



EVALUACIÓN Y DETECCIÓN DE DAÑO EN ESTRUCTURAS UTILIZANDO UN MÉTODO INVERSO POR SUB-DOMINIOS

Francisco Javier Carrión Viramontes
Alejandro Lozano Guzmán

Publicación Técnica No. 166
Sanfandila, Qro, 2001

**SECRETARIA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES
INSTITUTO MEXICANO DEL TRANSPORTE**

**Evaluación y detección de daño
en estructuras utilizando un
método inverso por sub-
dominios**

Francisco Javier Carrión Viramontes
Alejandro Lozano Guzmán

**Publicación Técnica No. 166
Sanfandila, Qro, 2001**

Este documento fue elaborado en la Coordinación de Equipamiento para el Transporte del Instituto Mexicano del Transporte por Francisco Javier Carrión Viramontes y Alejandro Lozano Guzmán. Parte de los desarrollos teóricos y del trabajo de investigación se realizaron bajo la dirección y asesoría del Prof. James F. Doyle, de la Universidad de Purdue.

Se contó con el apoyo y comentarios del Coordinador de Equipamiento para el Transporte, Dr. Miguel Martínez Madrid, para la publicación de este trabajo.

Resumen	III
Abstract	V
Resumen ejecutivo	VII
1 Introducción	1
2 El método inverso por sub-dominios	5
2.1 Problema inverso para la identificación de fuerzas.	6
2.2 Regularización.	8
2.3 Solución por programación dinámica.	9
2.4 Deconvolución utilizando Wavelets.	10
3 Los vectores de respuesta por daño	17
3.1 Teoría de perturbaciones de rango mínimo.	19
3.2 La detección de daño como problema inverso.	21
3.3 Adaptación de la MRPT para el modelo inverso.	22
4 Ejemplos de aplicación	25
4.1 Daño localizado con poca instrumentación.	25
4.2 Análisis por sub-regiones.	27
4.3 Análisis por sub-dominio.	31
5 Conclusiones	35
Referencias	37



Se describe el desarrollo conceptual y teórico del Método Inverso por Sub-Dominios (MISD) que es una novedosa metodología para el monitoreo de la condición estructural de puentes carreteros y estructuras complejas, que permite la detección de daño.

El método descrito es potencialmente flexible para adaptarse a diferentes tamaños y características de las estructuras; así como, para procesar información proveniente de instrumentos de medición (sensores) de diferentes tipos que proporcionen información temporal o espacial. El uso de este método permite considerar escenarios en los que el análisis se efectúe en forma remota y en tiempo real con aplicación a los sistemas de administración de puentes o para los sistemas integrales de administración.

En contraparte de los métodos modales, el MISD se basa en el análisis de la propagación de ondas en las estructuras, por lo que no está limitado por el tipo o ubicación de los sensores ni por las condiciones de medición. Además, se pueden realizar distintos niveles de análisis a partir de una sola prueba.

En este trabajo se analizan diferentes casos de simulación en los que se consideran situaciones de poca instrumentación, análisis por sub-regiones y análisis por sub-dominios. Se evalúan condiciones de pruebas controladas y pruebas bajo condiciones de operación normal en las que las fuerzas de excitación estructural son desconocidas. Los resultados obtenidos muestran el potencial del MISD para el monitoreo de la condición estructural de puentes y proponen líneas de investigación numérica para adaptar algoritmos de solución rápida y super-rápida debido a la estructura de las matrices resultantes.



This work describes the conceptual and theoretical development of the Sub-Domain Inverse Method (SDIM), that is an innovative method for monitoring the structural condition of highway bridges and complex structures and allows the detection and evaluation of damage.

This method is potentially flexible for different structural sizes and characteristics and it can process information from different type of sensors, temporal or spatial. With this method, it is possible to consider real time remote analysis with applications to bridge administration systems and integral administration systems.

In reaction to the modal analysis schemes, the SDIM is based on the wave propagation analysis in the structure; therefore, it is not limited by the type or localization of the sensors, nor the experimental conditions. Also, different levels of analysis are possible from a single test.

In this work, different simulation cases are presented considering situations with few instrumentation, sub-region analysis, and sub-domain analysis. Test are under controlled conditions, as well as under normal operational conditions where load excitations are unknown. Results show the potential of the Sub-Domain Inverse Method for monitoring of the structural condition of bridges and research on numerical methods is proposed for the use of fast and super-fast algorithms to solve the matrices which are obtained from this method.



En este trabajo se describen las bases teóricas y conceptuales del desarrollo del Método Inverso por Sub-Dominios (MISD) para la evaluación y detección de daño en estructuras. Una de las características fundamentales del método es que resuelve problemas parcialmente especificados o definidos, tomando los datos medidos experimentalmente e incorporándolos como parte integral y fundamental de todo el procedimiento de solución. Se desarrollan dos métodos de solución basados en la programación dinámica de problemas inversos y en la deconvolución Wavelet.

El método desarrollado presenta varias ventajas para su utilización en sistemas de evaluación estructural, entre las que se destacan el análisis sub-estructural, el ajuste al tamaño del sistema, la posibilidad de admitir diferentes niveles de análisis (global o detallado), la utilización de información espacial o temporal, y el poder eliminar las no linealidades presentes en el problema.

El concepto básico del MISD se fundamenta en el empleo de muchos y diferentes tipos de sensores para el monitoreo, la evaluación y el control de los sistemas mecánicos y estructurales, que a su vez, es posible gracias al reciente desarrollo en esta materia. La nueva tecnología ha motivado investigaciones para incrementar la seguridad, la confiabilidad y los índices de rendimiento de dichos sistemas. Anteriormente los estudios experimentales estaban limitados por el número de sensores; ahora es posible pensar en el uso de miles de éstos, que inclusive, pudieran estar embebidos permanentemente en las estructuras, proponiendo el uso de nuevas alternativas y esquemas de análisis. Una de las áreas donde todo esto incide de manera importante es en el monitoreo de la condición de las estructuras. El incremento en el tamaño y la complejidad de las obras civiles y aeronáuticas, por ejemplo, plantean nuevos retos para incrementar los índices de seguridad y confiabilidad. No sólo la información de campo oportuna es esencial, sino también su rápido procesamiento. Esto, requiere de la adaptación y del desarrollo de esquemas novedosos y eficientes que manejen una gran cantidad de información.

Una de las particulares aplicaciones del MISD está en los Sistemas de Administración de Puentes y Estructuras, en los cuales se pueden realizar la evaluación estructural mediante procedimientos de medición sencillos y aplicando excitaciones aleatorias. Se posibilita el monitoreo remoto de muchas estructuras en forma simultánea. A partir de la misma información, distintos niveles de análisis se pueden emplear; ya sea de manera sencilla para detectar la presencia de daño o detallada para identificar y cuantificar la magnitud del mismo.

El análisis de la vibración de los puentes tiene fundamentalmente dos vertientes de aplicación. Por un lado, el modelar o medir la respuesta de los puentes ante ciertos tipos de excitaciones, puede servir para evaluar potenciales daños sufridos por este tipo de estructura, estimando con ello el nivel de daño estructural e, incluso, la posición en la que se presenta este debilitamiento estructural. Por otro lado, y al estar asociados los niveles de vibración de estas estructuras al nivel de esfuerzos en sus elementos, es posible identificar qué factores, asociados a los vehículos o al mismo puente, afectan de manera importante la respuesta del puente y los esfuerzos inducidos en éste.

Los resultados mostrados en este trabajo corresponden fundamentalmente al desarrollo de la metodología basada en el Método Inverso por Sub-Dominios. Mediante ejemplos de simulación, se muestra cómo se puede aplicar el esquema para monitorear la presencia de daño y para identificar éste en una sub-región de una estructura. Del análisis de las matrices de respuesta se observa que la estructura Cuasi-Toeplitz que éstas tienen puede ser empleada para mejorar la eficiencia del esquema de solución y propone líneas de investigación para el desarrollo de algoritmos basados en esquemas super-rápidos de solución.

1 Introducción

En la última década, se introdujo el concepto de las “Estructuras Inteligentes”, como aquellas estructuras que contienen sensores y actuadores de manera tal, que a través de un sistema de control específico contrarrestan efectos nocivos del ambiente como pueden ser vibraciones, sismos o cargas excesivas que ponen en riesgo la integridad misma de la estructura ^[1-2]. Actualmente, hablar de estructuras que contengan un gran número de sensores embebidos es cada vez más común ^[3] y el desarrollo de la tecnología de sensores permite considerar escenarios en los que se utilicen miles y hasta millones de sensores de diferentes tipos ^[4]. El disponer de una información más detallada y refinada puede ser aprovechado para el monitoreo de la condición estructural y la detección de daño de sistemas reales. Para lograr esto, es necesario desarrollar algoritmos y esquemas novedosos que sean capaces de procesar una gran cantidad de información en forma sistemática.

En general, el monitoreo de la condición de una estructura se define como “la medida de las condiciones de operación y de carga, y de las respuestas críticas de una estructura para dar seguimiento y evaluar síntomas anormales de operación y/o de deterioro o daño que afecten el servicio, seguridad o confiabilidad de la misma” ^[5]. No sólo el incremento en tamaño y complejidad de las estructuras civiles o aeronáuticas modernas hace necesario contar con sistemas de monitoreo de la integridad de los sistemas para aumentar sus índices de seguridad y confiabilidad, si no también por el hecho de que estas estructuras forman parte primordial de sistemas integrales de administración ^[4,5] donde el procesamiento y análisis de la información son de vital importancia. El monitoreo remoto y continuo es cada vez más común y el diseño de estrategias para diferentes niveles de análisis de la información se hace necesario para el manejo eficiente de los datos ^[6].

Los desarrollos en la informática y de los sistemas de comunicación, son la base para el diseño de los sistemas integrales de administración, que son el más alto nivel de gestión que puede tener una organización y que incluye los sistemas integrales de diversos sectores o áreas. En el caso de una organización gubernamental, el sistema integral de administración incluye, entre otros, los sistemas integrales de transporte, educación, seguridad, salud, etc.

