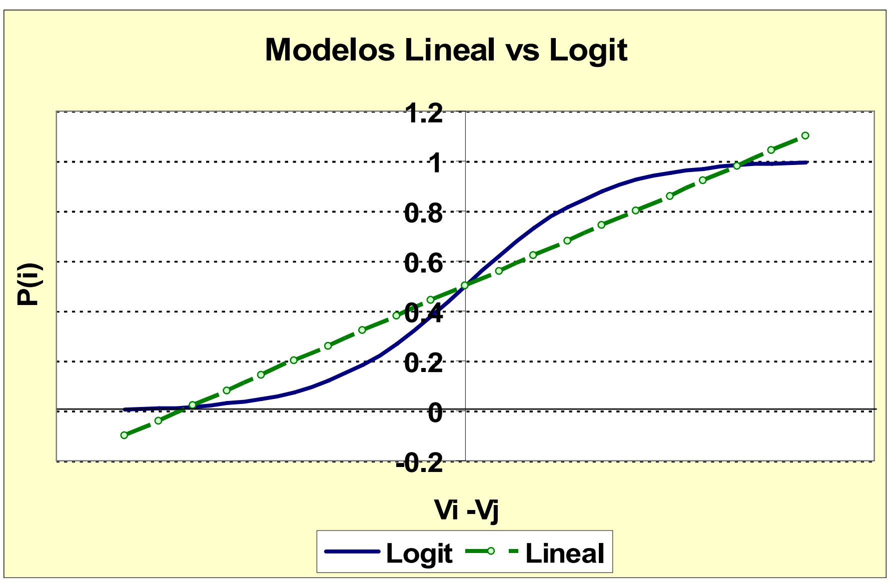


Figura 3.1. Comparación del Modelo Lineal y del Modelo Logit

Adicionalmente, el supuesto de varianza constante que requiere el modelo lineal de MCO para las respuestas de este tipo no se cumple. Esto puede notarse con la ecuación del modelo Logit para la probabilidad *P(i)* de que un usuario elija la opción "i":

$$P(i) = \frac{1}{1+e^{-(V_i - V_j)}}$$

De modo que en una muestra de n observaciones, con respuestas $y_1, y_2, \ldots, y_n$, cada una correspondiendo a distintas variables de decisión de los n distintos usuarios, $P_k = P[\, y_k = 1]$ es la probabilidad de que la respuesta del usuario k sea "1", resultando que cada y_k representa una variable aleatoria Bernoulli con probabilidad de éxito P_k, y la siguiente función de densidad:

$$P(y_k) = P_k^{y_k}(1-P_k)^{1-y_k} \qquad y_k \in \{0,1\} \quad k = 1,\ldots,n$$

Con lo cual la respuesta esperada y la varianza en cada observación k son las siguientes:

$$E(y_k) = P_k \; ; \quad Var(y_k) = P_k(1-P_k)$$

Ya que la varianza de y_k cambia con la media P_k, la que a su vez depende de las variables independientes, no puede entonces suponerse varianza constante entre las distintas observaciones. Este hecho invalida el supuesto de varianza constante en los errores requerido por el modelo lineal de Mínimos Cuadrados.

El modelo Logit resuelve las limitaciones del modelo de regresión lineal al acotar la respuesta entre 0 y 1, además de que asigna consistentemente probabilidad de 0.5 cuando la diferencia entre utilidades sistemáticas $V_i - V_j$ es cero; lo que representa la situación en la que al usuario le es indiferente elegir una opción u otra. El problema práctico de la estimación de un modelo Logit se comenta en la siguiente sección.

3.2 La estimación del modelo

En la estimación de un modelo de elección de los usuarios del transporte, como ya se mencionó en la sección anterior, existe el caso en que la respuesta sea una variable cualitativa; por ejemplo si se hace una encuesta sobre el potencial uso de un modo de transporte nuevo, el usuario puede contestar "Sí" (codificado como "1" para el modelo) o "No" (codificado como "0"). En general, los modelos de elección discreta tienen una variable de respuesta que toma los valores: 0, 1, 2…Otros ejemplos de este uso de la variable de respuesta son los siguientes:

1. Número de viajes a la semana, Y = 0, 1, 2, 3, …
2. Uso de cierto modo de transporte para ir al trabajo (p. ej. taxi), Y = 0 (“no”); Y = 1 (“sí”)
3. Conformidad con la calidad de un servicio de transporte, Y = 0 (“muy mala”); Y = 1 (“mala”); Y = 2 (“regular”); Y = 3 (“buena”); Y = 4 (“muy buena”).
4. Propósito del viaje, Y = 1 (“trabajo”); Y = 2 (“escuela”); Y = 3 (“compras”); Y = 4 (“visita médica”), etc.

En los ejemplos mostrados, es difícil establecer un esquema claro de regresión, dado que los valores de las variables de respuesta son en muchos casos meras etiquetas o especificaciones de rango y no valores numéricos con los que se pueda hacer estadística. Sin embargo, es posible emplear el marco de referencia de la regresión para construir modelos de elección en términos de las probabilidades de que los eventos descritos por esas etiquetas numéricas puedan ocurrir; es decir, se tratará de evaluar: P[evento “k” ocurra] = P[Y = *k*].

En el caso de un modelo binario donde la respuesta es Y = 0 ó Y = 1, y suponiendo que la utilidad de las elecciones es una función lineal de los atributos:

$$V = \beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_k x_k$$

la probabilidad en el modelo Logit sería:

$$P[Y = 1] = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_k x_k}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_k x_k}}$$

Para estimar los parámetros β_k del modelo Logit, dadas las características mencionadas, no es posible utilizar el método de mínimos cuadrados ordinarios; en particular por la condición de varianza no constante (condición llamada de *heterocedasticidad*); el procedimiento usado en la práctica es el método de máxima verosimilitud, que se detalla enseguida.

El método de máxima verosimilitud

Igual que otros métodos de estimación de parámetros de un modelo que se encuentran en la literatura estadística, el de máxima verosimilitud utiliza la información de una muestra de la población estudiada para estimar los parámetros del modelo Logit que se haya propuesto. La idea básica de este método es encontrar los valores numéricos de los parámetros β_k que hacen que bajo el modelo propuesto, la probabilidad de observar los valores obtenidos en la muestra sea máxima.

Para aclarar el funcionamiento del método, supóngase que se tiene un modelo en el que sólo hay un parámetro a estimar β, y que existe una muestra de n observaciones independientes: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de las elecciones de los usuarios del sistema de transporte de interés.

Si la función de densidad de probabilidad se denota por f (que en el modelo Logit es la densidad logística definida en la ecuación (6) del capítulo 2), resulta que esta densidad depende en general tanto de los valores x_k de la muestra como del parámetro β: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \beta)$. Dado que los valores x_k de la muestra son fijos, entonces la densidad f dependerá del valor de β. Además, ya que los n valores muestrales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fueron obtenidos independientemente, la densidad de probabilidad conjunta de la muestra es:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \beta) = f(x_1; \beta)\times f(x_2; \beta)\times\ldots\times f(x_n; \beta)$$

La expresión anterior se llama la *función de verosimilitud L (Likelihood function*, en inglés):

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \beta) = f(x_1; \beta)\times f(x_2; \beta)\times\ldots\times f(x_n; \beta) \quad \ldots(1)$$

y muestra claramente que su valor depende del parámetro β. El término *verosimilitud* se relaciona con el hecho de que dados los valores fijos de las x_k de la muestra, al variar β cambia el valor de L, y mientras mayor sea el valor de L, más verosímil parece que en un muestreo se obtengan los valores x_k observados en la muestra (Nelson, 2004).

La especificación de la función de verosimilitud L de la ecuación (1) y su interpretación sugiere la idea del método de estimación, que consiste en encontrar el valor del parámetro β que maximiza $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \beta)$, dados los valores x_k de la muestra.

Esto plantea inmediatamente un problema de maximización que puede ser resuelto por los métodos de la optimización clásica usando la derivada de L respecto a β e igualando a cero para hallar los valores críticos β^* que cumplen la condición de primer orden:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \beta^*)}{\partial \beta} = 0$$

El uso de derivadas parciales en la notación anterior indica formalmente la dependencia de L tanto de los valores de las x_k como del parámetro β.

El método puede ser extendido para modelos que tengan varios parámetros por estimar: β_1, $\beta_2, \ldots$, $\beta_{j,}$, con lo cual las condiciones de primer orden (acerca de la anulación de la primera derivada) serían:

$$\frac{\partial L(X,B)}{\partial \beta_1}=0; \quad \frac{\partial L(X,B)}{\partial \beta_2}=0; \quad \cdots \quad , \frac{\partial L(X,B)}{\partial \beta_j}=0 \qquad \cdots(2)$$

donde $\quad X=(x_1,x_2,\cdots,x_n); \quad B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$

Considerando la definición de L en la ecuación (1) como un producto de las funciones de densidad marginales *f(*x_k; β) , el sistema de ecuaciones simultáneas (2) suele replantearse con las derivadas del *logaritmo natural de L* en vez de la propia L como sigue:

$$\frac{\partial \log L(X,B)}{\partial \beta_1}=0; \quad \frac{\partial \log L(X,B)}{\partial \beta_2}=0; \quad \cdots \quad , \frac{\partial \log L(X,B)}{\partial \beta_j}=0 \qquad \cdots(3)$$

donde $\quad X=(x_1,x_2,\cdots,x_n); \quad B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$

Esto se hace para aprovechar las propiedades de la función logaritmo y reemplazar la derivación de un producto por la derivación de una suma. Ya que *log L(X, B)* es función monótona creciente de L, se tendrá un máximo justamente en los mismos puntos donde L tenga máximo.

Dos propiedades deseables en los estimadores de parámetros β_1, β_2,…, β_j de un modelo son: a) que sean *estimaciones eficientes*, que en lenguaje estadístico significa que sean de varianza mínima, y b) que sean *estimaciones insesgadas;* es decir, que su valor esperado coincida con el verdadero valor del parámetro.

Respecto de estas propiedades, si para un parámetro β_k existe un estimador eficiente, este puede encontrarse con el método de máxima verosimilitud (Kreyszig, 1970); por otra parte, aunque el método puede generar estimadores sesgados, teniendo una muestra de buen tamaño puede obtenerse un error muy pequeño. Ortúzar y Willumsen (1994) señalan que resolviendo el sistema de ecuaciones (3), se obtiene el vector de parámetros estimado **B*** = (**β^*_1, β^*_2,…, β^*_j**) que tiene una distribución normal *N(B, S^2)*, donde

$$S^2=\frac{-1}{E\left(\frac{\partial^2 \log L(X,B)}{\partial B^2}\right)}$$

y además de que $-2 \log L(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ se distribuye asintóticamente como χ^2 con *n* grados de libertad, de manera que aun cuando el estimador **B** pudiera resultar sesgado en el caso de muestras pequeñas, para muestras suficientemente grandes (se recomiendan de 500 a 1000 observaciones), el error de sesgo puede considerarse despreciable.

Un ejemplo de estimación simple

El siguiente ejemplo numérico de un modelo Logit binario ilustra el proceso de estimación de parámetros con el método de máxima verosimilitud.