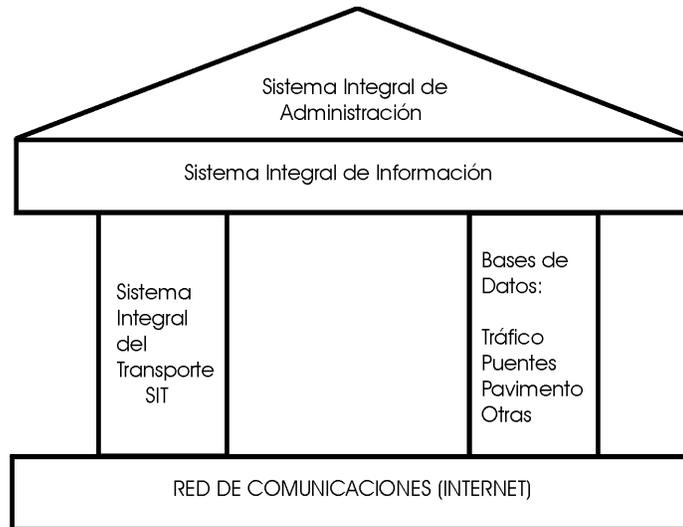
Los sistemas integrales de administración se basan en el empleo de una red de comunicación de alta eficiencia que transmite en tiempo real toda la información necesaria a las bases de datos en las que se almacena y simultáneamente se procesa y analiza para cada uno de los sistemas integrales que lo constituyen. Todos los datos procesados y analizados por estos sistemas, son concentrados por el sistema integral de información y transmitidos al sistema integral de administración, donde se presenta y sintetiza toda la información para

que sea utilizada para la toma de decisiones al mas alto nivel (Figura 1a). El sistema integral de transporte (SIT), que es uno de los sistemas primordiales de un sistema integral de administración, se compone fundamentalmente de programas de software que manejan los inventarios de la infraestructura del transporte y analizan los datos provenientes de las medidas de campo (Figura 1b). Los componentes fundamentales de hardware son computadoras, redes de comunicación y los dispositivos de medición de campo, que en nuestro caso, corresponden a pesadoras dinámicas, sensores de tráfico, transductores de vibración, cámaras de video, etc. (Figura 1c). El funcionamiento adecuado de un sistema integral de administración requiere fundamentalmente y primordialmente de información de campo oportuna y adecuada, lo que a su vez implica contar con equipos de medición adecuados y métodos de evaluación eficientes.

La tecnología actual, ha logrado reducir el tamaño, peso y costo de los sensores, así como sus resoluciones temporales y/o espaciales. Se espera en un futuro próximo tener integrados permanentemente en las estructuras sensores para información temporal (i.e. acelerómetros o transductores de desplazamiento láser, medidores de deformación de fibra óptica) o sensores para información espacial (i.e. imagen por termografía, interferometría láser, imágenes por infrarrojo) ^[7-15]. Los sensores temporales tienen la característica de que se localizan en un punto fijo de la estructura y registran algún tipo de respuesta completa en el tiempo (esfuerzo, desplazamiento, velocidad), pero limitada espacialmente por el número de sensores disponibles. En cambio, los sensores espaciales, obtienen imágenes completas en instantes fijos de tiempo, por lo que proporcionan toda la información espacial en un número finito de instantes. La resolución de las imágenes espaciales llega a ser de millones de pixeles, por lo que es posible considerar a cada pixel como un sensor y, por lo tanto, hablar de millones de sensores. Es evidente que el uso de un número muy grande de sensores de diferentes tipos y la complejidad de las estructuras, requiere de nuevos algoritmos y esquemas que permitan seleccionar y procesar la información para lograr diferentes niveles de análisis según sea necesario.

La aplicación más importante de los sistemas de monitoreo de estructuras es la detección y evaluación del daño. Existen diversos esquemas o métodos para la identificación de éste en las estructuras. En general, la mayoría de los algoritmos de este tipo se basan en el análisis modal ^[16,17] y, aunque han logrado resultados satisfactorios, presentan una serie de limitaciones de tipo práctico que los descalifican para aplicaciones en tiempo real o bajo condiciones de operación normal. En respuesta a las limitaciones del análisis modal, se adaptó el Método Inverso por Sub-Dominios (MISD) para la identificación del daño. El MISD está basado en el análisis de la propagación de ondas en las estructuras, por lo que requiere menos pruebas experimentales, se escala a un gran número de incógnitas y puede manejar diferentes tipos de sensores. Una distribución adecuada de los sensores, limitando regiones en la estructura, permite identificar la presencia de daño en las sub-regiones. El análisis por sub-dominios es posible sin pérdida de generalidad y a partir de un mismo conjunto de datos, se puede seleccionar la información de acuerdo al nivel de evaluación que se desee realizar.

Estos atributos hacen del MISD una metodología potencialmente útil para los sistemas de monitoreo de estructuras complejas y un gran número de incógnitas por resolver.

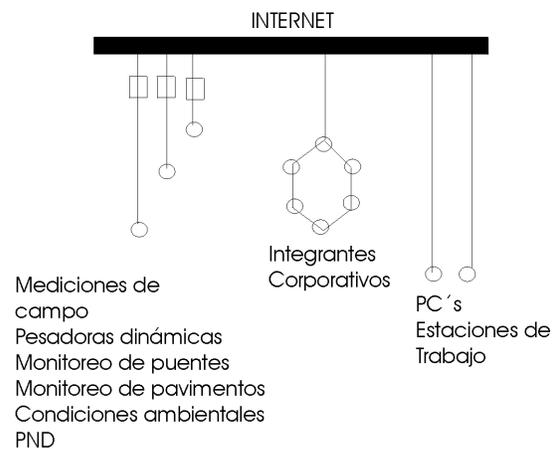


(a)



(b)

Componentes de Hardware



(c)

Figura 1 Configuración típica de un Sistema Integral de Administración

2 El método inverso por sub-dominios

Un problema directo en ingeniería es aquel en el que hay que determinar las respuestas de un sistema cuando se conocen ambos, las entradas y el sistema en su totalidad. En la práctica, los problemas que se tienen son frecuentemente del tipo inverso, es decir, en los que se desconocen algunos aspectos del sistema (propiedades del material, condiciones de frontera, comportamiento no lineal de algunos elementos, etc.), mientras que hay otros que sí se conocen; así, se pretende utilizar algunas de las respuestas medidas experimentalmente para determinar estas incógnitas ^[18]. Mas aún, es posible que únicamente estemos interesados en conocer un subconjunto de las incógnitas, como puede ser el caso en el que se quiere evaluar el grado de daño en una región de la estructura sin que nos interese conocer si existe daño en otra región. Este tipo de problema inverso es notoriamente mal condicionado y requiere de esquemas de solución mucho más sofisticados que los utilizados por los problemas directos.

La probabilidad de encontrar una buena solución se incrementa cuando el número de incógnitas se reduce. Esto se logra cuando es posible aislar el sub-dominio de interés del resto de la estructura, por ejemplo, separar el ala de un avión del fuselaje o el tramo central de un puente del resto de la estructura. Desafortunadamente, esta separación introduce un nuevo conjunto de incógnitas que están asociadas con las fuerzas de tracción en las fronteras que fueron separadas. La idea básica de esto se representa en la Figura 2; donde el sub-dominio tiene, además de las incógnitas que nos interesa resolver, un conjunto adicional de incógnitas en las fronteras y que equivalen al resto de la estructura.

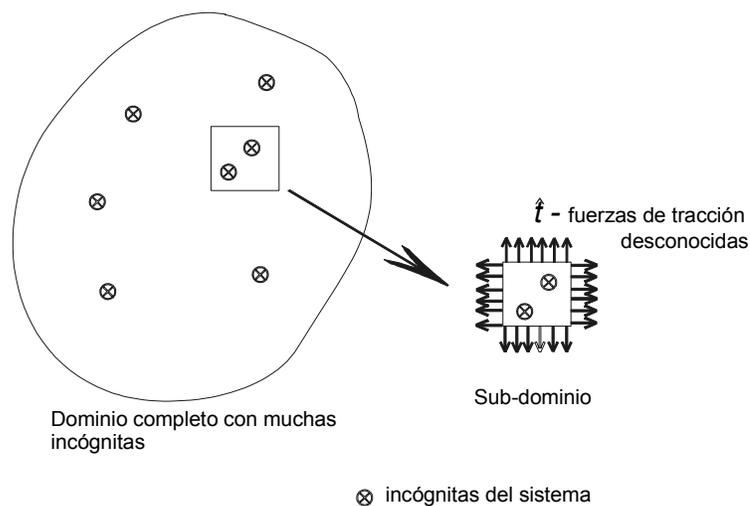


Figura 2 Sub-dominio con las incógnitas de interés y con fuerzas de tracción desconocidas en la frontera

2.1 Problema Inverso para la Identificación de Fuerzas

En esta sección, se describe de forma general el planteamiento del problema inverso para la identificación de fuerzas que se resuelve utilizando la programación dinámica con la ecuación de Ricatti ^[19].

Consideremos un sistema estructural representado por una ecuación discretizada en el espacio por el método de elementos finitos y supongamos que es necesario identificar las fuerzas externas $\{\mathbf{P}(t)\}$ a las que está expuesto el sistema.

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}(t)\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}(t)\} = \{\mathbf{P}(t)\} \quad (1)$$

Donde $\{\mathbf{u}(t)\}$ es el vector de todos los grados de libertad, $[\mathbf{K}]$ la matriz de rigidez, $[\mathbf{C}]$ la matriz de amortiguamientos y $[\mathbf{M}]$ la matriz de masas. Definamos el vector $\{\mathbf{g}(t)\}$ como el subconjunto de las fuerzas externas que son diferentes de cero y definamos la matriz que asocia estas fuerzas externas con los grados de libertad como $[\mathbf{B}_g]$, por lo tanto,

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}(t)\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}(t)\} = \{\mathbf{P}(t)\} = [\mathbf{B}_g]\{\mathbf{g}(t)\}$$

Al discretizar en el tiempo, se tiene la ecuación de recurrencia:

$$\{\mathbf{u}\}_{n+1} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{u}\}_n + [\mathbf{B}]\{\mathbf{g}\}_n \quad (2)$$

Ahora, el vector $\{\mathbf{u}\}_n$ contiene los vectores de estado del sistema (al menos desplazamiento y velocidad) ^[19]. Con la ecuación (2), se puede definir la función de error:

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, \mathbf{g}) = \sum_{n=1}^N [\{\mathbf{d} - \mathbf{Q}\mathbf{u}\}_n^T [\mathbf{W}]\{\mathbf{d} - \mathbf{Q}\mathbf{u}\}_n]$$

donde $\{\mathbf{d}\}_n$ es el vector de mediciones asociada con $\{\mathbf{u}\}_n$ mediante la matriz $[\mathbf{Q}]$ y $[\mathbf{W}]$ es una función de peso asociada con el tipo de información medida experimentalmente.

Nuestro objetivo es minimizar el error de este funcional por lo que re-escribimos la ecuación (2) como:

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{g}\}$$

donde ahora $\{\mathbf{u}\} = \{\{\mathbf{u}\}_1, \{\mathbf{u}\}_2, \dots, \{\mathbf{u}\}_N\}^T$ y $\{\mathbf{g}\} = \{\{\mathbf{g}\}_1, \{\mathbf{g}\}_2, \dots, \{\mathbf{g}\}_N\}^T$.