Considérese un caso en el cual la elección sea entre usar automóvil propio o autobús, donde la única variable de interés es el tiempo de viaje. Entonces la componente determinista de la función de utilidad es de la forma: $V = -\beta T$, donde β es el parámetro por estimar y T es el tiempo de viaje; el signo negativo indica la "desutilidad" del gasto de tiempo necesario para hacer el viaje. Considerando que se tiene una muestra de la respuesta de cinco individuos con las características siguientes (aunque es una muestra muy pequeña, sirve para ilustrar el cálculo):

		Tiempo de viaje (mins)	
Caso	**Elección**	**T1. Auto propio**	**T2. Autobús**
1	Auto propio	43	14
2	Autobús	33	11
3	Auto propio	52	41
4	Autobús	36	54
5	Autobús	47	33

Con las elecciones de los individuos en la muestra, las probabilidades serían las siguientes:

Elección	**Probabilidad de la observación**
Auto propio	P1 = exp(-43a) / (exp(-43a) + exp(-14a))
Autobús	P2 = exp(-11a) / (exp(-33a) + exp(-11a))
Auto propio	P3 = exp(-52a) / (exp(-52a) + exp(-41a))
Autobús	P4 = exp(-54a) / (exp(-36a) + exp(-54a))
Autobús	P5 = exp(-33a) / (exp(-47a) + exp(-33a))

Así que la probabilidad L(a) de haber obtenido la muestra completa es:

$$L(a) = P_1 \times P_2 \times P_3 \times P_4 \times P_5$$

es decir:

$$L(a)=\frac{\exp(-43a)}{\exp(-43a)+\exp(-14a)}\times\frac{\exp(-11a)}{\exp(-33a)+\exp(-11a)}\times\frac{\exp(-52a)}{\exp(-52a)+\exp(-41a)}\times$$
$$\frac{\exp(-54a)}{\exp(-36a)+\exp(-54a)}\times\frac{\exp(-33a)}{\exp(-47a)+\exp(-33a)}$$

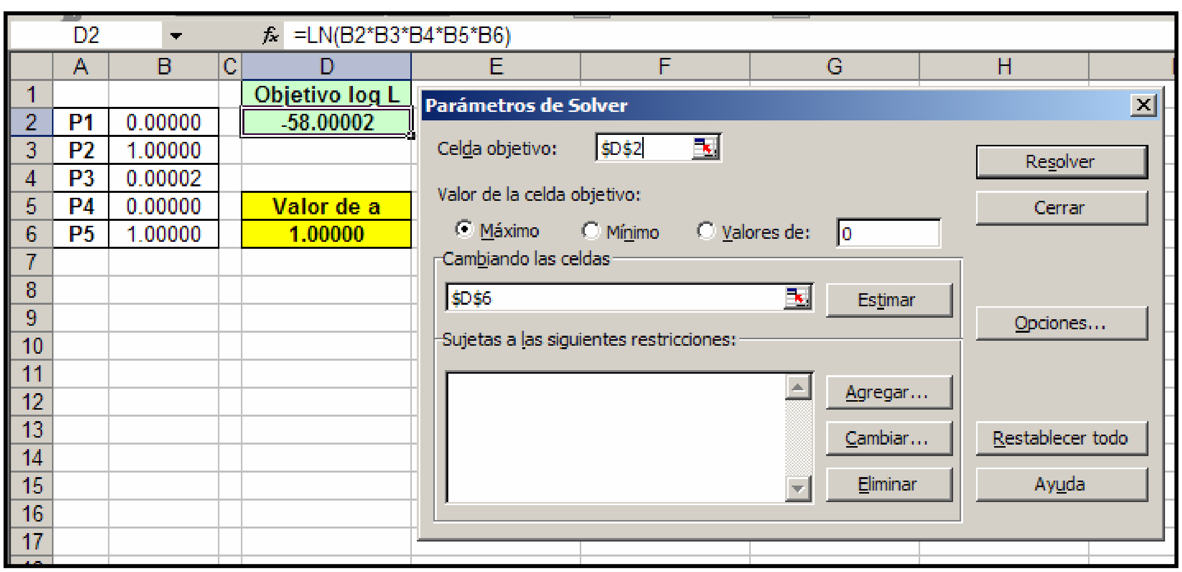
que luego de simplificar resulta:

$$L(a)=\frac{1}{1+\exp(29a)}\times\frac{1}{1+\exp(-22a)}\times\frac{1}{1+\exp(11a)}\times\frac{1}{1+\exp(18a)}\times\frac{1}{1+\exp(-14a)}$$

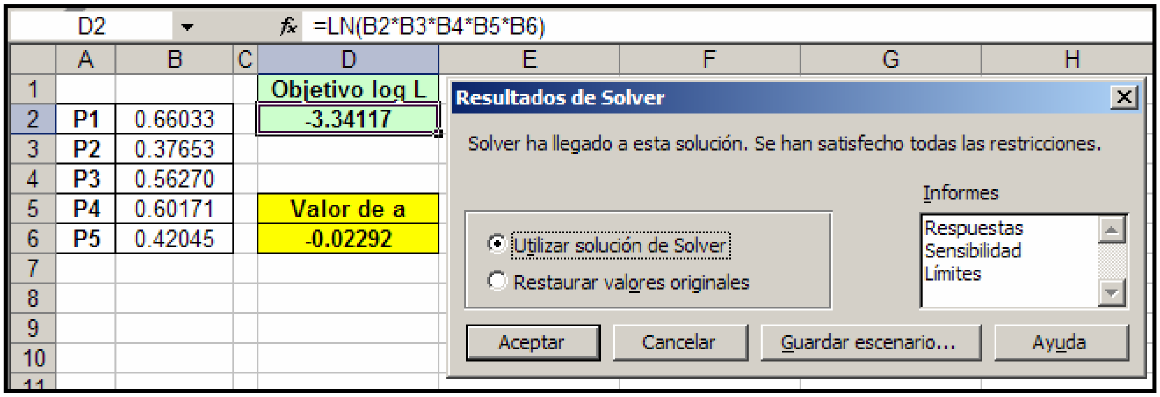
La función *L(a)* depende del parámetro *a* del modelo, y es llamada la función de verosimilitud para este. Para facilitar el cálculo, el procedimiento para maximizar el valor de *L(a)* se efectúa sobre el logaritmo de L(a) que transforma los productos en sumas de logaritmos como indica la ecuación (4):

$$\log L(a)=-\{\log(1+\exp(29a))+\log(1+\exp(-22a))+\log(1+\exp(11a))+$$
$$\log(1+\exp(18a))+\log(1+\exp(-14a))\} \qquad \cdots(4)$$

La búsqueda del valor de *a* que maximiza la ecuación anterior plantea un problema de optimización no lineal, para el cual suelen usarse algoritmos de gradiente, para aproximar la solución óptima. En este ejemplo se utiliza el complemento *Solver* de Excel para encontrar el valor óptimo. Al inicio se tiene la siguiente pantalla de datos y detalles para la optimización; el valor inicial de *a* se tomó como 1:



Al término de la rutina de optimización, se obtiene la solución óptima como sigue:



Graficando el valor de Log L(a) de la ecuación (4) contra el valor del parámetro *a*, se puede observar la ocurrencia de un máximo alrededor de *a* ≈ *–0.023* como aparece en la Figura 3.2. Si bien la determinación del valor óptimo del parámetro *a* no tiene tanta precisión en la gráfica mostrada, en ella se puede apreciar la forma en que varía el logaritmo de la función de verosimilitud Log (L) con distintos valores de *a*. La idea general de procedimiento de máxima verosimilitud puede extenderse al caso en que hay que estimar varios parámetros y haya más de dos elecciones.

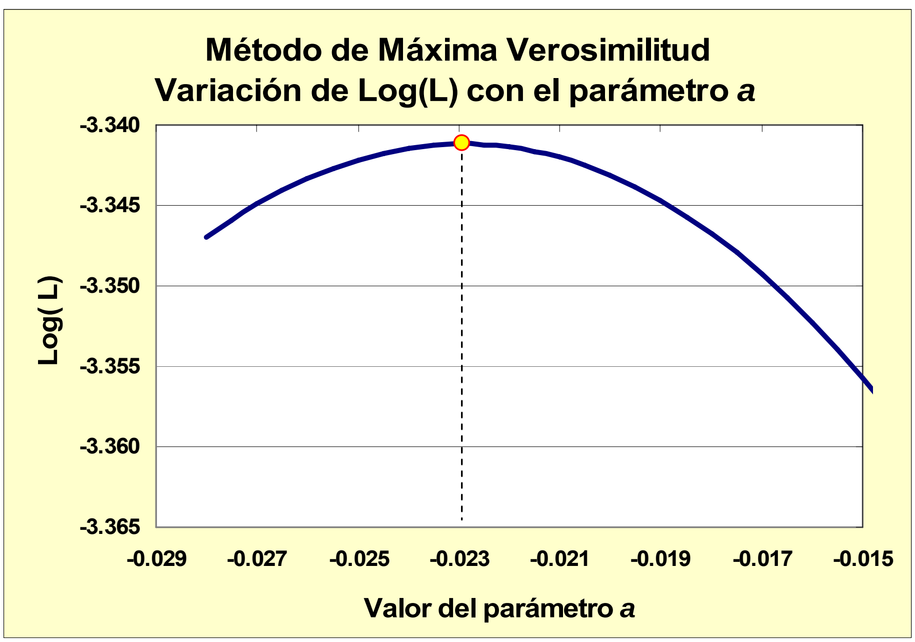


Figura 3.2. Método de máxima verosimilitud. Log(L) vs parámetro *a*.

De la solución de Solver se tiene entonces la estimación del modelo Logit binario como:

$$P(auto) = \frac{\exp(-0.2292T_1)}{\exp(-0.2292T_1) + \exp(-0.2292T_2)} = \frac{1}{1 + \exp\left(-0.2292\left(T_2 - T_1\right)\right)}$$

$$P(autobus) = 1 - P(auto)$$

La Figura 3.3 muestra la curva de probabilidad de elegir automóvil contra valores de la diferencia de tiempo de autobús menos tiempo de auto: $T_2 - T_1$.

La curva muestra lo siguiente: a medida de que esta diferencia aumenta, o sea con mayores tiempos de autobús, la probabilidad de elegir auto se acerca a uno.

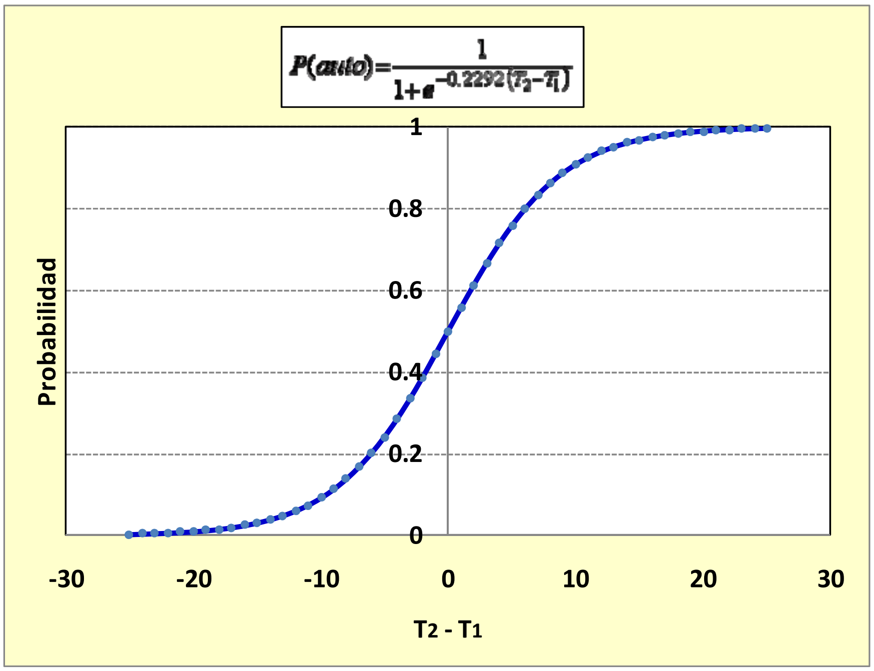


Figura 3.3. Probabilidad de elegir auto para el ejemplo automóvil vs autobús

Un ejemplo con constante específica de modo

En este ejemplo se considera un modelo Logit binario con dos alternativas: 1) automóvil propio y 2) transporte público, con el único atributo del tiempo de viaje y en el cual se tiene una constante específica de modo para la opción del automóvil. Considerando las funciones de utilidad como lineales en el atributo del tiempo, las utilidades sistemáticas para el auto V_1, y para el transporte público V_2, son:

$$V_1 = \beta_1 - \beta_2 T_A$$
$$V_2 = -\beta_2 T_{TP}$$

Donde T_A es el tiempo de recorrido en automóvil y T_{TP} es el tiempo de recorrido en transporte público. Los parámetros del modelo son: β_1 que es la constante específica para la opción de auto propio y β_2 que es el coeficiente para el tiempo de traslado. Entonces, un modelo Logit binario para las probabilidades de elección es:

$$P(Auto) = \frac{e^{\beta_1 - \beta_2 T_A}}{e^{\beta_1 - \beta_2 T_A} + e^{-\beta_2 T_{TP}}} = \frac{1}{1 + e^{-\beta_1 + \beta_2 (T_A - T_{TP})}}$$

$$P(Trans.Pub) = 1 - P(Auto) = \frac{1}{1 + e^{\beta_1 - \beta_2 (T_A - T_{TP})}} \quad \ldots(5)$$

Los datos para el ejemplo están en la siguiente tabla, generada por simulación suponiendo que $\beta_1 = 0.62$ y $\beta_2 = 0.17$. Las columnas “Auto” y “Tr. Púb.” son minutos de recorrido en cada opción; la columna “Difer A – TP” es la diferencia tiempo en auto menos tiempo en transporte público, y la columna “Elección” indica la decisión de elegir Transporte Público (Sí o No).

N	Auto	Tr. Púb	Difer A-TP	Elec-ción	N	Auto	Tr. Púb	Difer A-TP	Elec-ción	N	Auto	Tr. Púb	Difer A-TP	Elec-ción
1	26.2	40.7	-14.5	No	**11**	96.0	94.2	1.8	Sí	**21**	75.8	78.3	-2.5	Sí
2	81.1	82.5	-1.4	Sí	**12**	34.9	46.4	-11.5	No	**22**	32.3	44.6	-12.3	No
3	55.0	61.6	-6.6	No	**13**	12.3	39.0	-26.6	No	**23**	85.5	86.0	-0.5	Sí
4	36.3	47.4	-11.1	No	**14**	33.6	45.5	-11.9	No	**24**	58.6	64.5	-5.9	No
5	68.3	72.2	-3.9	No	**15**	122.7	110.2	12.4	Sí	**25**	27.9	41.7	-13.8	No
6	46.6	55.1	-8.4	Sí	**16**	95.4	93.7	1.7	Sí	**26**	104.8	100.6	4.2	Sí
7	73.0	76.0	-3.0	Sí	**17**	122.7	110.2	12.4	Sí	**27**	26.2	40.7	-14.5	No
8	14.7	37.1	-22.4	No	**18**	76.2	78.6	-2.4	Sí	**28**	129.3	102.8	26.5	No
9	95.4	93.7	1.7	Sí	**19**	115.0	107.2	7.8	Sí	**29**	122.7	110.3	12.5	Sí
10	109.6	103.9	5.7	Sí	**20**	78.6	80.5	-1.9	Sí	**30**	47.6	55.8	-8.2	No

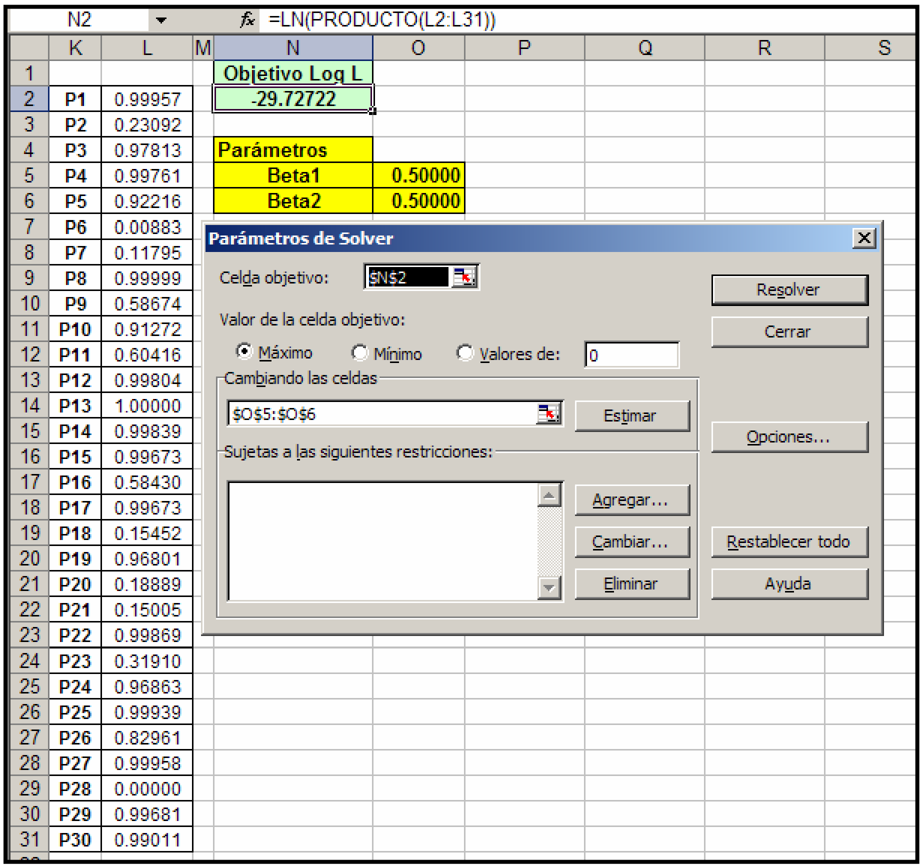
Con los datos de la muestra obtenida, la función de verosimilitud para este modelo resulta:

$$L(\beta_1, \beta_2) = \frac{1}{1 + \exp(-\beta_1 + (-14.5)\beta_2)} \times \frac{1}{1 + \exp\left[\beta_1 - (-1.4)\beta_2\right]} \times \frac{1}{1 + \exp(-\beta_1 + (-6.6)\beta_2)} \times \cdots \times \frac{1}{1 + \exp(-\beta_1 + (-8.2)\beta_2)}$$

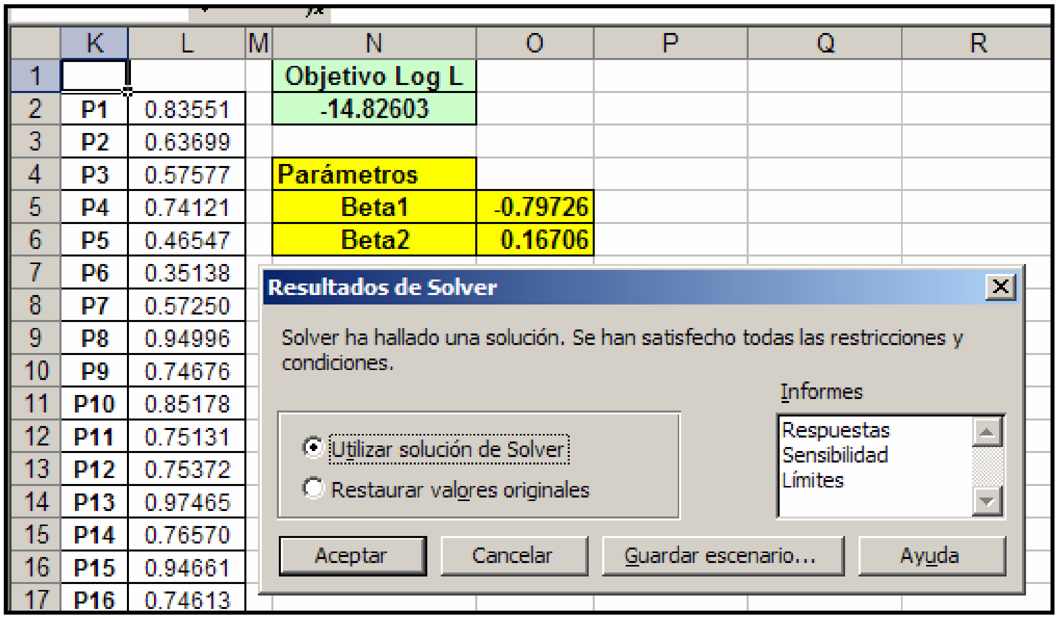
que luego de simplificar y tomar logaritmo resulta:

$$\log L(\beta_1, \beta_2) = -\{\log(1+\exp(-\beta_1 - 14.5\beta_2)) + \log(1+\exp(\beta_1 + 1.4\beta_2)) + \log(1+\exp(-\beta_1 - 6.6\beta_2)) + \cdots + \log(1+\exp(-\beta_1 - 8.2\beta_2))\}$$

La estimación de los parámetros del modelo plantea un problema de optimización no lineal, para encontrar los valores β_1 y β_2 que maximizan *log L(*β_1 *,* β_2*)*. Utilizando Solver de Excel, la pantalla inicial de datos del problema es como sigue:



Al resolver, se obtiene la solución óptima de la pantalla de salida de Solver que se ve enseguida:



Por lo que el modelo puede ser propuesto como

$$P(Auto) = \frac{1}{1+e^{0.79726 \;\; +0.16706\;(T_A - T_{TP})}}$$

$$P(Trans.Pub) = \frac{1}{1+e^{-0.79726 \;\; -0.16706\;(T_A - T_{TP})}}$$

En los dos ejemplos mostrados, la aplicación del método de máxima verosimilitud sigue el mismo principio de calcular los valores de los parámetros del modelo que maximizan al logaritmo de la función de verosimilitud.

En modelos en los que hay más de dos parámetros y en los que hay más de dos opciones también; se puede, en principio, seguir el mismo método. La diferencia es la complejidad de la tarea de cálculo requerida; ya que con muestras grandes, la función de verosimilitud tendrá una expresión tan larga como el tamaño de la muestra. En la práctica se utilizan rutinas estadísticas de paquetes especializados, que además del ajuste de los parámetros ofrecen medidas de la calidad estadística de los resultados.

Con los datos de este ejemplo, se estimaron los parámetros del modelo con el paquete estadístico JMP v.9.0 usando la rutina de ajuste de regresión logística. Para ello la variable “Elección” fue ingresada como Respuesta Categórica (*Categorical Response*) mientras que la variable “Difer A –TP” lo fue como variable independiente o regresor Continuo (*Continuous Regressor*).

Los resultados del paquete estadístico aparecen en la Figura 3.4.