Para resolver $\{\mathbf{u}\}$ en términos de $\{\mathbf{g}\}$, se descompone $[\mathbf{A}]$ por valores singulares y se obtiene la matriz $[\mathbf{G}]$, que puede ser resuelta mediante sustituciones sucesivas. De ahí, la solución directa se puede escribir como:

$$[\mathbf{A}][\mathbf{G}] = [\mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{U}][\mathbf{G}] = [\mathbf{B}]$$

Donde $[\mathbf{G}]$ es la colección de respuestas del problema directo con fuerzas unitarias correspondientes a cada una de las fuerzas desconocidas que se desean identificar. El problema directo resultante es:

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{G}]\{\mathbf{g}\}$$

Sustituyendo y minimizando la función de error respecto a $\{\mathbf{g}\}$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$[\mathbf{G}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{W} \mathbf{Q} \mathbf{G}]\{\mathbf{g}\} = [\mathbf{Q} \mathbf{G}]^T [\mathbf{W}]\{\mathbf{d}\} \quad \text{o} \quad [\mathbf{R}]\{\mathbf{g}\} = \{\mathbf{b}\}$$

Resolver el problema inverso a partir de esta ecuación no es posible generalmente ya que hay que invertir la matriz $[\mathbf{A}]$, que comúnmente es muy grande (su dimensión está dada por el número total de grados de libertad multiplicado por el número de intervalos de tiempo que se desean resolver). Por ejemplo, para 10000 grados de libertad y 1000 datos discretizados en el tiempo, la matriz resultante es de dimensión de $10^7 \times 10^7$. Invertir esta matriz en una computadora PC de 500 MHz tomaría 2×10^{14} segundos; aún en la computadora más rápida el tiempo de solución requerido para este problema es demasiado. Lo anterior, sin tomar en cuenta la capacidad de memoria necesaria para almacenar todos los datos.

Otra dificultad a la que nos enfrentamos al tratar de resolver el problema en la forma descrita anteriormente, es el hecho de que el problema es altamente mal condicionado. Esto se debe a que el número de incógnitas es mucho más grande que el de los datos. Para resolver esto es necesario utilizar esquemas de regularización ^[20].

2.2 Regularización

Supongamos que se tiene una matriz $[A]$ que tiene menos renglones que columnas. Cuando se minimiza el funcional $\mathcal{A} = [Au - d]^T [Au - d]$, no se tiene una solución única del problema. Una forma de resolver esto, es sumar al funcional original, otro funcional \mathcal{B} no singular que se pondera con un factor de escalamiento λ , es decir, $\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$. Este nuevo funcional tiene solución única y se puede demostrar que converge a una solución del problema ^[18].

Un método de regularización fue desarrollado por Tikhonov ^[20] y tiene la característica de que el funcional \mathcal{B} tiene un efecto de filtrado o suavización de las incógnitas y que depende del orden de la derivada que se utilice.

Por ejemplo, para un conjunto de fuerzas $\{g\}$ que se desean identificar, un funcional razonable asociado con la primera derivada es:

$$\mathcal{B} \propto \int \left(\frac{dg}{dx}\right)^2 dx \propto \{g\}^T [H] \{g\}$$

En este caso, que se denomina regularización de primer orden, la matriz $[H]$ (simétrica, no singular) tiene la forma de:

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots \end{bmatrix}$$

En el caso de la regularización de orden cero, la forma de la matriz $[\mathbf{H}]$ queda expresada de la forma:

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

El objeto del factor λ es garantizar la no-singularidad del problema sin que afecte el resultado significativamente. Este factor se puede estimar de forma teórica, pero en la práctica se estima empíricamente de forma iterativa asignándole diferentes valores y evaluando el grado de suavización que produce en los resultados ^[20].

2.3 Solución por Programación Dinámica

Otra forma de resolver este problema de identificación de fuerzas es utilizando los algoritmos de Bellman ^[21] para la programación dinámica. Para esto, se propone minimizar la siguiente función de error ^[19]:

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, \mathbf{g}) = \sum_{n=1}^N \left[\{\mathbf{d} - \mathbf{Q}\mathbf{u}\}_n^T [\mathbf{W}] \{\mathbf{d} - \mathbf{Q}\mathbf{u}\}_n + \lambda \{\mathbf{g}\}_n^T [\mathbf{H}] \{\mathbf{g}\}_n \right]$$

Con $\{\mathbf{u}\}_{n+1} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{u}\}_n + [\mathbf{B}]\{\mathbf{g}\}_n$. Nótese que en este funcional ya se introdujo el término de regularización utilizando el método de Tikhonov ^[20].

Siguiendo la derivación de la ecuación de Ricatti ^[21], se obtiene un esquema de solución de dos etapas; en la primera etapa se resuelven, de atrás hacia delante, las siguientes relaciones recursivas ^[21]:

$$[\mathbf{R}_{n-1}] = [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{W}] [\mathbf{Q}] + [\mathbf{A}]^T [\mathbf{R}_n - 2\mathbf{R}_n \mathbf{B} \mathbf{D}_n \mathbf{B}^T \mathbf{R}_n] [\mathbf{A}]$$

$$\{\mathbf{S}_{n-1}\} = -2[\mathbf{Q}]^T [\mathbf{W}] \{\mathbf{d}\}_{n-1} + [\mathbf{A}]^T [\mathbf{I} - 2\mathbf{R}_n \mathbf{B} \mathbf{D}_n \mathbf{B}^T] \{\mathbf{S}_n\}$$

Con, $[\mathbf{R}_N] = [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{W}] [\mathbf{Q}]$ y $\{\mathbf{S}_N\} = -2[\mathbf{Q}]^T [\mathbf{W}] \{\mathbf{d}\}_N$. Aquí, $[\mathbf{R}_n]$, $\{\mathbf{S}_n\}$ y C_n , son coeficientes que resultan del proceso de minimización ^[19]. El término $[\mathbf{D}_n]$ se define como:

$$[\mathbf{D}_n] \equiv [2\lambda[\mathbf{H}] + 2[\mathbf{B}]^T [\mathbf{R}_n] [\mathbf{B}]]^{-1}$$

Cabe decir que esta última ecuación se puede simplificar aplicando relaciones de invarianza en el tiempo de manera tal que el cálculo de inversión de la matriz queda simplificada ^[19].

En la segunda etapa de solución, se calculan las fuerzas y las respuestas mediante un proceso recursivo hacia delante aplicando las expresiones siguientes ^[21]:

$$\{\mathbf{g}\}_n = -[\mathbf{D}_{n+1}] [2\mathbf{R}_n \mathbf{B}]_{n+1}^T [\mathbf{A}]\{\mathbf{u}\}_n - [\mathbf{D}_{n+1}] [\mathbf{B}]^T \{\mathbf{S}_{n+1}\}$$

$$\{\mathbf{u}\}_{n+1} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{u}\}_n + [\mathbf{B}]\{\mathbf{g}\}_n$$

Para mayor detalle de la estructura de las matrices y del esquema de solución, consultar la Referencia 19.

2.4 Deconvolución utilizando Wavelets

El algoritmo de la programación dinámica para la solución del problema inverso tiene la gran ventaja de que se escala razonablemente con el tamaño del problema y permite resolver en poco tiempo problemas muy grandes. Sin embargo, debido a las características del esquema de solución antes descrito, sólo permite incluir información medida por sensores temporales. No es posible incluir información espacial que no sea completa en el tiempo. Para esto, se desarrolló el método de la deconvolución Wavelet, que se basa en el análisis del fenómeno de propagación de ondas y que posibilita el uso de cualquier tipo de sensor, sea espacial o temporal.

Aplicando la teoría de Wavelets ^[22-23], podemos representar a las fuerzas en función del tiempo como:

$$P(t) = \sum_{m=1}^{M_g} \tilde{P}_m \phi_m(t) \quad \text{o} \quad \{\mathbf{P}\} = [\Phi] \tilde{\mathbf{P}}$$

donde $\phi_m(t)$ son funciones Wavelet definidas en el tiempo y donde cada una de ellas es similar a la otra pero desfasada un intervalo $m\Delta T$ respecto a la primera.

Por otra parte, las fuerzas aplicadas producen una respuesta en el tiempo en cualquier punto de la forma:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{M_g} \tilde{P}_m \psi_m(x,t), \quad \{\mathbf{u}(x)\} = [\Psi] \tilde{\mathbf{P}} \quad (3)$$

donde $\psi_m(x,t)$ es la respuesta del sistema ante una fuerza $\phi_m(t)$ en x . Estas respuestas pueden ser calculadas, por ejemplo, utilizando un modelo de elemento finito. Debido a la linealidad del sub-dominio, todas las respuestas en ese punto serán similares una de otra pero desfasadas un intervalo de tiempo $m\Delta T$. Un análisis detallado de las funciones permite ver que dentro de ellas están contenidas todas las características de una estructura compleja que afectan la propagación de las ondas de deformación. Consecuentemente, todos los factores geométricos, del material y de las condiciones de frontera, están incluidos en esa función, la cual es posible conocer por medio de una simulación de elemento finito.

Supongamos que N_g es el número total de fuerzas desconocidas en el tiempo. Definamos pues,

$$\{\tilde{\mathbf{P}}\} = \left\{ \{\tilde{\mathbf{P}}\}_1, \{\tilde{\mathbf{P}}\}_2, \dots, \{\tilde{\mathbf{P}}\}_{N_g} \right\}^T$$

en donde $\{\tilde{\mathbf{P}}\}_n$ es un vector de M_g componentes. Esta colección de fuerzas produce una colección de respuestas de tal forma que,

$$\begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}\}_1 \\ \{\mathbf{u}\}_2 \\ \vdots \\ \{\mathbf{u}\}_{N_d} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Psi]_{11} & [\Psi]_{12} & \cdots & [\Psi]_{1N_d1} \\ [\Psi]_{21} & [\Psi]_{22} & \cdots & [\Psi]_{N_d2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\Psi]_{N_d1} & [\Psi]_{N_d2} & \cdots & [\Psi]_{N_dN_d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\tilde{\mathbf{P}}\}_1 \\ \{\tilde{\mathbf{P}}\}_2 \\ \vdots \\ \{\tilde{\mathbf{P}}\}_{N_d} \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad \{\bar{\mathbf{u}}\} = [\bar{\Psi}] \{\bar{\mathbf{P}}\} \quad (4)$$

donde $\{\mathbf{u}\}_i$ es una “fotografía” de todos los desplazamientos (grados de libertad) en un instante de tiempo i . La matriz $[\Psi]_{ij}$, de dimensión $[M_u \times M_g]$ (M_u es el número total de grados de libertad), relaciona las fotografías de los desplazamientos del instante i con fuerza j . Una fotografía del sistema en un instante dado, contribuye al conocimiento del comportamiento del mismo hasta el instante al que corresponde; es decir, proporciona información para cualquier tiempo anterior hasta el momento en que se tomó la fotografía. Esta cualidad retrospectiva de la información espacial hace que se pueda usar ventajosamente para la deconvolución en el tiempo.