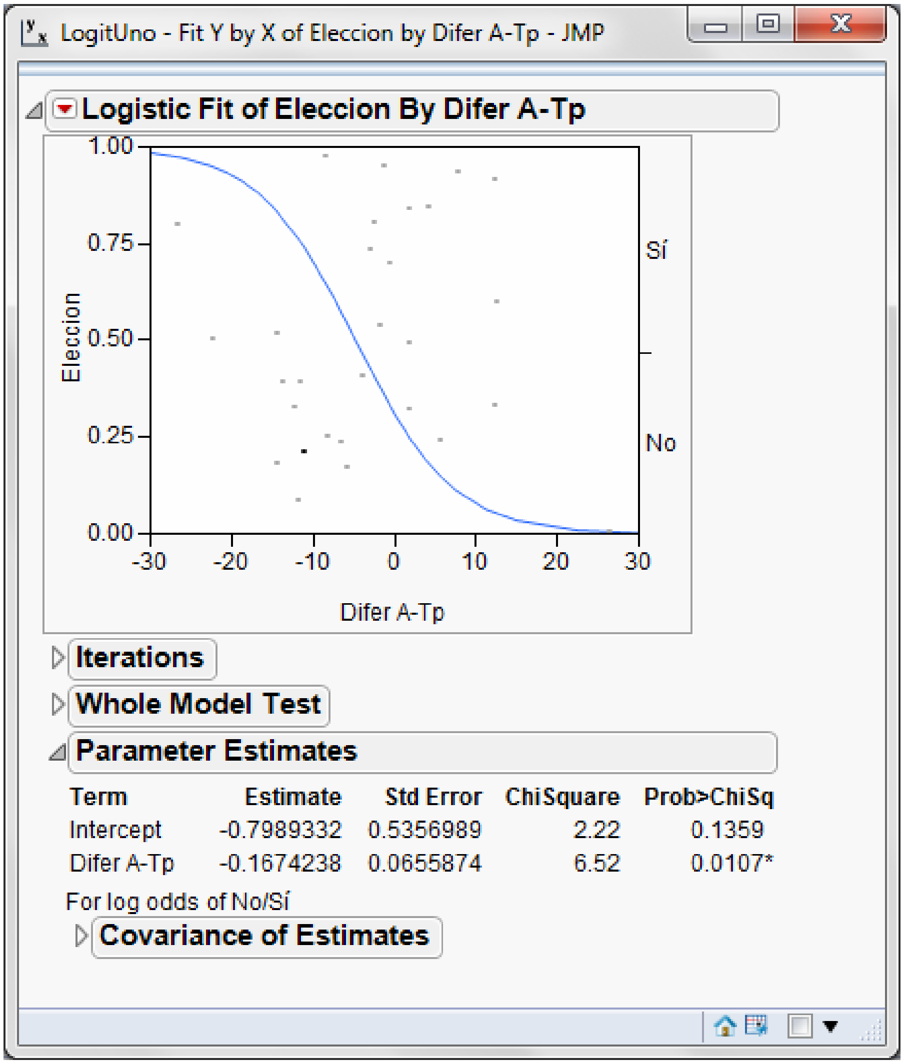


Figura 3.4. Regresión del modelo Logit con el paquete JMP v.9.0.

Los parámetros estimados por el paquete son: $\beta_1 = -0.7989332$, $\beta_2 = -0.1674238$; estos valores estimados son cercanos a los calculados en el proceso de maximización de Log (L).

La curva logística en la sección “Logistic Fit” de la pantalla de resultados del paquete muestra cómo a medida que la diferencia de tiempo Auto contra Transporte Público se reduce (o sea menores tiempos en auto), la probabilidad de elegir auto se acerca a uno y viceversa, cuando esta diferencia aumenta (menores tiempos en transporte público) la probabilidad de elegir auto se acerca a cero.

Es importante notar el signo negativo en los estimadores del paquete estadístico; esto tiene que ver con el cálculo de estos parámetros para la fórmula de la probabilidad de elegir auto propio, dada en las ecuaciones (5); pues la variable independiente continua fue la diferencia de tiempos Auto – TransPúblico, y la respuesta fue “Sí” cuando eligieron auto, y “No” cuando eligieron transporte público.

En la pantalla de salida de resultados del paquete, puede notarse que en la sección de “Estimación de Parámetros” (Parameter Estimates) junto a los valores estimados aparecen el error estándar de la estimación y el valor de una prueba χ^2; además en la parte superior aparece un botón de “Prueba Completa del Modelo” (Whole Model Test).

Estos datos adicionales dan información de la calidad estadística de los parámetros estimados y sirven para guiar al modelador en el refinamiento del modelo, para tener una mejor representación. Esto es una ventaja del paquete estadístico en comparación con la mera estimación de los parámetros con el proceso de maximizar Log(L). En la sección que sigue se tratan estos puntos.

3.3 La calidad estadística del ajuste

Una vez que los parámetros del modelo han sido estimados, conviene examinar la precisión de la estimación y la significancia de los coeficientes calculados.

La precisión de la estimación se refiere a determinar el margen de error que tiene la estimación, y la significancia se refiere al nivel de contribución que una variable aporta al modelo con su coeficiente.

La precisión de la estimación

En la pantalla de salida de JMP aparece una medida de la precisión de la estimación. Esta medida es el *error estándar (“Std error”)* reportado para cada uno de los parámetros estimados, y aparece en la misma línea de los valores estimados en el reporte estadístico. Para el ejemplo resuelto con el paquete JMP, los errores estándar que están en la Figura 3.4 son (a cinco cifras decimales):

Error estándar del estimado β_1 = 0.53570

Error estándar del estimado β_2 = 0.06559

Con estos errores estándar, si el modelo ha sido especificado adecuadamente, se pueden calcular los intervalos de confianza para los estimadores; el nivel de confianza más común en la práctica es del 95%. Así, los intervalos de confianza al 95% para los estimados de β_1 y β_2 se calculan como sigue (a cinco cifras decimales):

Intervalo del 95% de confianza β_1 =

$$-0.79893 \pm 1.96\times0.53570 = \mathbf{[\ -1.84890,\ 0.25104\ ]}$$

Intervalo del 95% de confianza β_2 =

$$-0.16742 \pm 1.96\times0.06559 = \mathbf{[\ -0.29598,\ -0.03887\ ]}$$

En este ejemplo se puede apreciar que la precisión de estimación de β_2 es mucho mejor que la de β_1. Si se quiere obtener intervalos de confianza del 90% o del 99%, solamente hay que cambiar el valor crítico 1.96 del cálculo del intervalo de confianza por 1.645 para el caso del 90% de confianza o por 2.575 para el caso del 99%.

La significancia de los coeficientes

En lenguaje estadístico *significativo* indica la capacidad de una variable independiente x_k de contribuir a explicar la respuesta observada, y numéricamente, esto equivale a pedir que el parámetro para esta variable, β_k *sea estadísticamente distinto de cero*. Para verificar esta condición se usan *pruebas de significancia* de los parámetros del modelo, mediante diferentes hipótesis sobre la posibilidad de que uno o varios parámetros sean 0.

En el proceso de estimación de los coeficientes β_1 y β_2 del ejemplo mediante la maximización de la función Log(L) se manipulan los datos de la muestra, los cuales son variables aleatorias observadas para el modelo de interés. De estos cálculos, con estas variables aleatorias, surge la variable aleatoria "t" definida por el cociente siguiente (**no confundir con la distribución *t de Student)***:

$$t = \frac{\beta_k}{ErrorEstándar\ \ de\ \ \beta_k}$$

y que resulta estar distribuida normalmente **N(0, 1),** por lo cual es posible plantear la cuestión de si el coeficiente β_k es significativamente distinto de cero o no (Ortúzar y Willumsen, 1994). Es decir, se cuestiona si el valor estimado para el coeficiente β_k resultó distinto de cero debido a la variación estocástica de las variables de la muestra, o si en realidad el coeficiente vale cero.

Técnicamente se plantea una prueba de hipótesis: la hipótesis nula de que $\beta_k = 0$ contrastada con la hipótesis alterna de que $\beta_k \neq 0$. Si un coeficiente resulta estadísticamente igual a cero, eso indica que la variable asociada no puede aportar información al modelo, y por tanto debe ser retirada de este. Así, el estadístico de esta prueba de significancia viene a ser la variable *"t"* . Por lo que con un nivel de significación del 5% (o nivel de confianza del 95%) valores de "*t*" mayores o iguales a 1.96 indican el rechazo de la hipótesis nula $\beta_k = 0$, mientras que valores menores de 1.96 indican que el coeficiente en realidad no aporta información al modelo y es recomendable descartar su variable asociada o cambiar el modelo.

Para el ejemplo mostrado, los valores de "*t*" son los siguientes:

Coeficiente	Estimado	Error	Variable "t"
β_1	**-0.79893**	**0.53570**	**-1.49138**
β_2	**-0.16742**	**0.06559**	**-2.55268**

Estos resultados indican que el coeficiente β_2 es significativo para el modelo; es decir, la variable de A – Tp sí aporta información para explicar las decisiones de los usuarios modelados, mientras que el coeficiente β_1 -que es la constante específica para el modo automóvil propio- no es significativo, y en principio podría ser desechada del modelo.

Horowitz et al (1986) dan una regla empírica para la decisión de eliminar una variable de un modelo por el valor de la variable "t" mencionada. De acuerdo con ellos, si el valor "t" para una variable está en el intervalo de valores [–1, 1] debería en principio ser descartada del modelo.

Por otra parte, recomiendan que antes de desechar una variable cuyo coeficiente haya resultado con un valor "t" bajo, conviene examinar la especificación del modelo para verificar si no hay errores.

Por ejemplo, si fue usado un modelo lineal, y la influencia de la variable considerada es de tipo cuadrático, es muy posible que obtenga valores bajos de la "t". Cambiando en el modelo, esta variable por su cuadrado podría mejorar la prueba de la "t" y entonces esta nueva representación sería significativa para el modelo.

Otro aspecto por cuidar con el criterio de la "t", es que si el coeficiente estimado resulta significativo por tener asociado un valor alto de "t", *debe verificarse que el signo del coeficiente sea consistente con el atributo de utilidad que explica*.

Así, si el atributo es el costo del viaje, el coeficiente asociado debe ser negativo; y si el atributo es el *ahorro de tiempo*, el coeficiente debe ser positivo. Por ejemplo, si el coeficiente de ahorro de tiempo de viaje en un modelo resultara –0.75 y la "t" asociada fuera –2.98, el modelo está mal especificado y debe revisarse.

En la Figura 3.5 aparecen los resultados del paquete JMP para la estimación en su sección de Prueba Completa del Modelo (Whole Model Test)

Iterations

Whole Model Test

Model	-LogLikelihood	DF	ChiSquare	Prob>ChiSq
Difference	5.916632	1	11.83326	0.0006*
Full	14.811068			
Reduced	20.727699			

RSquare (U)	0.2854
AICc	34.0666
BIC	36.4245
Observations (or Sum Wgts)	30

Measure	Training	Definition
Entropy RSquare	0.2854	1-Loglike(model)/Loglike(0)
Generalized R-Square	0.4352	(1-(L(0)/L(model))^(2/n))/(1-L(0)^(2/n))
Mean -Log p	0.4937	∑ -Log(ρ[j])/n
RMSE	0.3507	√ ∑(y[j]-ρ[j])²/n
Mean Abs Dev	0.2872	∑ |y[j]-ρ[j]|/n
Misclassification Rate	0.1000	∑ (ρ[j]≠ρMax)/n
N	30	n

Parameter Estimates

Figura 3.5. Pruebas de bondad de ajuste del modelo Logit con el paquete JMP v.9.0.

De manera alterna al criterio de significancia de la variable "t" ya mencionado, hay otra prueba basada en la distribución χ^2. La idea es comprobar si al menos una de las variables del modelo influye en la respuesta; es decir, si al menos uno de los atributos considerados en la función de utilidad realmente influye en la elección del usuario.

En el caso general, con k variables, se tiene la hipótesis nula: $H_0 : b_1 = \dots = b_k = 0$ y la hipótesis alterna $H_1 : b_j \neq 0$, para alguna $j \in \{1, \dots, k\}$. La estadística de prueba usada es el *cociente de verosimilitud* definido en la ecuación (6), el cual tiene una distribución χ^2 con k grados de libertad.

Cuando H_0 satisface este cociente, se expresa como sigue:

$$-2Ln\frac{L(b_0^*)}{L(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_k)} \qquad (6)$$

donde b_0^* es la estimación del parámetro b_0, sin considerar los parámetros restantes (ya que bajo H_0 se supone $b_1 = \ldots = b_k = 0$) y L es la función de verosimilitud.