Sea N_g el número de marcos o fotografías que se tienen, reacomodando la información se tiene lo siguiente:

$$\{\bar{\mathbf{d}}\} = \{\{\mathbf{d}\}_1, \{\mathbf{d}\}_2, \dots, \{\mathbf{d}\}_{N_g}\}^T$$

donde $\{\mathbf{d}\}_n$ es un vector de M_g componentes.

El conjunto de grados de libertad que se miden experimentalmente, $\{\bar{\mathbf{d}}\}$, constituyen un subconjunto de todas las respuestas unitarias $\{\mathbf{u}\}_i$ y, por lo tanto, ambos están relacionados entre sí. Es decir:

$$\{\mathbf{d}\}_i \Leftrightarrow [\mathbf{Q}]_i \{\mathbf{u}\}_i \quad \text{o} \quad \{\bar{\mathbf{d}}\} \Leftrightarrow [\bar{\mathbf{Q}}\Psi] \{\bar{\mathbf{P}}\} \quad (5)$$

Aquí, estamos suponiendo que los datos disponibles son principalmente espaciales en un número limitado de instantes en el tiempo; sin embargo, podemos incluir información temporal para identificar las fuerzas. Para este caso general, un esquema de solución suficientemente robusto requiere que el funcional que se va a minimizar incluya dos factores de regularización, uno espacial y otro temporal.

Por lo anterior, se propone utilizar el siguiente funcional de error:

$$\mathbf{E}(\bar{\mathbf{P}}, \mathbf{d}) = \mathbf{A} + \mathbf{B}(\lambda_t, \lambda_s) = \{\mathbf{d} - \overline{\mathbf{Q}\Psi\mathbf{P}}\}^T [\mathbf{W}] \{\mathbf{d} - \overline{\mathbf{Q}\Psi\mathbf{P}}\} + \{\bar{\mathbf{P}}\}^T [\lambda_t [\mathbf{H}_t] + \lambda_s [\mathbf{H}_s]] \{\bar{\mathbf{P}}\} \quad (6)$$

Nótese que los factores de regularización espacial y temporal son distintos. El funcional de error se compone de dos funcionales positivos \mathbf{A} y \mathbf{B} . El primero, \mathbf{A} , es el que mide el error entre los datos experimentales y los resultados del modelo; si se utilizara este funcional únicamente, los resultados serían muy buenos pero como las ecuaciones son muy inestables, difícilmente se convergería a la solución. El comportamiento inestable es debido al mal condicionamiento del problema, por lo que es necesario introducir el segundo funcional \mathbf{B} , que es un término de estabilización que mide el grado de “suavización” de una solución aceptable.

Como se dijo anteriormente, el método de regularización de Tikhonov ^[20], incluye términos de suavización que resultan de la derivada de las incógnitas. Para este problema, el término de regularización temporal para cada fuerza se expresa de la siguiente forma:

$$\mathbf{B}_j = \{\tilde{\mathbf{P}}_j\}^T [\mathbf{D}]_j^T [\mathbf{D}]_j \{\tilde{\mathbf{P}}_j\} = \{\tilde{\mathbf{P}}_j\}^T [\mathbf{H}]_j \{\tilde{\mathbf{P}}_j\}$$

Conjuntados todos los factores de regularización temporal se tiene:

$$[\mathbf{H}_t] = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{H}_{N_g} \end{bmatrix}$$

El factor de regularización espacial relaciona los valores de las incógnitas de un nodo $\{\tilde{\mathbf{P}}_j\}$, con los valores de las incógnitas de los nodos vecinos. Este esquema de diferencias de primer orden resulta en:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{H}_s] = [\mathbf{D}]^T [\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots \\ -\mathbf{I} & 2\mathbf{I} & -\mathbf{I} & \dots \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & 2\mathbf{I} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Minimizando el funcional \mathcal{E} con respecto a $\bar{\mathbf{P}}$, se tiene:

$$[\bar{\mathbf{G}}] \{\bar{\mathbf{P}}\} = \{\hat{\mathbf{u}}\} \quad (7)$$

donde,

$$[\bar{\mathbf{G}}] \equiv [\bar{\mathbf{Q}}\Psi]^T [\mathbf{W}] [\bar{\mathbf{Q}}\Psi] + \lambda_t [\mathbf{H}_t] + \lambda_s [\mathbf{H}_s], \quad \{\hat{\mathbf{u}}\} \equiv [\bar{\mathbf{Q}}\Psi]^T [\mathbf{W}] \{\mathbf{d}\}$$

La posibilidad de escoger la función Wavelet $\phi(t)$ como una función triangular (Figura 3a), permite por un lado, tener una función que actúa como filtro que delimita el contenido de frecuencia de las incógnitas (Figura 3b) y, por el otro, simplifica el cálculo de la deconvolución inversa^[23].

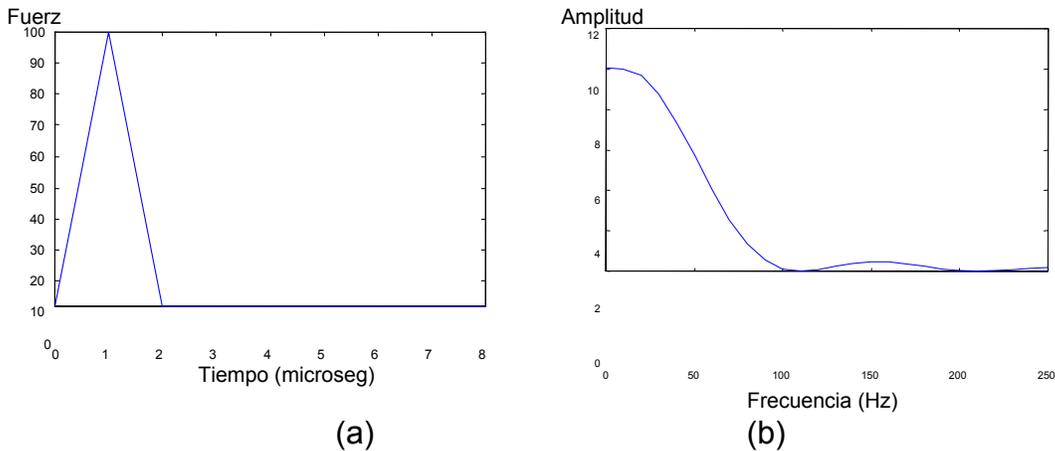


Figura 3 Función Wavelet triangular y su transformada de Fourier

Un ejemplo del uso de imágenes espaciales para la identificación de fuerzas se muestra en la Figura 4. En este caso, se modela una placa bidimensional ranurada a la que se le aplican dos fuerzas externas desconocidas (Figura 4a) y mediante un programa de elementos finitos se simula la información que se obtendría con dos fotografías de Moiré a 50 y 100 microsegundos (Figura 4b). Los resultados (Figura 4c) comparan los resultados reales con los reconstruidos mediante la deconvolución Wavelet ^[24].

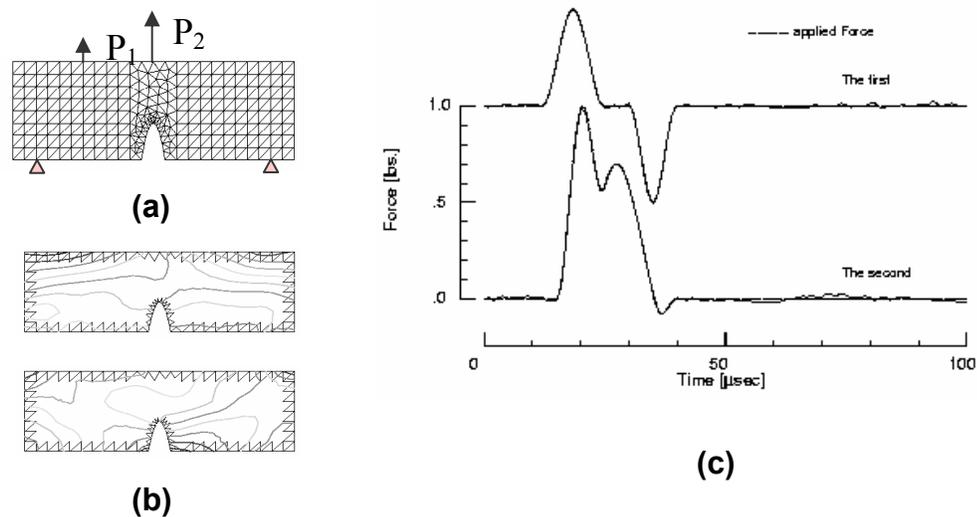


Figura 4 Reconstrucción de fuerzas con información espacial

Los métodos normalmente empleados para resolver problemas inversos utilizan el algoritmo de eliminación de Gauss para invertir las matrices, mismo que es poco eficiente dado que es de $\mathcal{O}(n^3)$ y limita el número de incógnitas que se pueden resolver. Un análisis detallado de las matrices $[\Psi]$ en la Ecuación (3) o $[\bar{\Psi}]_{ij}$ de la Ecuación (4), revelan una estructura tipo Toeplitz ^[25] que es resultado del desfaseamiento en el tiempo de la función de respuesta ante la excitación Wavelet y que emana del comportamiento lineal del sistema. Así, el término resultante de la correlación de las matrices de respuesta en la Ecuación (6) toman una estructura cuasi-Toeplitz. Esta característica de las matrices propone utilizar esquemas de solución mucho más eficientes.

La inversión de matrices tipo Toeplitz se puede realizar con el algoritmo de Levenson ^[26] que es de $O(n^2)$. Sin embargo, estudios recientes ^[27-34] demuestran que la inversión de estas matrices se puede realizar utilizando algoritmos super-rápidos, los cuales son de $O(n \log^2 n)$. Una comparación del desempeño de los tres tipos de algoritmos se presenta en la Figura 5; así, por ejemplo, la solución de un sistema con una matriz de 10^6 elementos, se resolvería en 3385 años empleando el algoritmo de eliminación de Gauss, mientras que un esquema super-rápido tomaría menos de 4 horas. La posibilidad de implantar los algoritmos super-rápidos con esquemas iterativos, propone líneas de investigación para desarrollar esquemas eficientes de solución del problema inverso con la deconvolución Wavelet.

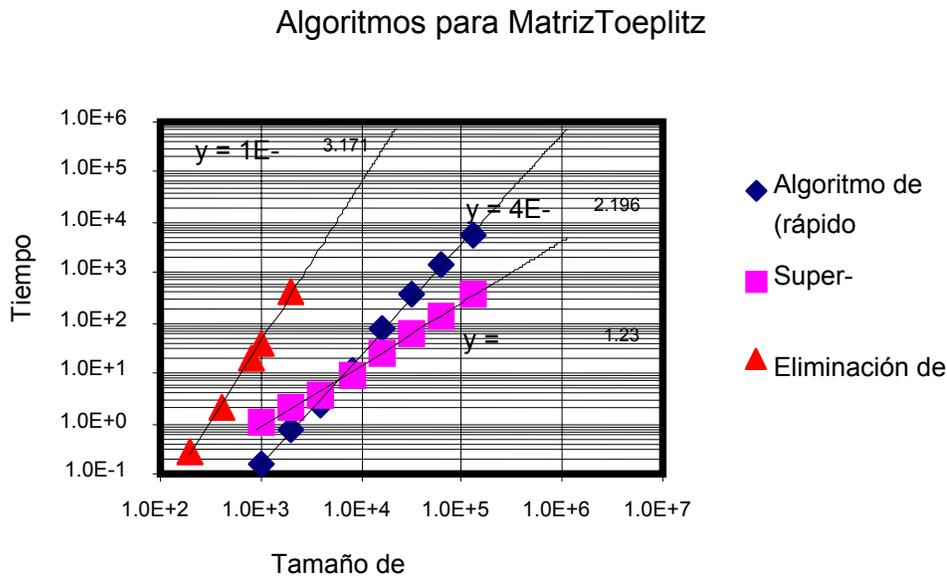


Figura 5 Comparación de algoritmos para resolver matrices tipo Toeplitz

3 Los vectores de respuesta por daño

En el contexto estructural, los diferentes tipos de daño como la fractura de elementos estructurales, la erosión, el desgaste, la pérdida de sujeción, la corrosión, etc., se reflejan como cambios de rigidez y/o de masas. Así pues, es posible definir el daño como cualquier cambio en una estructura que afecte los parámetros de rigidez o masa que la definen.

Para evaluar el daño en estructuras y puentes se han desarrollado un gran número de técnicas no destructivas y procedimientos, que se han incrementado a partir del fin de la 'guerra fría' y con la liberación de la tecnología militar para aplicaciones civiles ^[5]. Es indudable que el radar de penetración ^[35], la termografía ^[36], las emisiones acústicas ^[37] y el ultrasonido ^[38], son técnicas que se han desarrollado ampliamente para la evaluación de elementos y componentes estructurales; sin embargo, el carácter local de las inspecciones y el tiempo requerido para estudiar una estructura compleja, las limitan para evaluaciones globales y para aplicaciones en programas de inspección dentro de los sistemas de administración de puentes.

La evaluación global de un puente para un sistema de administración, tiene que ser rápida y confiable, de manera tal que se puedan tomar decisiones adecuadas para el mantenimiento, la operación y la planeación de la infraestructura del transporte. Hasta la fecha, esta evaluación global se ha realizado mediante las inspecciones visuales, que son subjetivas, dependen de la capacidad del inspector, no cuantifican el nivel de daño y sólo pueden identificar daño superficial en áreas accesibles por el inspector. Como resultado de las investigaciones en los últimos veinte años, se ha demostrado que las técnicas de vibraciones son las únicas que permiten obtener una evaluación global de las estructuras ^[5].

De manera general, las técnicas de vibraciones se pueden clasificar en dos grupos: el primero corresponde a todas aquellas técnicas que se basan en el análisis modal de las estructuras, mientras que el segundo, agrupa todas aquellas que se basan en fenómenos de propagación de ondas vibratorias en las mismas.

De los dos grupos mencionados anteriormente, el que se ha desarrollado más es el relacionado con el análisis modal y la evaluación de la condición estructural está relacionada con el cambio de los parámetros modales, que son las frecuencias y formas modales. Por lo general, estos cambios se identifican mediante la comparación con mediciones de referencia o con un modelo calibrado a la condición no dañada de la estructura.

De aquí, surge un aspecto fundamental; se requiere de una referencia para comparar los resultados. El escenario más simple, es partir de una condición inicial no dañada de la estructura y realizar pruebas de referencia para que todas las mediciones futuras se comparen con éstas. En este caso, no es necesario conocer en detalle los parámetros estructurales del puente ni contar con modelos calibrados. La desventaja fundamental de este esquema es que sólo se puede emplear como una técnica de detección temprana de daño sin que éste se pueda cuantificar o localizar. Cabe mencionar, que no es fácil correlacionar la magnitud del cambio medido en este caso con la magnitud del daño y en general, resulta ser poco confiable.

El segundo escenario, corresponde al caso en el que se conocen los parámetros iniciales de la estructura y, por lo tanto, se puede elaborar un modelo de simulación de referencia para comparar las medidas futuras. Por lo general, el modelo del puente sirve para correlacionar las medidas con el fin de localizar el daño y cuantificar su severidad. En estos casos existe un gran número de métodos y procedimientos que por lo general han dado buenos resultados; sin embargo, están sujetos a las mediciones para el análisis modal de las estructuras, las cuales son laboriosas y requieren de mucho tiempo, sin tomar en cuenta el número de sensores requeridos para un estudio suficientemente detallado para identificar los modos de vibrar deseados.

Algunos de los criterios más comunes para la detección de daño que se basan en el análisis modal son ^[39,40]:

- a) Cambios en las frecuencias naturales.
- b) Cambios en la forma de los modos dinámicos de vibración.
- c) Cambios en las curvaturas de los modos de vibración.
- d) Criterio de aseguramiento modal (MAC).
- e) Criterio coordinado de aseguramiento modal (COMAC).
- f) Factor de escala modal (MSF).
- g) Factor coordinado de escala modal (COMSF).
- h) Cambios en las matrices de flexibilidad o rigidez dinámica.
- i) Cambios en la energía de deformación.
- j) Teoría de perturbaciones de rango mínimo (MRPT).

De todos los esquemas anteriormente mencionados, el de la teoría de perturbaciones de rango mínimo ha demostrado ser uno de los más simples de aplicar y cuyos resultados son sorprendentemente buenos, por lo que conviene dar una descripción más amplia del mismo.

3.1 Teoría de Perturbaciones de Rango Mínimo

La teoría de perturbaciones de rango mínimo fue desarrollada para localizar y evaluar el daño en estructuras a partir del análisis modal, aprovechando que los vectores característicos son linealmente independientes. La cualidad fundamental de este esquema es que se obtiene una solución única del problema y el cálculo es directo cuando se cuenta con la información completa de los vectores característicos. El método permite identificar de forma independiente variaciones en los parámetros estructurales de rigidez, amortiguamiento y masas ^[40,41].

En este esquema, se supone que el comportamiento dinámico de la estructura queda descrito mediante un modelo lineal del tipo:

$$[\mathbf{M}_0]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{C}_0]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}_0]\{\mathbf{u}\} = \mathbf{0} \quad (8)$$

Donde $[\mathbf{M}_0]$, $[\mathbf{C}_0]$ y $[\mathbf{K}_0]$ son las matrices de masas, amortiguamiento y rigidez de la condición inicial no dañada.

Partiendo del análisis modal, la transformada de Fourier de la Ecuación (8) queda de la forma:

$$[\mathbf{K}_0 + i\omega_{0i}\mathbf{C}_0 - \omega_{0i}^2\mathbf{M}_0]\{\phi\}_{0i} = \mathbf{0} \quad (9)$$

En donde ω_{0i} y $\{\phi\}_{0i}$ son la frecuencia y el modo natural o valor y vector característicos del *i-ésimo* modo.

Si el daño de la estructura se presenta de tal forma que únicamente afecta a la matriz de rigidez, se puede escribir la matriz de la condición dañada como una perturbación de la condición inicial, o sea,

$$[\mathbf{K}_d] = [\mathbf{K}_0] - [\Delta\mathbf{K}] \quad (10)$$

Así pues, la ecuación modal de la condición de daño se puede escribir de la forma:

$$[\mathbf{K}_0 + i\omega_{di}\mathbf{C}_0 - \omega_{di}^2\mathbf{M}_0]\{\phi\}_{di} = [\Delta\mathbf{K}]\{\phi\}_{di} \equiv \{\mathbf{d}\}_i \quad (11)$$

Analizando detenidamente la Ecuación (11), es evidente que a partir de una prueba experimental se pueden conocer los vectores y valores característicos (ω_{di} y $\{\phi\}_{di}$) para N número determinado de modos ($i = 1, \dots, N$); por lo tanto, es posible conocer sus correspondientes vectores de daño $\{\mathbf{d}\}_i$ a partir de dichas medidas y los parámetros estructurales iniciales.

Si se define la matriz de daño $[\mathbf{D}]$ y a la matriz de vectores característicos de daño $[\Phi_d]$ como:

$$[\mathbf{D}] = [\{\mathbf{d}\}_1 \quad \{\mathbf{d}\}_2 \quad \dots \quad \{\mathbf{d}\}_N]$$

$$[\Phi_d] = [\{\phi\}_{d1} \quad \{\phi\}_{d2} \quad \dots \quad \{\phi\}_{dN}]$$

Por lo tanto, la Ecuación (11) se puede expresar de la forma siguiente:

$$[\Delta\mathbf{K}][\Phi_d] \equiv [\mathbf{D}] \quad (12)$$

Ahora, nuestro problema es determinar el valor de $[\Delta\mathbf{K}]$ en términos de $[\mathbf{D}]$ y $[\Phi_d]$. Mediante un estudio detallado ^[40], se demuestra que la solución de rango mínimo está dada por:

$$[\Delta\mathbf{K}] = [\mathbf{D}][\mathbf{D}]^T [\Phi_d]^{-1} [\mathbf{D}]^T \quad (13)$$

Cabe mencionar, que el rango de la solución siempre será menor o igual que el rango de los vectores característicos obtenidos experimentalmente; así pues, el rango del daño deberá ser menor que el de los modos dinámicos medidos. Dicho de otro modo, el grado de severidad del daño en la estructura está en proporción directa al número de modos identificados para que se pueda obtener un buen resultado de la matriz de perturbación ^[42].

Es igualmente importante destacar que en la práctica no es posible medir experimentalmente todos los grados de libertad de los modos dinámicos, por lo que no sólo se tiene un número limitado de modos, sino también se tienen modos con información incompleta. Esto, implica que los esquemas de solución aplicando la teoría de perturbaciones de rango mínimo se compliquen e implementen algoritmos que permitan complementar la información faltante. Para mayor información sobre esto, se recomienda la Referencia 43.