Sin embargo, esta prueba da poca información sobre el modelo; pues si la hipótesis nula es rechazada, como frecuentemente sucede, esto sólo indicaría que el modelo explica mejor los datos al considerar los factores correspondientes a los parámetros $b_1,\ldots,b_k$ que sin ellos; pero no indica cuáles de estos factores son importantes y cuáles pueden ser eliminados sin afectar demasiado al modelo.

Si se rechaza la hipótesis global $H_0 : b_1 = \ldots = b_k = 0$, usualmente se prueba de manera individual qué parámetros son estadísticamente iguales a cero, para excluirlos del modelo.

La prueba de significancia individual $H_0 : b_j = 0$ utiliza el cociente de verosimilitud de la ecuación (6) y reemplaza el numerador por *L(reducido)*, que es la función de verosimilitud evaluada en el resto de parámetros $b_m \neq b_j$, estimados sin la presencia de b_j, o también puede utilizarse la estadística de Wald, definida en la ecuación (7):

$$Wald = \left(\frac{\hat{b}_j}{ErrStd(\hat{b}_j)} \right)^2 \qquad (7)$$

que bajo la hipótesis nula se distribuye asintóticamente como χ^2 con 1 grado de libertad.

La estadística de Wald es generada por el paquete JMP y aparece en la Figura 3.4 bajo el título “ChiSquare”; a la derecha se tiene el *valor-p* (*p-value*) de probabilidad de la prueba.

Puede verse del resultado del paquete que la variable “Difer A –Tp” es significativa al 5% teniendo un valor-p = 1.07%, mientras que el valor “Intercept” correspondiente a la constante específica del modo auto propio no lo es; pues tiene un valor-p = 13.59%. Este resultado coincide con el criterio de la variable “t” ya mencionado.

Adicionalmente, para decidir si se rechaza la hipótesis nula, primero se calcula la estadística de prueba obtenida con los datos observados; y luego, qué tan probable es obtener este valor con base en la distribución de la estadística de prueba bajo la hipótesis H_0.

Por lo general se adopta el 5% de significación, así que si la probabilidad de observar el valor obtenido es menor a 0.05, la hipótesis nula es rechazada. Muchos paquetes estadísticos dan esta probabilidad como la *significancia de la prueba* o *valor p*, así que mientras más pequeños sean estos valores mayor evidencia hay en contra de la hipótesis nula en favor de la alterna.

En la sección de prueba del modelo completo ("Whole Model Test"), en la Figura 3.5 aparece la estadística χ^2 para el cociente de la ecuación (6):

$$-2Ln\frac{L(reducido)}{L(completo)}=-2Ln(L(reducido)-L(completo)=2*5.916632=11.83326$$

que es el valor observado de la estadística de prueba. *La probabilidad de obtener este valor (o uno mayor) suponiendo que todos los parámetros son cero* es muy pequeña: 0.0006 por lo que se deduce que los coeficientes *β* son estadísticamente distintos de cero y la respuesta (la elección del usuario) queda bien explicada por alguno de estos parámetros.

Evaluación de la estimación del modelo Logit

Para evaluar el ajuste de un modelo Logit, no hay una medida tan clara como el coeficiente de determinación R^2 usado en el caso del método de mínimos cuadrados ordinario; sin embargo, hay otras propuestas de medidas de ajuste, la más común es la siguiente (Greene, 2000).

$$\rho^2 = 1 - \frac{Ln\,L(\hat{b}_0, \hat{b}_1, ..., \hat{b}_k)}{Ln\,L(b_0^*)}$$

llamada R^2 de McFadden o Pseudo R^2, que análogamente a R^2 está acotada entre 0 y 1 e indica un mejor ajuste conforme se acerca a 1; aunque los valores obtenidos con ρ^2 no sean comparables con los obtenidos con R^2, pues en general se obtienen valores más pequeños de ρ^2 en modelos con ajuste aceptable, que los valores que se obtendrían con R^2.

La pseudo Rsquare mostrada (*RSquare(U) = 0.2854)* en la Figura 3.5 no es cercana a uno; sin embargo, como ya se mencionó, es difícil que en regresión logística se obtengan valores altos, lo cual no nos permite determinar si el ajuste resultó muy bueno o no, pero sí puede ser útil para comparar varios ajustes del mismo conjunto de datos (pudiera ser que al quitar parámetros no significativos del modelo éste tenga un mejor ajuste o no).

Otra forma muy simple de evaluar un modelo Logit, es comparar los valores pronosticados de la respuesta con los valores observados en la muestra, usando una tabla llamada *de clasificación*, como se muestra enseguida.

	Predicciones No	Predicciones Sí
Observaciones No	Núm. de observaciones predichas como No y observadas como No	Núm. de observaciones predichas como Sí y observadas como No
Observaciones Sí	Núm. de observaciones predichas como No y observadas como Sí	Núm. de observaciones predichas como Sí y observadas como No

Así, mientras se obtenga un mayor número de predicciones correctas, el modelo será mejor. En el ejemplo mostrado, se calcularon las proporciones de predicciones correctas, asignando el evento “Sí” a las probabilidades mayores a 0.5 con el modelo ajustado; resultando la siguiente tabla de clasificación, que indica un ajuste razonable.

Observados	**Predicciones No**	**Predicciones Sí**	**% de Correctos**
No	**12**	**2**	**85.7%**
Sí	**1**	**15**	**93.8%**
% Total Correctos		**90.0%**	

Finalmente, de un modo más formal se puede evaluar el ajuste de un modelo Logit con otra prueba de hipótesis, donde la hipótesis nula es que los datos observados provienen de una distribución logística con los parámetros estimados. Una de las estadísticas más usadas para esta prueba de hipótesis es la siguiente:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\left(y_j - E(y_j)\right)^2}{Var(y_j)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(y_j - \hat{P}_j\right)^2}{\hat{P}_j(1-\hat{P}_j)}$$

la cual tiene una distribución χ^2 con *n* – *(k +1)* grados de libertad donde *k* es el número de parámetros a estimar (Montgomery & Raymond, 2002).

Recomendaciones adicionales en la estimación de parámetros

Mucho del buen desempeño de un modelo depende de la especificación del mismo. Cuando se intenta resolver un modelo mal especificado con algún paquete estadístico que obtenga los estimadores por máxima verosimilitud, es posible que la corrida termine mal y que haya mensajes de error. En este caso, los estimados que se puedan obtener no son de utilidad.

A continuación se enlistan varios errores comunes en la especificación de un modelo, que conviene tomar en cuenta para evitar su reproducción durante el modelado de problemas de demanda de transporte (Horowitz et al, 1986):

1. El uso de demasiadas constantes específicas de alternativas. En la construcción de modelos Logit es usual que el modelador incluya constantes específicas en las alternativas por elegir. El número de estas constantes específicas debe ser cuando mucho igual al número de opciones n menos uno. Si el modelo incluye una constante específica para cada una de las alternativas, el proceso de maximización de Log (L) no podrá determinar un conjunto único de coeficientes a estimar y la corrida del paquete estadístico terminará de modo anormal.

2. Especificación inadecuada de las variables socioeconómicas. Las variables socioeconómicas dan información de los usuarios del sistema de transporte; tal es el caso del sexo, la edad, el ingreso anual o el número de automóviles poseídos. Estas variables pueden tener el mismo valor para todas las alternativas del conjunto de opciones sin embargo, para que su influencia pueda ser detectada en el modelo, es necesario que interactúen (multiplicando, dividiendo) con otras variables del modelo que cambien a lo largo de las distintas opciones. Así, por ejemplo, si se conoce el costo del viaje "C" y se tiene el ingreso anual del viajero "I", el cociente C/I representa el valor porcentual que el costo del viaje tiene en el ingreso anual del viajero y por tanto la influencia de este factor C/I disminuirá a medida de que el ingreso del viajero aumente, explicando así la poca importancia que un costo de viaje representa a usuarios de alto ingreso.

Si un conjunto de variables socioeconómicas se agregan a un modelo Logit sin interactuar con otras variables que cambien con las alternativas, se produce el mismo problema de no poder determinar un conjunto único de coeficientes, y la corrida estadística terminará con errores. Igual que en caso de las constantes específicas de alternativas, se recomienda que el número de variables socioeconómicas específicas para las alternativas no exceda al número de alternativas n menos uno.

3. Dependencia lineal (colinealidad) perfecta entre variables. Esta situación surge cuando una o más variables de la función de utilidad son combinaciones lineales de otras variables del modelo. Por ejemplo, si en un modelo se tienen las variables: T = tiempo total de viaje; T_V = tiempo a bordo del vehículo; T_F = tiempo fuera del vehículo con $T = T_V + T_F$ y se considera que la función de utilidad de un modo (alternativa) es:

$$V = \beta_0 + \beta_1 T + \beta_2 T_V + \beta_3 T_F + \dots \text{ otros términos}$$

se tiene una dependencia lineal de T con las componentes T_V y T_F. Si se reescribe esta función de utilidad descomponiendo el valor de T, resulta:

$$V = \beta_0 + \beta_1(T_V + T_F) + \beta_2 T_V + \beta_3 T_F + \dots \text{ otros términos} =$$

$$V = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)T_V + (\beta_1 + \beta_3)T_F + \dots \text{ otros términos}$$

La última ecuación muestra que la contribución de los tiempos T_V y T_F depende de los coeficientes (β_1 + β_2) y (β_1 + β_3), pero es claro que hay infinidad de combinaciones de los coeficientes β_1, β_2 y β_3 que pueden producir un mismo resultado; por lo que la determinación de un conjunto único de coeficientes no es posible y el paquete estadístico terminará mal la corrida de estimación.

A grandes rasgos, las variables explicativas de un modelo de elección pueden ser consideradas de dos tipos (Ortúzar y Willumsen, 1994):

a) variables muy relevantes o variables de políticas de transporte, ya sea que tengan un sustento teórico fuerte o que resulten cruciales para el pronóstico del modelo de interés, y

b) otras variables explicativas, que pueden ser no cruciales para la evaluación de las políticas de transporte o que carezcan de sustento teórico para decidir su inclusión o exclusión del modelo

Con esta visión de las variables, se puede entonces sugerir un procedimiento de inclusión o exclusión de variables en el modelo de acuerdo con los resultados obtenidos en la primera versión del modelo que se está construyendo, con respecto a la significancia de las variables y con respecto al signo del coeficiente obtenido en la estimación. La Figura 3.6 muestra un resumen de los posibles casos que pueden tenerse, y la correspondiente sugerencia para incluir o no la variable.

		de Política	**Otro tipo**
Signo correcto	Significativa	Incluir	Incluir
	No-significativa	Incluir	Quizá excluir
Signo erróneo	Significativa	Requiere revisión	Excluir
	No-significativa	Requiere revisión	Exlcuir

Figura 3.6. Casos de selección de variables en un modelo (basado en Ortúzar y Willumsen, 1994).

Lo primero que considera la Figura 3.6 es cuando el signo del coeficiente estimado es correcto (serán positivos los coeficientes de atributos que aumenten la utilidad y negativos los de atributos que la reduzcan). En este caso la recomendación es incluir las variables que sean de política aun cuando alguna fuera no-significativa; esta última característica podría ser corregida quizá adquiriendo más información de la muestra; para las variables de otro tipo, se recomienda la inclusión sólo cuando el atributo en cuestión resulte significativo.

En el caso de que el signo del coeficiente estimado sea incorrecto (p. ej. un signo positivo en el atributo de costo del viaje o un signo negativo en el atributo de confort del viaje) para las variables de política, se recomienda revisar el modelo para verificar que esté correctamente especificado, independientemente de la significancia obtenida para estas variables; para las variables de otro tipo, un signo erróneo en el coeficiente siempre se tomará como indicación de que debe ser excluida esta variable del modelo.

Los criterios estadísticos que se han mencionado para evaluar la calidad de la estimación de un modelo, indudablemente son de gran utilidad para desarrollar un modelo bien especificado. Limitarse a utilizar solamente estos criterios estadísticos para desarrollar un modelo, sin embargo, no es garantía de que se logrará un buen modelo. El modelador debe utilizar su experiencia y visión de los problemas de transporte para especificar correctamente un modelo; las pruebas estadísticas solamente pueden indicar cuando un modelo tiene errores, pero no señalan si el modelo reproduce satisfactoriamente la problemática del transporte que interesa al modelador.

Cuando se encuentran errores en un modelo, los criterios estadísticos no ayudan mucho para saber cómo corregirlo; el modelador debe recurrir a su conocimiento y experiencia en el sistema de transporte estudiado para identificar las probables fuentes de error y así reformular el modelo para eliminar los errores. Los modelos modificados entonces se sujetan a las pruebas estadísticas para determinar si son satisfactorios o no. De esta forma, el desarrollo de un buen modelo que represente adecuadamente la situación de transporte estudiada consiste en un movimiento alternante entre el análisis estadístico y la experiencia del modelador para producir un modelo aceptable (Horowitz et al, 1986).

4 Aplicaciones de la elección discreta

En este capítulo se comentan algunas aplicaciones de los métodos de elección discreta que son de utilidad en los procesos de planeación del transporte.

4.1 Elecciones de ruta y de tiempo de partida

En los capítulos anteriores, y particularmente en los ejercicios numéricos del capítulo 3, se ilustraron casos de elección de modo de transporte.

Para modelar exitosamente la elección de modo de transporte, conviene considerar los factores que influyen en estas elecciones de los usuarios. Los más comunes son (Ortúzar y Willumsen, 1994):

a) **Las características socioeconómicas del viajero**: si posee o dispone de automóvil; su tipo de familia (pareja joven, matrimonio con hijos, personas de la tercera edad, etc.); su sexo; edad y su ingreso anual.
b) **Las características del viaje**: propósito del viaje (trabajo, escuela, diversión, etc.); hora del día (hora pico o fuera de pico)
c) **Las características del sistema de transporte**: tiempo del viaje a bordo; tarifas; tiempos de transbordo y espera; frecuencias; comodidad; seguridad; confiabilidad.

Además de la elección de modo de transporte, la elección de ruta y la elección del tiempo de partida son dos aplicaciones que han resultado de interés en la modelación de elecciones discretas en años recientes; y por ello se comentan enseguida los aspectos básicos a considerar para el desarrollo de modelos de elección discreta en estos casos.

La elección de ruta

Para la elección de ruta, se parte del supuesto de tener una red compuesta de nodos que representan los orígenes y destinos de los usuarios y de arcos que representan las conexiones entre estos. En esta red, si se dispone de un modo de transporte dado, y se especifica un origen *o* y un destino *d*, la elección del usuario será cuál ruta utilizar para ir de *o* a *d*.

Este sencillo planteamiento tiene características muy particulares que lo distinguen del problema de elegir solamente el modo de transporte por usar. Primeramente, el conjunto de opciones suele ser muy grande, dada la fuerte conexidad que suele haber en las redes de transporte; luego, el usuario por lo general no considera la totalidad de posibilidades físicas de conexión entre *o* y *d;* y, finalmente, las opciones de ruta suelen traslaparse, con lo cual se genera una correlación en las elecciones que dificulta el cálculo de los modelos Logit.

Las características consideradas típicas en el proceso de decisión de ruta son las siguientes (Ben-Akiva y Bierlaire, 2003):

Para el usuario que decide están los factores que siguen.

a) **El valor del tiempo**. Esta es una característica crucial en las distintas opciones de ruta. Suele considerarse el valor del tiempo como una medida de la sensibilidad del usuario al tiempo total de viaje en una ruta. El valor del tiempo puede representarse en un modelo como una variable continua (p. ej. pesos/minuto de viaje) o por una variable discreta que de un rango (p. ej. bajo, medio, alto)

b) **El acceso a la información**. Este es un aspecto importante para la decisión de la ruta por usar. Si existe información con suficiente nivel de detalle de las rutas (tiempos, transbordos, esperas, etc.) sin duda que se tendrá una influencia mayor sobre las decisiones de los usuarios, que si no hay esta información. Esta es una variable de política de transporte, y para incluirla en la modelación se puede asignar como atributo binario (0 = sin acceso a información, 1 = con información) o también se puede manejar con varios niveles nominales (1 = información previa al viaje; 2 = información a bordo; 3 = información telefónica, etc.)

c) **Propósito del viaje**. Igual que en la elección de modo de transporte, esta característica es importante en la elección de ruta. En particular, cuando una demora puede implicar algún costo como llegar tarde al trabajo o perder una conexión de transbordo; la influencia de este atributo puede ser importante en la elección.

Para la construcción del conjunto de alternativas, se consideran dos principales enfoques.

Primero, aceptando que en principio cada usuario podría elegir cualquier ruta posible entre su origen y destino, y aun cuando estas posibilidades son fáciles de identificar; la totalidad de opciones suele resultar enorme, lo que complica la estimación de los parámetros en los modelos Logit.

Segundo, considerando sólo un número restringido de rutas entre las alternativas posibles, ya sea con un enfoque determinístico o uno probabilístico.

Dial (1971, *Transportation Research* 5(2):83-111*)* propone formar el conjunto de alternativas sólo con rutas “razonables” que no alejen demasiado al viajero de su destino, mientras que Ben-Akiva et al (1984, *Proceedings from the 9th International Symposium on Transportation Traffic Theory*) sugieren un enfoque de “etiquetado” de las rutas, con criterios como: ruta más corta; ruta más rápida;

ruta más escénica; ruta con menos semáforos; ruta con menos congestión; etc. Por su parte, Azevedo et al (1993, *European Journal of Operational Research*, 69: 97-106) proponen un esquema de eliminación de arcos de la red, donde comienzan calculando la ruta más corta (con algún criterio de impedancia, como distancia o tiempo) como la primera opción del conjunto, para luego eliminar algunos arcos de esa ruta más corta y calcular la nueva ruta más corta que es la segunda opción, y así sucesivamente (citados por Ben-Akiva y Bierlaire, 2003).

Para la determinación de los atributos en la elección de ruta, es conveniente considerar en la función de utilidad entre atributos ligados a los arcos de la red y atributos que no son de los arcos. Por ejemplo, en una ruta dada, el tiempo total de viaje es la suma de los tiempos a lo largo de los distintos arcos que forman la ruta; en cambio, la tarifa del viaje o la necesidad de transbordo no son atributos ligados a los arcos de la ruta. Los atributos usualmente considerados en la elección de ruta son:

a) El largo de la ruta, que sin duda afecta la decisión del usuario.
b) El costo del viaje, considerando el gasto directo del viaje (boletos, gasolina, cuotas) y otros gastos asociados (p. ej. estacionamiento).
c) Específicos del transporte público, como número de transbordos, tiempos de espera, frecuencia del servicio, etc.

Otros que también influyen son el nivel de congestión, el número de semáforos, el tipo de camino y su condición, etc.

La elección del tiempo de partida

El estudio de la elección del tiempo de partida para un viaje ha surgido en la literatura como extensión del problema de elección de ruta dentro de un contexto de asignación dinámica del tráfico en una red de transporte. Conceptualmente, es importante distinguir entre la elección del tiempo de partida propiamente dicho y la elección de hacer un cambio en el tiempo de partida de un viaje, usualmente relacionado con usuarios que al revisar sus itinerarios y con el apoyo de sistemas de información de la red de transporte deciden cambiar su tiempo de salida original.

Las características consideradas típicas en el proceso de elección de tiempo de partida son (Ben-Akiva y Bierlaire, 2003):

Para el viajero que decide, se considera lo siguiente:

La característica principal de los modelos de elección del tiempo de partida es el tiempo preferido de llegada al destino; que frecuentemente aparece como intervalos de tiempo o ventanas de longitudes variables para dar flexibilidad a la elección. Características adicionales que suelen incluirse en esta modelación son las penalizaciones (monetarias y psicológicas) resultantes de las llegadas anticipadas o tardías al destino (p. ej. llegar antes al trabajo, puede significar no desayunar en casa, y llegar tarde puede significar un descuento del salario). Para tener punto de comparación, es conveniente tener el dato del tiempo de partida “habitual” del viajero.

Por lo general, los viajeros estiman un valor esperado del tiempo del viaje y restan dicho valor de la hora a la que esperan llegar a su destino, para así determinar cuál sería su hora de partida, incluyendo un cierto margen de seguridad. Este margen de seguridad depende de la variabilidad que tenga el tiempo del viaje, así como de las penalizaciones por llegadas anticipadas o tardías al destino. Conviene notar que el tiempo esperado de llegada al destino no necesariamente es el tiempo preferido de llegada. Si bien los tiempos reales de partida y de llegada al destino podrían obtenerse de las observaciones de diarias de los viajeros, el tiempo preferido para llegar al destino sólo puede averiguarse preguntando a los viajeros. Las repuestas que se puedan obtener de esta pregunta, sin embargo, no están libres de sesgo; ya que algunos entrevistados suelen tratar de justificar su comportamiento habitual de viaje cuando se les pregunta sobre sus preferencias.

Para determinar el conjunto de alternativas, se considera lo siguiente:

Primeramente, la especificación de alternativas en los modelos de elección de tiempo de partida es bastante complicada. Para comenzar se debe tratar el tiempo de manera discreta mediante el uso de intervalos, con un compromiso razonable entre una resolución muy detallada y la complejidad del modelo. Para un modelado realista en aplicaciones dinámicas en tráfico, el número de opciones puede resultar muy grande.

La correlación entre las opciones debe siempre tomarse en cuenta, en particular cuando los intervalos son cortos. Así por ejemplo, en el medio urbano, elegir la partida entre el intervalo de 07:45 a 07:50 o el intervalo de 07:50 a 07:55 es completamente distinto al problema de elegirla entre el intervalo de 07:45 a 07:50 o el intervalo de 09:45 a 09:50, ya que en la primera elección las dos opciones pueden tener rasgos comunes relacionados con la hora pico del transporte urbano, mientras que la segunda elección se da cuando la hora pico ya se ha atenuado.

Otro aspecto importante que se ha observado es que los viajeros en su mayoría suelen redondear las cantidades de tiempo en sus estimaciones y este redondeo depende del tiempo total del viaje. Así, por ejemplo, en un viaje corto de unos cuantos minutos, la hora 16:52 podría redondearse a 16:50, mientras que en un viaje largo la misma hora podría redondearse a 17:00.

Para generar las alternativas que puede elegir un usuario, hay que producir un rango aceptable de intervalos de tiempo. Un procedimiento común para esto es basarse en el Tiempo Preferido de Arribo al destino (T_{PA}), y en el Tiempo Total de viaje (T_T) con intervalos que den el valor mínimo y el máximo de cada uno.