3.2 La detección de daño como problema inverso

El comportamiento de propagación de una onda de deformación en una estructura compleja queda descrito por la siguiente ecuación:

$$[\mathbf{M}_0]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{C}_0]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}_0]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{P}\}$$

La notación utilizada es la de los métodos de elemento finito ^[44]. Si representamos la condición de daño como una perturbación de las matrices de rigidez $[\mathbf{K}_d] = [\mathbf{K}_0] - [\Delta\mathbf{K}]$ y masa $[\mathbf{M}_d] = [\mathbf{M}_0] - [\Delta\mathbf{M}]$, respecto a las condiciones iniciales sin daño, el problema queda descrito como:

$$[\mathbf{M}_0 - \Delta\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{C}_0]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}_0 - \Delta\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{P}\}$$

Reacomodando los términos se tiene que:

$$[\mathbf{M}_0]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{C}_0]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}_0]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{P}\} - [\Delta\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} + [\Delta\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} = \{\mathbf{P}\} + \{\mathbf{D}\} \quad (14)$$

Evidentemente, el vector $\{\mathbf{D}\}$ contiene toda la información del daño por lo que se denomina el Vector de Respuesta al Daño (VRD). Si se conoce --de alguna manera-- este vector, es posible extraer toda la información del daño de éste. A manera de ilustración, consideremos el caso en el que sólo se modifica la rigidez, es decir,

$$[\Delta \mathbf{K}][\mathbf{u}] = [\mathbf{D}] \quad (15)$$

donde la información temporal y espacial de $\{\mathbf{u}(t)\}$ y $\{\mathbf{D}(t)\}$ se escribió como matrices rectangulares $[\mathbf{u}]$ y $[\mathbf{D}]$, respectivamente. Este conjunto de ecuaciones está mal condicionado, por lo que la solución de $[\Delta \mathbf{K}]$ no es directa; sin embargo, se modifica la teoría de perturbaciones de rango mínimo ^[40] para resolver este caso.

3.3 Adaptación de la MRPT para el modelo inverso

Al proponer el problema del daño como un problema inverso en estructuras de acuerdo al modelo descrito en la sección anterior, plantea un esquema de solución de dos pasos: primero, identificar los vectores de respuesta al daño y, segundo, calcular la matriz de perturbaciones a partir de los VRD y los desplazamientos medidos experimentalmente. Así, obtener los VRD se logra mediante los algoritmos de identificación de fuerzas ya descritos en el capítulo anterior y a continuación, se describe cómo se calcula la matriz de perturbaciones modificando el esquema propuesto por la MRPT.

La cualidad de la independencia lineal de los vectores característicos que se aprovecha en teoría de perturbaciones de rango mínimo para resolver la matriz de perturbaciones, no se tiene en el modelo de daño desarrollado a partir de la propagación de ondas; en nuestro caso, las estructuras de las matrices $[\mathbf{u}]$ y $[\mathbf{D}]$ es totalmente diferente. Así pues, se propone aplicar un cálculo por mínimos cuadrados ^[26], de donde la Ecuación (15) se expresa de la siguiente forma:

$$[\Delta \mathbf{K}][\mathbf{X}_{uu}] = [\mathbf{X}_{Du}]$$

donde $[\mathbf{X}_{uu}] = [\mathbf{u}][\mathbf{u}]^T$ y $[\mathbf{X}_{Du}] = [\mathbf{D}][\mathbf{u}]^T$.

Aplicando el resultado de la teoría de perturbaciones de rango mínimo, la matriz de perturbación de la rigidez se puede resolver de la forma:

$$[\Delta \mathbf{K}] = [\mathbf{X}_{Du}] \left[[\mathbf{X}_{Du}]^T [\mathbf{X}_{uu}] \right]^{-1} [\mathbf{X}_{Du}]^T$$

El cálculo de la matriz inversa del término $[\mathbf{X}_{du}]^T [\mathbf{X}_{uu}]$ se realiza mediante una descomposición de valores singulares ^[26] y tomando el subconjunto de valores significativos únicamente. Una vez calculada la matriz de perturbaciones $[\Delta \mathbf{K}]$, es un proceso directo relacionar el daño con los grados de libertad y los elementos correspondientes, así como con los valores de variación en los parámetros estructurales.

La clave fundamental de este proceso de identificación del daño radica en la capacidad de identificar el vector $\{\mathbf{D}\}$. Los componentes de este vector están asociados con los nodos del modelo de elemento finito y constituye un conjunto muy grande de incógnitas. Nótese, de la ecuación (3), que el VRD es similar al vector de fuerzas $\{\mathbf{P}\}$; así pues, una forma de interpretar a $\{\mathbf{D}\}$ es como un conjunto de fuerzas externas que actúan sobre la estructura no dañada y que producen una respuesta similar a la obtenida con la estructura dañada. Así pues, nuestro problema se reduce a la identificación de fuerzas, donde podemos aplicar el MISD antes descrito.

4 Ejemplos de aplicación

Para demostrar el potencial del Método Inverso por Sub-Dominios (MISD) para la detección de daño, se presentan tres diferentes casos. El primero, analiza el daño localizado en un solo elemento de una estructura utilizando poca instrumentación. El segundo, describe un escenario de mucha instrumentación y propone dos niveles de análisis para detectar y cuantificar el daño por sub-regiones. El tercer caso, corresponde a una situación en la que las condiciones de frontera son desconocidas y las fuerzas de excitación también. Este último caso trata de apegarse a una situación que pudiera presentarse en la práctica teniendo monitoreo remoto.

4.1 Daño localizado con poca instrumentación

Consideremos una estructura espacial en dos dimensiones cuyas condiciones originales se conocen totalmente, incluyendo condiciones de frontera y parámetros estructurales. Supongamos ahora que se daña un elemento de la estructura y queremos identificarlo. Para esto se colocan 4 sensores bidireccionales (8 sensores en total) cuidando que queden distribuidos en toda la estructura sin que necesariamente exista un punto en particular donde se deban localizar. Para identificar el elemento dañado, se simula numéricamente una prueba experimental en la que se aplica una fuerza externa de impacto (conocida) para excitar la vibración de la estructura y medir la respuesta en los sensores. El punto de aplicación de la carga externa se selecciona aleatoriamente. En la Figura 5 se muestra el tipo de estructura y las condiciones antes descritas.

Para identificar el elemento dañado en este caso, se parte del hecho de que al calcular todos los vectores de respuesta al daño asociados con el elemento dañado, se cumple la condición de equilibrio por la que la suma total de éstos es cero. Por el contrario, cuando se calculan estos vectores para un elemento diferente, esta condición no se cumple. Por lo tanto, se puede definir una función de optimización que corresponda a la fuerza total normalizada de los vectores de respuesta al daño de un elemento.

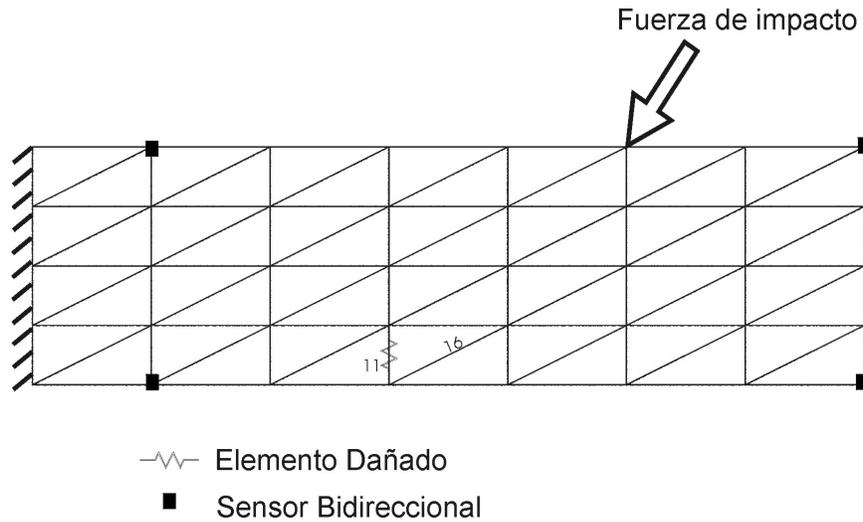


Figura 5 Estructura espacial bidimensional con un elemento dañado y poca instrumentación

En este caso, los elementos viga del modelo se conectan por medio de dos nodos (denominados 1 y 2). Así, para el elemento i , sólo se identifican los vectores de respuesta al daño de dichos nodos, es decir $D_{1i}(t)$ y $D_{2i}(t)$. Nótese que estos vectores son bidimensionales ($D_{1i}(t) = [dx_{1i}(t), dy_{1i}(t)]$, $D_{2i}(t) = [dx_{2i}(t), dy_{2i}(t)]$). La función de optimización se define como:

$$P_i = \frac{\|dx_{1i} + dx_{2i}\|}{m_x} + \frac{\|dy_{1i} + dy_{2i}\|}{m_y}$$

Donde m_x y m_y se definen como $m_x = \max_{j=1}^M \{\|dx_{1j} + dx_{2j}\|\}$ y $m_y = \max_{j=1}^M \{\|dy_{1j} + dy_{2j}\|\}$ ($M =$ total de elementos) y son factores de normalización para las diferentes direcciones x y y . Se definen dos factores ya que los órdenes de magnitud entre x y y pueden ser diferentes dependiendo de la fuerza de excitación.

Aplicando un método iterativo en el que se calculan los vectores de respuesta para uno y cada uno de los elementos, se obtiene la función de optimización de las fuerzas totales de respuesta de éstos. El elemento que tiene el valor mínimo es el dañado.

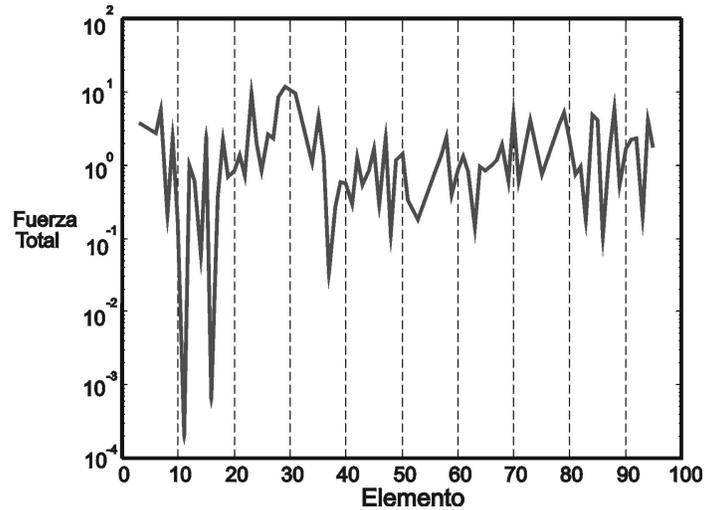


Figura 6 Fuerza total de daño normalizada por elemento

En la Figura 6 se presenta una gráfica con los valores de la fuerza total normalizada calculada de los vectores de respuesta al daño. Nótese que el elemento 11 (que corresponde al dañado) tiene el valor mínimo. De igual manera, se obtiene para el elemento 16 un valor de la fuerza total muy pequeño y esto se debe a que es un elemento muy cercano al dañado y su respuesta al daño, “vista” desde los sensores, es muy semejante. Aún así el elemento dañado se puede distinguir.