De este modo, si $[\ T_{PA\ min}\ ,\ T_{PA\ max}\ ]_n$ es el intervalo factible de arribo del usuario *n* a su destino, y $[\ T_{T\ min}\ ,\ T_{T\ max}\ ]_n$ es el rango de tiempo total de viaje, el intervalo de tiempos de partida (T_{DP}) aceptables para el usuario *n* resulta ser:

$$[\ T_{DP\ min}\ ,\ T_{DP\ max}\ ]_n = [\ T_{PA\ min} - T_{T\ max},\ T_{PA\ max} - T_{T\ min}\ ]_n$$

En cuanto a los atributos convenientes para modelar el tiempo de partida, el tiempo de viaje es un elemento crucial; cuya variabilidad afecta la elección del tiempo de partida y del margen de seguridad que estiman los usuarios. Otros atributos importantes en la modelación son los retrasos y los adelantos en el itinerario de viaje. Estos atributos pueden ser vistos como interacciones entre el tiempo de viaje y el tiempo preferido de arribo al destino; de modo que para un tiempo preferido de arribo T_{PA} para el usuario *n*, se puede tener un intervalo sin penalizaciones: $[\ T^*_{PA\ min}\ ,\ T^*_{PA\ max}\ ]_n$ tal que si el viajero llega a su destino en ese intervalo no sufre consecuencia alguna por ello.

Si el tiempo real de llegada del usuario *n* es $T_{R\ n}$ entonces:

$$T_{R\ n} = T_{DP\ n} + T_T\ (T_{DP\ n})$$

donde $T_T\ (T_{DP\ n})$ indica el tiempo del viaje cuando este se inicia a la hora $T_{DP\ n}$.

De este modo, el adelanto por llegada anticipada al destino se define por:

$$\text{Max}\ \{\ T^*_{PA\ min} - T_{R\ n}\ ,\ 0\ \}$$

y el retraso por llegada tarde al destino se define por:

$$\text{Max}\ \{\ T_{R\ n} - T^*_{PA\ min},\ 0\ \}$$

Si lo que se quiere modelar es más bien el cambio en la hora de partida, las alternativas pueden describirse de modo relativo. Ben-Akiva y Bierlaire (2003) mencionan la propuesta de Antoniou et al de un conjunto de elecciones con cinco opciones: 1) no cambiar la hora de partida; 2) cambiar a una hora más temprana; 3) cambiar a una hora más tardía; 4) cambiar por un intervalo de tiempo; 5) cambiar por dos intervalos de tiempo. Y en cuanto a penalizaciones, el cambio de hora de partida también puede incluir una penalización cuando se eligen horas de partida significativamente distintas de las horas habituales del viajero, debido a la costumbre y a los hábitos de viaje largamente desarrollados.

4.2 El pronóstico agregado a partir de elecciones discretas

Los capítulos anteriores han mostrado los pasos básicos para formular y estimar modelos de elección discreta que describen el comportamiento individual de los viajeros en un sistema de transporte, considerando las ventajas teóricas que tienen sobre los procedimientos convencionales de las encuestas O-D y la evidencia empírica del buen desempeño de estos modelos en la literatura de transporte.

Para los fines de la planeación de un sistema de transporte, sin embargo, lo que se requiere es información agregada sobre las decisiones de los viajeros; ya que si se tienen estimaciones confiables de los volúmenes agregados de decisión de viaje en las distintas opciones que ofrece un sistema de transporte, se puede mejorar el desempeño del sistema, y también se pueden tomar mejores decisiones sobre las inversiones necesarias y las políticas operativas aplicables al mismo.

Enseguida se comentan algunas consideraciones sobre la agregación de la información de elecciones individuales, para conseguir estimaciones de las decisiones agregadas que den idea de la demanda que puede tener un sistema de transporte.

Elecciones individuales y reparto modal

La elección de modo de transporte es un problema típico donde interesa estimar las proporciones de viajeros que elegirán cada modo; es decir, para estimar el reparto modal de un sistema de transporte.

Si se conocen con suficiente exactitud las elecciones individuales de un grupo de viajeros, se puede obtener el número de quienes eligen un modo de transporte particular simplemente sumando los que eligen ese modo, y la proporción de dicho modo en el reparto modal es ese número de viajeros dividido entre el número total de individuos de los que se tiene información.

Cuando se conocen solamente las probabilidades de elección, en lugar de las decisiones tomadas, el número de viajeros pronosticado para un modo puede calcularse como la suma de las probabilidades de elegir dicho modo para todos los individuos que usan el sistema de transporte.

Por ejemplo, considerando la elección entre usar auto propio (A) o transporte público (TP) presentado en el modelo descrito con las ecuaciones (5) del capítulo 3, el número de viajeros pronosticados para elegir cada modo es:

$$N_{Auto} = \sum_{k} P(Auto)_k$$

$$N_{TransPub} = \sum_{k} P(Trans.Pub)_k$$

Donde N_{Auto} y $N_{TransPub}$ son los números de viajeros en Auto y en Transporte Público respectivamente, y el índice k se refiere al k-ésimo individuo de la población de interés.

Con esta base, se pueden estimar las fracciones del reparto modal entre Auto y Transporte Público, dividiendo los números de viajeros anteriores entre el número N de individuos en la población de interés, resultando:

$$Fr_{Auto} = \frac{\sum_k P(Auto)_k}{N}$$

$$Fr_{TransPub} = \frac{\sum_k P(Trans.Pub)_k}{N}$$

Es decir, que el pronóstico de las fracciones del reparto modal son el promedio de las probabilidades de elección de cada modo en la población de interés que usa el sistema de transporte. El siguiente ejemplo numérico ilustra estas estimaciones.

Ejemplo de pronóstico agregado

Con el ejemplo descrito con las ecuaciones (5) del capítulo 3, se usaron los siguientes datos para mostrar las elecciones de Transporte Público contra la alternativa Automóvil:

N	Auto	Tr. Púb	Difer A-TP	Elec-ción	N	Auto	Tr. Púb	Difer A-TP	Elec-ción	N	Auto	Tr. Púb	Difer A-TP	Elec-ción
1	26.2	40.7	-14.5	No	**11**	96.0	94.2	1.8	Sí	**21**	75.8	78.3	-2.5	Sí
2	81.1	82.5	-1.4	Sí	**12**	34.9	46.4	-11.5	No	**22**	32.3	44.6	-12.3	No
3	55.0	61.6	-6.6	No	**13**	12.3	39.0	-26.6	No	**23**	85.5	86.0	-0.5	Sí
4	36.3	47.4	-11.1	No	**14**	33.6	45.5	-11.9	No	**24**	58.6	64.5	-5.9	No
5	68.3	72.2	-3.9	No	**15**	122.7	110.2	12.4	Sí	**25**	27.9	41.7	-13.8	No
6	46.6	55.1	-8.4	Sí	**16**	95.4	93.7	1.7	Sí	**26**	104.8	100.6	4.2	Sí
7	73.0	76.0	-3.0	Sí	**17**	122.7	110.2	12.4	Sí	**27**	26.2	40.7	-14.5	No
8	14.7	37.1	-22.4	No	**18**	76.2	78.6	-2.4	Sí	**28**	129.3	102.8	26.5	No
9	95.4	93.7	1.7	Sí	**19**	115.0	107.2	7.8	Sí	**29**	122.7	110.3	12.5	Sí
10	109.6	103.9	5.7	Sí	**20**	78.6	80.5	-1.9	Sí	**30**	47.6	55.8	-8.2	No

Un vistazo a los datos revela que de las 30 observaciones, 16 eligieron Transporte Público (elección "Sí") y 14 eligieron Auto (elección "No"), con lo que en principio el reparto modal sería:

$$Fr_{Auto} = \frac{14}{30} = 0.467$$

$$Fr_{TransPub} = \frac{16}{30} = 0.533$$

Con el modelo Logit ajustado para este ejemplo, la probabilidad de elegir Auto resultó ser:

$$P(Auto) = \frac{1}{1 + e^{0.79726 \; + 0.16706 \; (T_A - T_{TP})}}$$

Así, para un rango de variación de $T_A - T_{TP}$ de –20 a +25, en incrementos de 5, y calculando las probabilidades de elegir Auto con las marcas de clase de $T_A - T_{TP}$, para los casos ocurridos en cada intervalo de clase de acuerdo con los datos de la muestra, se tienen las siguientes probabilidades:

Difer A-TP	No. casos	P(Auto)
-20	2	0.9272
-15	3	0.8467
-10	6	0.7054
-5	4	0.5095
0	8	0.3106
5	2	0.1635
10	4	0.0781
15	0	0.0355
20	0	0.0157
25	1	0.0069

Multiplicando el número de casos en cada marca de clase de $T_A - T_{TP}$ por la probabilidad correspondiente y sumando, se obtiene el valor esperado del número de viajeros que escogen Auto, que resulta:

Número esperado que eligen Auto = 13.8

Número esperado que eligen Transp. Público = 16.2

Con lo cual las fracciones de reparto modal esperadas son:

$$\overline{Fr}_{Auto} = \frac{13.8}{30} = 0.460$$

$$\overline{Fr}_{TransPub} = \frac{16.2}{30} = 0.540$$

que son una buena aproximación a las calculadas con el conteo de casos en las observaciones de la muestra.

El método usado en este ejemplo obtiene las estimaciones agregadas directamente de la información de las elecciones individuales, y da una buena aproximación. Su desventaja, en la práctica, es que para aplicarlo se requeriría calcular las probabilidades de elección para cada viajero en la población de interés (que suele ser grande); además de que, en la realidad, las diferencias de tiempos entre auto propio y transporte público pueden ser muchas más que las mostradas en el ejemplo. Por lo anterior, es conveniente usar otras formas de estimar valores agregados que no requieran de una enumeración explícita de los casos individuales. En las líneas siguientes se comentan este tipo de métodos.

Métodos de pronóstico agregado con base en modelos de elección discreta

Tres métodos básicos para generar pronósticos agregados utilizando como insumo información de modelos de elección discreta son: a) el método ingenuo, b) la segmentación de mercados y c) la enumeración en una muestra (Horowitz et al, 1986).

a) <u>El método ingenuo</u> consiste en sustituir el valor promedio de todas las variables explicativas del modelo en las ecuaciones de las funciones de utilidad para generar el "modelo Logit promedio" del cual se obtienen las estimaciones de los repartos modales. Este método naturalmente no produce los mismos estimados que si se hace el conteo exhaustivo de los casos, como en el último ejemplo numérico.

Siguiendo el mismo ejemplo numérico recién mostrado, el promedio de los valores $T_A - T_{TP}$ de –20 a +25, en incrementos de 5, resulta ser 2.5, de modo que evaluando la función de probabilidad con este valor resulta:

$$\frac{1}{1+e^{0.79726 \;\; +0.16706\;(2.5)}} = 0.229$$

lo cual sería la estimación de la fracción que elegiría Automóvil, una pobre estimación del verdadero valor de la muestra.

b) <u>La segmentación de mercados</u> es un método que divide la población para hacer el pronóstico en segmentos con cierta homogeneidad. En estos segmentos los viajeros tienen cierta similitud, aun cuando no sean idénticos en cuanto a los valores de las variables explicativas del modelo.

Dentro de cada segmento, los pronósticos de reparto modal se hacen utilizando el método ingenuo, y la estimación del reparto modal para toda la población se hace mediante un promedio ponderado sobre los distintos segmentos; el tamaño de cada segmento es usado como peso en la ponderación.

Con este método de segmentación se mejoran los pronósticos en comparación con el método ingenuo ya mencionado. El siguiente ejemplo numérico ilustra su aplicación.

Ejemplo de segmentación de mercados

Con los 30 datos del ejemplo anterior, de elección entre Auto y Transporte Público, se consideran dos segmentos:

1) Usuarios para los que el tiempo de viaje en auto son siempre menores que el correspondiente tiempo en Transporte Público (difer. A – TP < 0) y
2) Usuarios para los que el tiempo de viaje en auto es igual o mayor que el correspondiente viaje en transporte público (difer. A – TP >= 0).

La homogeneidad de los segmentos de mercado –en este ejemplo– tiene que ver con la ventaja en tiempo de alguno de los modos de transporte; por lo que si bien no se tienen exactamente los mismos valores para todos los viajeros, en cada segmento existe la misma ventaja de un modo sobre el otro.