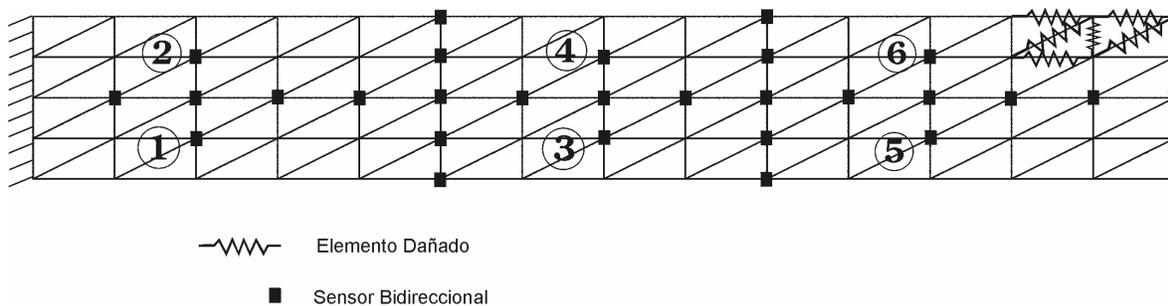
4.2 Análisis por sub-regiones

En la Figura 7 se presenta una estructura espacial bidimensional que ha sido dividida en 6 sub-regiones. Suponemos que todos los nodos están instrumentados con sensores bidimensionales. En este caso, como en el anterior, se conocen las condiciones de frontera y los parámetros iniciales que definen la estructura.

El objetivo en este estudio es mostrar dos niveles de análisis, global y detallado. El análisis global identifica los vectores de respuesta al daño a partir de un subconjunto de sensores (indicados en la Figura 7) para monitorear la presencia de daño en una (o varias) de las sub-regiones. Una vez que se identifica la sub-región dañada, se realiza el análisis detallado con la información de todos

los sensores dentro de esa sub-región calculando todos los VDR dentro de ésta. De aquí, se calcula la matriz de perturbación ΔK , la cual contiene toda la información que caracteriza al daño.

La selección del subconjunto de sensores que se utilizan en el análisis global se realiza considerando todos los sensores en los nodos fronterizos que limitan las regiones y tomando, al menos, un sensor bidireccional dentro de cada sub-región (Figura 7). De igual manera, la identificación de los vectores de respuesta al daño se hace para los mismos grados de libertad correspondientes a todos esos sensores; sin embargo, para el monitoreo únicamente basta analizar las respuestas de los sensores internos.



En la figura se indican los sensores utilizados para el análisis global (aprox. 30% del total) y los 6 sensores utilizados para monitorear el daño de las sub-regiones.

Figura 7 Estructura espacial bidireccional

Simulando una sola prueba de impacto cuya fuerza es conocida, se obtienen las respuestas de todos los sensores de manera equivalente a una prueba real. Los datos provenientes de los sensores se seleccionan y utilizan según se requiera, de acuerdo con el nivel de análisis. En las figuras 8 y 9 se presentan los vectores de respuesta al daño de los 6 sensores de monitoreo para las direcciones x y y aplicando el análisis global. De inmediato, se identifica la sub-región 6 como la dañada ya que es la única que muestra valores diferentes de cero.

Una vez reconocida la sub-región dañada, se toma toda la información de los sensores relacionados con ésta y se realiza el análisis detallado obteniendo todos VDR y, luego, calculando la matriz de perturbación de rigidez. En la Figura 10 (a) y (b), se compara la matriz de perturbación calculada con los valores reales de la matriz. Al nivel de cálculo mostrado en este ejemplo, prácticamente no se observa diferencia alguna entre éstas. Es importante insistir que toda la información se obtuvo de una sola prueba.

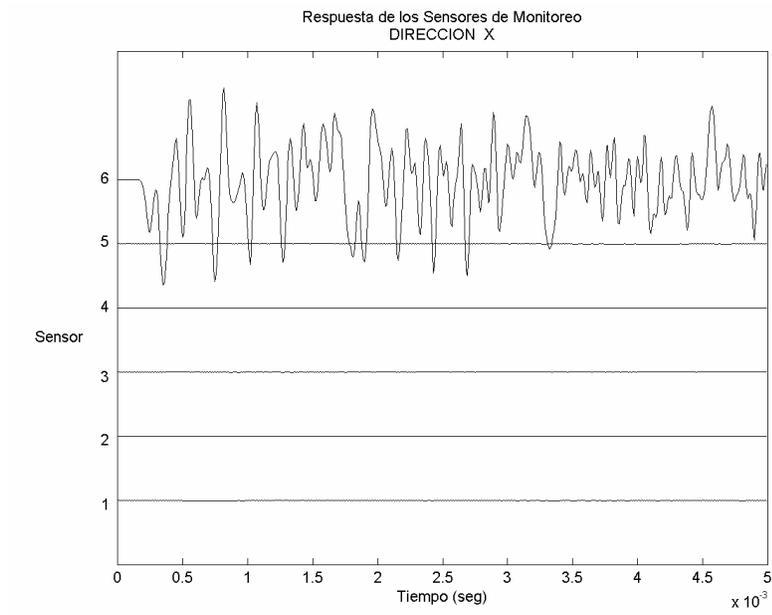


Figura 8

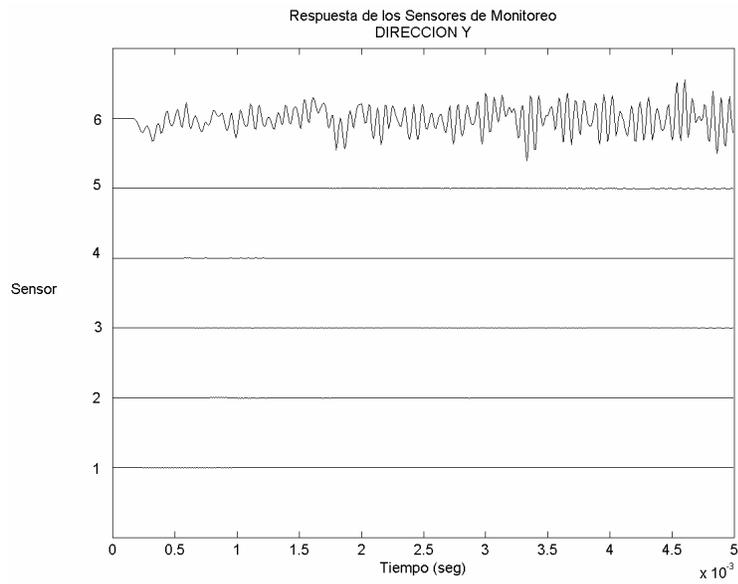
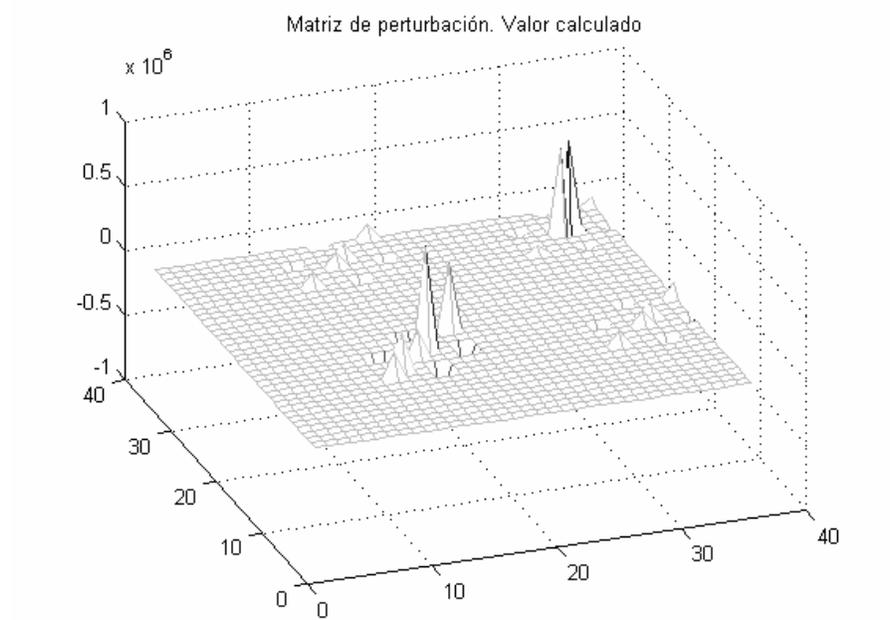
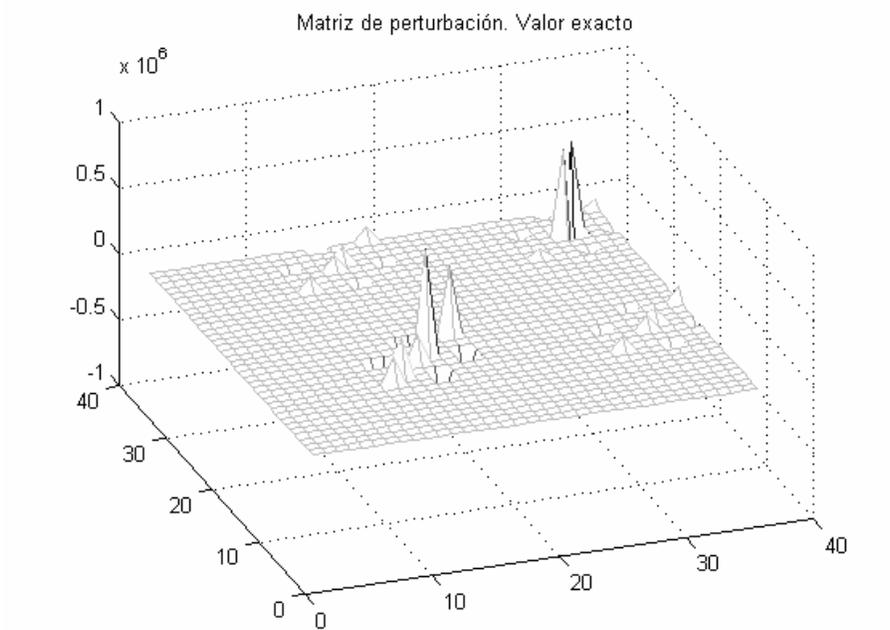


Figura 9



(a)



(b)

Figura 10 Comparación de las matrices de perturbación

4.3 Análisis por sub-dominio

Supóngase el caso de una estructura de la que sólo se conocen sus propiedades en una región determinada; sus condiciones de frontera en los apoyos y las fuerzas con que se excita la vibración en la prueba experimental se desconocen. La Figura 11 esquematiza el caso de este tipo de estructura y en la que existe daño en la sub-región conocida, mismo que se desea identificar a partir de las respuestas medidas en esa prueba.

En este ejemplo, se define el sub-dominio (Figura 11 b) conocido y el cual se supone totalmente instrumentado. Como se indica en esa figura, al aislar el sub-dominio, el resto de la estructura (no conocida) se sustituye por fuerzas de tracción (igualmente desconocidas) que se van a identificar como parte del problema. Así también, las fuerzas de excitación (desconocidas) se suman al número de incógnitas del problema.