Tras promediar los valores de las diferencias (A – TP) en los dos segmentos y calculando otra vez las probabilidades de elegir auto con esos valores promedio, resulta lo siguiente:

	Segmentación de Mercados	
	Difer A-TP < 0	**Difer A-TP >= 0**
Promedio $T_A - T_{TP}$	-9.166	8.682
Núm. de casos	20	10
Prob (Auto) estimada	0.676	0.096

Entonces, el promedio ponderado de la fracción que elige Auto es:

$$Fr(Auto) \approx \frac{20 \times 0.676 + 10 \times 0.096}{30} = 0.482$$

que es una estimación mucho mejor que la lograda con el método ingenuo anterior.

c) <u>La enumeración de una muestra</u> es el tercer método para aproximar valores agregados. La idea anterior de la segmentación de mercados podría extenderse en principio a segmentos cada vez más pequeños, pero cada vez más homogéneos, hasta el límite de llegar a “segmentos” formados por un solo individuo. Esto plantearía nuevamente el problema de obtener información de toda la población, lo que resulta impráctico.

Una forma de resolver lo anterior es basar los pronósticos agregados en una muestra aleatoria de la población de interés. Una vez que se obtiene esta muestra, se calculan las probabilidades para cada viajero de la muestra y se hace un promedio para estimar los porcentajes de participación de las elecciones de modos en las decisiones colectivas. Esta muestra puede obtenerse de los mismos datos usados para estimar los parámetros del modelo Logit de elecciones discretas. El siguiente ejemplo numérico ilustra el método.

Ejemplo de enumeración de una muestra

De los 30 casos el ejemplo anterior se eligió una muestra aleatoria de 13 casos mediante la rutina “Muestra” del módulo de Análisis de Datos de Excel. La muestra de los registros y su correspondiente tiempo resultó:

N	Difer A-TP
16	1.7
7	-3.0
3	-6.6
2	-1.4
19	7.8
27	-14.5
29	12.5
14	-11.9
17	12.4
11	1.8
8	-22.4
1	-14.5
30	-8.2

Con esta muestra de 13 datos se calcularon las probabilidades de elegir Auto, en las marcas de clase indicadas, como indica la tabla siguiente:

Difer A-TP	No. casos	P(Auto)
-20	1	0.9272
-16	0	0.8671
-12	2	0.7698
-8	2	0.6316
-4	1	0.4678
0	2	0.3106
4	2	0.1876
8	1	0.1059
12	0	0.0572
16	2	0.0302

Para estimar el porcentaje de viajeros que elegirían Auto, se calcula el valor esperado de la probabilidad de esta elección, con la información de la tabla de probabilidades anterior, resultando:

$$\overline{F}r_{Auto} = \frac{1\times 0.9272 + 0\times 0.8671 + 2\times 0.7698 + 2\times 0.6316 + \cdots + 2\times 0.03020}{13} = 0.412$$

$$\overline{F}r_{TransPub} = 1 - \overline{F}r_{Auto} = 0.588$$

Las estimaciones del reparto modal con la enumeración muestral también mejoran el valor obtenido con el método ingenuo.

La siguiente tabla resume las estimaciones del reparto modal en la muestra observada de los 30 datos con los distintos métodos mostrados.

	Estimaciones		Porcentaje de error	
	Fracc. Auto	**Fracc. Trans. Púb**	**Fracc. Auto**	**Fracc. Trans. Púb**
Valor real	0.467	0.533	0.000	0.000
Modelo Logit	0.460	0.540	-1.5%	1.3%
Método ingenuo	0.229	0.771	-51.0%	44.7%
Segmentación de mercados	0.482	0.518	3.2%	-2.8%
Enumeración de muestra	0.412	0.588	-11.8%	10.3%

De la comparación de los métodos puede verse que el método ingenuo es el que tiene mayor error en las estimaciones. El método de segmentación de mercados y el de enumeración de muestra dan mejores resultados. De acuerdo con Horowitz et al (1985) el método de enumeración de muestras resulta adecuado cuando existen datos disponibles para extraer una buena muestra aleatoria; en caso de que no haya esa disponibilidad, es recomendable utilizar el método de segmentación de mercados. Y finalmente cuando se tengan datos muy limitados y no se pueda utilizar otro método, es posible emplear el método ingenuo, siempre reconociendo el margen de error que puede ocurrir con este método.

5 Conclusiones

La estimación de la demanda del servicio de transporte es una tarea fundamental en los procesos de planeación de los sistemas de transporte.

El tener una idea aproximada de los volúmenes de pasajeros que requerirán los diversos modos de transporte en un sistema dado permite anticipar el uso de los recursos del sistema, como son los vehículos, los combustibles o el personal y también permite tener una idea del grado de congestión o saturación que pudiera darse en el sistema; con lo que se puede prever la aplicación de medidas de mitigación. También puede aplicarse un enfoque semejante al caso del movimiento de carga.

Cualquier esfuerzo de estimación de la demanda comienza con un análisis de los factores que influyen en las decisiones de los usuarios del sistema de transporte y la obtención de datos de estos factores, con la finalidad de calcular las estimaciones deseadas. Una vez identificados esos factores y obtenidos los datos adecuados, lo que sigue es aplicar alguna metodología que produzca las estimaciones.

En los inicios de los estudios de transporte, desde los años 1960 y aún en los años 1980, mucho del trabajo de estimación de la demanda del transporte fue hecho con enfoques agregados de valores promedio obtenidos de grandes muestras de observaciones y de encuestas a los usuarios. Los resultados logrados no fueron demasiado precisos, pero sirvieron para dar una visión muy general de las características de la demanda de transporte. Dado que las estimaciones habían sido obtenidas de datos observados, este enfoque fue llamado de las preferencias reveladas.

A finales de años 1970, y a lo largo de las dos décadas siguientes, surgió el enfoque alternativo de estimaciones desagregadas centradas en las decisiones de los usuarios del servicio. Este enfoque se apoyó en técnicas de investigación de mercados que basaban sus estimaciones en observaciones y en encuestas hechas a los usuarios del sistema. Debido al uso de encuestas y cuestionarios diseñados con mucho cuidado para obtener buena información de los usuarios, este enfoque es conocido como de preferencias declaradas.

La modelación de la demanda basada en los métodos desagregados tiene fundamento en la teoría de la utilidad de base económica. Aplicada al transporte, esta teoría ha permitido modelar las decisiones de los usuarios como la manifestación de sus preferencias ante las alternativas de transporte que pueden elegir; siempre buscando maximizar la utilidad que se obtiene del viaje (o equivalentemente, minimizando los inconvenientes de este).

Los modelos matemáticos que permiten replicar el proceso de decisiones de los usuarios que eligen entre opciones para viajar se ha desarrollado en un contexto probabilista para dar cabida a las decisiones de usuarios que pudieran parecer contradictorias o a los cambios de gusto en los usuarios que pueden variar de elección ante una misma oferta de opciones en circunstancias distintas.

Una familia de modelos de elecciones discretas muy difundida en la práctica de estimación de la demanda es la de los modelos Logit que se presentaron en este trabajo. Su relativa facilidad de manejo, tanto en la modelación como en los procesos de estimación de parámetros y los criterios básicos de bondad de los ajustes, los han vuelto muy populares en las tareas de pronóstico de demanda.

En este trabajo se hizo una revisión de las ideas esenciales para familiarizarse con el tema de la estimación de la demanda bajo el enfoque de la maximización de la utilidad del viajero y el contexto probabilista de los modelos Logit, con el objetivo de tener un documento que permita a los interesados en la aplicación de estas técnicas iniciarse en los detalles prácticos de su uso.

Y si bien se analizaron los detalles básicos del modelo Logit binomial y del Logit multinomial, se mostraron solamente ejemplo sencillos pero ilustrativos de los procedimientos de estimación y de evaluación de la calidad estadística de los modelos, así como de sus aplicaciones en la elección de modo de transporte; elección de rutas y elecciones de tiempo de partida en un viaje.

El tema de estimación de la demanda basada en modelos Logit es bastante extenso y aún quedan varios tópicos interesantes por revisar, como es la organización de las encuestas a los usuarios con base en diseño experimental para afinar la calidad de las respuestas; el uso de modelos Logit anidados, para tratar elecciones de alternativas entre las que hay fuertes similitudes; un análisis de sensibilidad de los resultados de los modelos Logit para estimar el valor del tiempo de los usuarios; los modelos Probit basados no en la densidad logística que manejan los modelos Logit, sino en la distribución normal multivariada; y otras temáticas más que enriquecen la tarea de modelación de la demanda y sus pronósticos.

Para trabajos futuros que sigan la línea de investigación de estimación de la demanda, hay todavía bastante por hacer y esperamos que surjan más desarrollos dentro de esta serie de publicaciones técnicas del Instituto Mexicano del Transporte.

Bibliografía

Amos WEB GLOSS*arama, (2010) *Utilitarianism; Utility maximization*. En: http://www.AmosWEB.com. AmosWEB LLC, 2000-2010.

Ben-Akiva, M. & Lerman, S.R. (1985). *Discrete choice analysis: Theory and application to travel demand*. The MIT Press. The Massachusetts Institute of Technology. USA.

Ben-Akiva, M. and Bierlaire, M. (2003). Discrete Choice Models with Applications to Departure Time and Route Choice. In: *Handbook of Transportation Science*. Edited by Randolph W. Hall. Kluwer Academic Press. USA.

Greene, W.H. (2000). *Econometric analysis*. 4th edition. Prentice-Hall International, Inc. USA.

Hensher, D.A., Rose, J.M., and Greene, W.H. (2007). *Applied choice analysis. A primer*. 3rd printing. Cambridge University Press. New York.

Horowitz, J.L., Koppelman, F.S. and Lerman, S.R. (1986). *A Self-Instructing Course in Disaggregate Mode Choice Modeling*. Federal Transit Administration, U.S. Department of Transportation. Washington.

Kanafani, A. (1983). *Transportation Demand Analysis*. McGraw-Hill. USA.

Kreyszig, E. (1970). *Introductory Mathematical Statistics. Principles and Methods*. John Wiley & Sons. New York.

Luce, R.D. and Suppes, P. (1965). Preference, utility and subjective probability. EN: R.D. Luce, R.R. Bush and E. Galanter, editors, *Handbook of Mathematical Psychology*. John Wiley & Sons, New York.

Montgomery C. Douglas & Myers H. Raymond (2002). *Generalized Linear Models*. Wiley-Interscience Publication

Nelson, D. (2004). *The Penguin Dictionary of Statistics*. Penguin Books. London.

Ortúzar, J.D, and Willumsen, L.G. (1994). *Modelling transport*. Second edition. John Wiley & Sons. Chichester, UK.

Ortúzar, J.D. (2000). *Modelos de demanda de transporte*. 2ª. Edición. Ediciones Universidad Católica de Chile. Alfaomega Grupo Editor S.A. México.

Train, K.E. (2009). *Discrete Choice Methods with Simulation*. 2nd edition. Cambridge University Press. New York.

CIUDAD DE MÉXICO
Av. Nuevo León 210
Col. Hipódromo Condesa
CP 06100, México, D F
Tel +52 (55) 52 653600
Fax +52 (55) 52 653600

SANFANDILA
Carretera Querétaro-Galindo km 12+000
CP 76700, Sanfandila
Pedro Escobedo, Querétaro, México
Tel +52 (442) 216 9777
Fax +52 (442) 216 9671

Instituto Mexicano del Transporte

SCT
Secretaría de Comunicaciones y Transportes

www.imt.mx
publicaciones@imt.mx