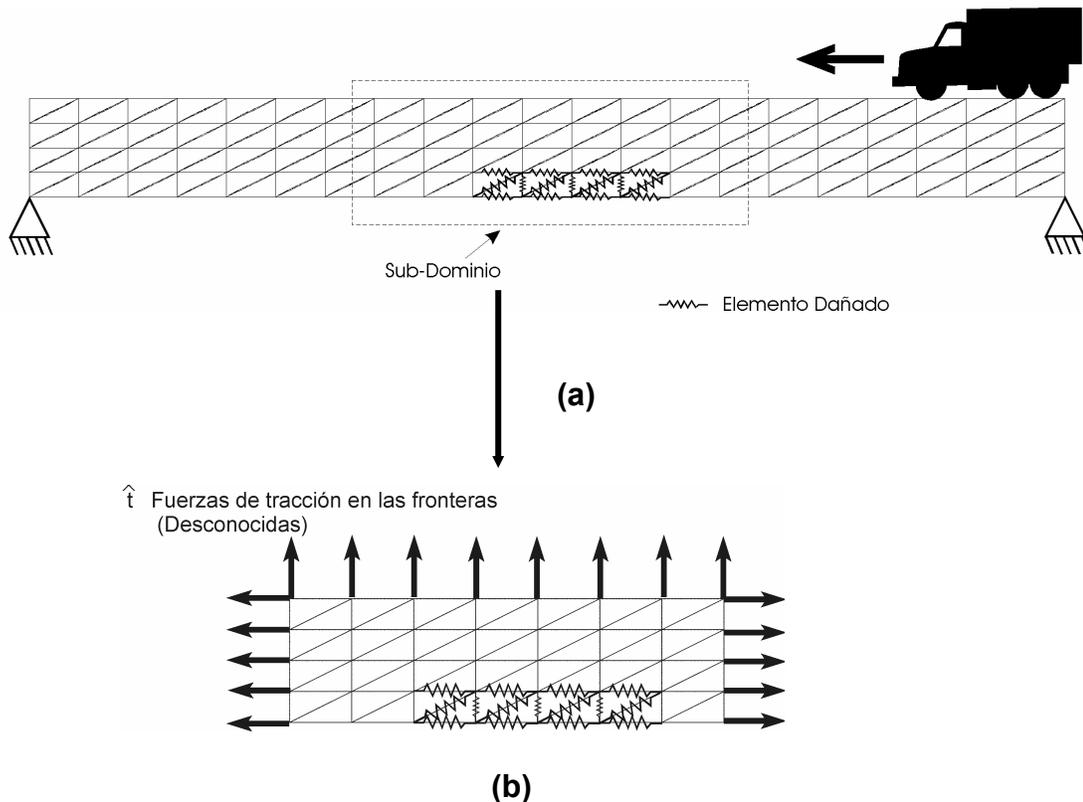


Figura 11

En el ejemplo mostrado, los datos utilizados se obtuvieron de una simulación cuya excitación corresponde a la forma de la función mostrada en la Figura 12. Esta fuerza en dirección negativa del eje y , fue la misma para todos los nodos superiores, pero desfasados un intervalo de tiempo para simular la condición de una carga viajera que se desplaza sobre la estructura. La motivación de lo anterior fue simular una situación equivalente a la que se somete un puente carretero en el momento que circula un vehículo sobre éste.

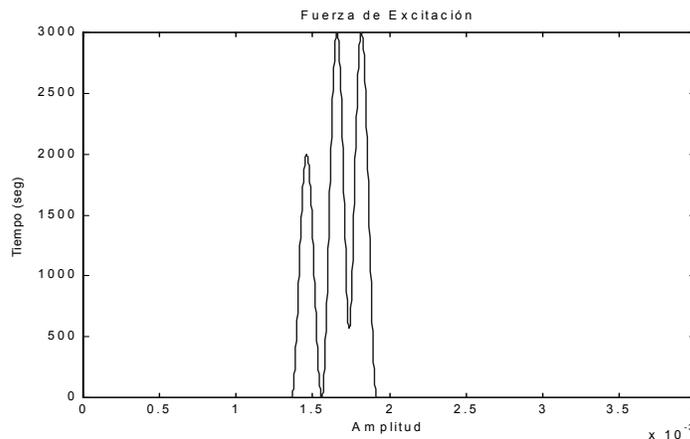


Figura 12

En la Figura 13 se presentan los resultados del problema inverso al resolver las fuerzas de tracción en las fronteras de Sub-Dominio. Nótese (Figura 13 b) que las fuerzas de excitación pueden ser conocidas y corresponden, con una muy buena aproximación, al valor utilizado en la simulación para obtener las respuestas en los sensores.

Dado que en este problema no nos interesa de manera particular conocer las fuerzas de tracción en las fronteras, se ignoran (haciéndolas cero) antes de realizar el cálculo de la matriz ΔK . Para esto, se utiliza la teoría modificada de perturbaciones de rango mínimo, según se describió anteriormente.

Cabe destacar que para hacer esto, es necesario que los elementos dañados no estén relacionados directamente con las fuerzas de tracción. En general, esto no representa una fuerte limitante, pues en casi todos los casos prácticos podemos seleccionar las fronteras del sub-dominio de tal manera que se alejen suficientemente de la región de interés. En cuanto a las fuerzas de excitación, se puede nodalizar la estructura de tal forma que se modele la

superficie sobre la cual se aplican las cargas con un detalle suficiente para que estas fuerzas no interactúen directamente con los elementos que se van a analizar.

En la Figura 14 se comparan los valores de las matrices de perturbación calculada (a) y exacta (b). Nótese nuevamente el grado de exactitud que se obtiene con el método de análisis utilizado en este ejemplo. Es importante destacar que todo este análisis se realiza con una sola prueba y que se puede hacer de forma remota. Para esto se requiere de la instrumentación y del conocimiento de los parámetros estructurales del sub-dominio.

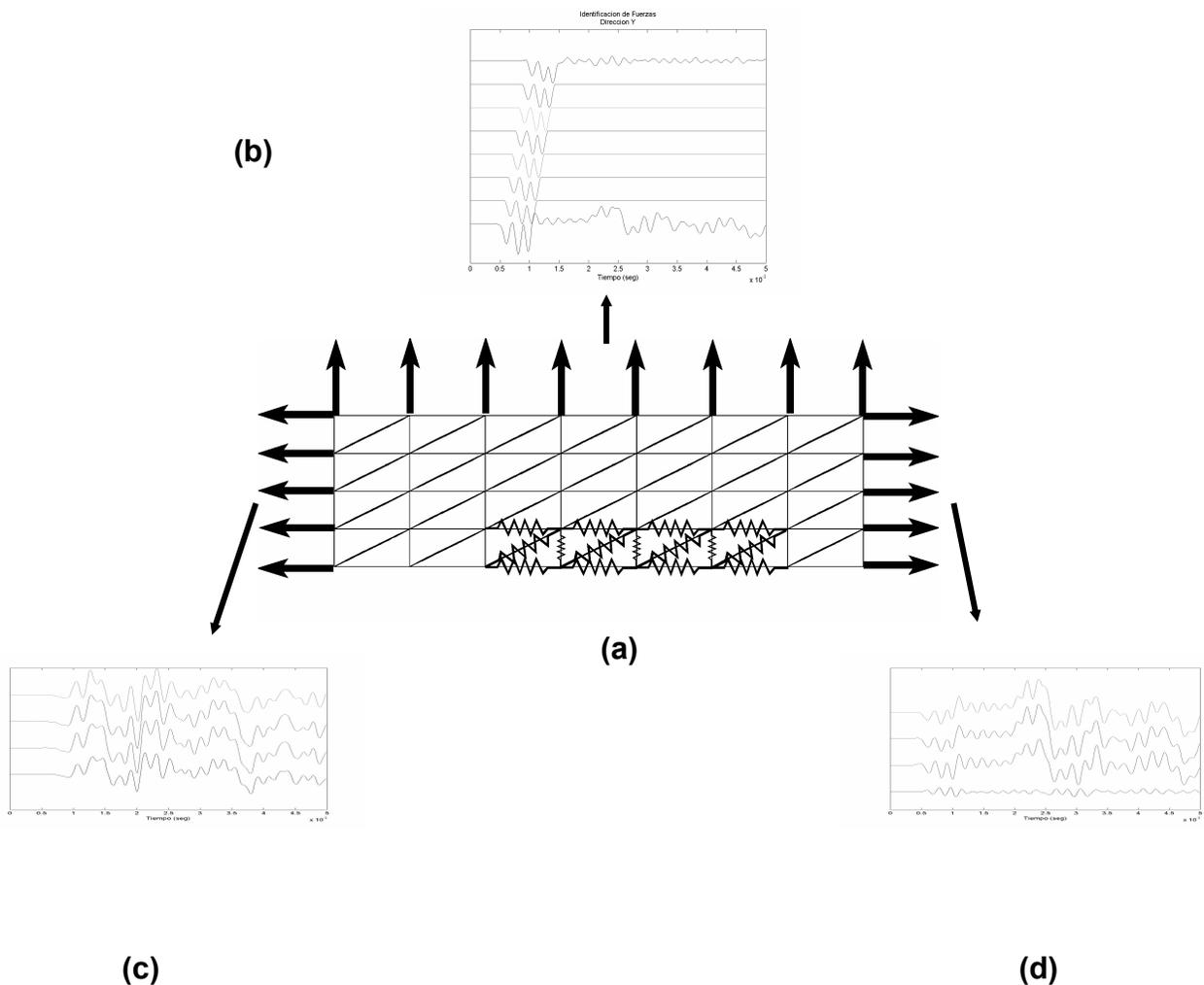
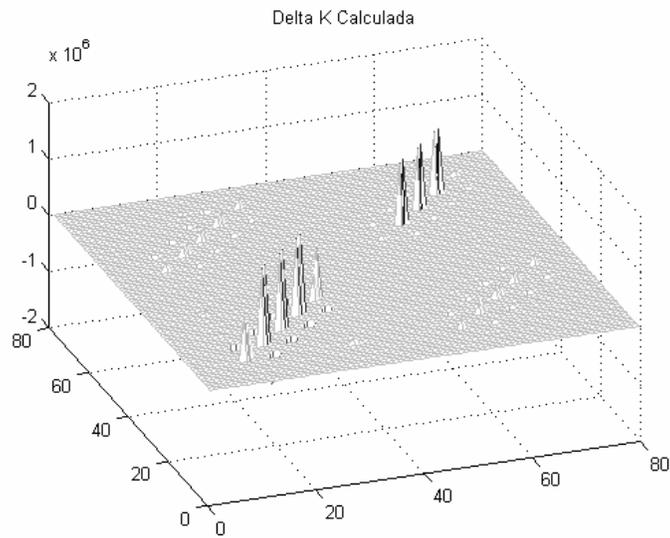
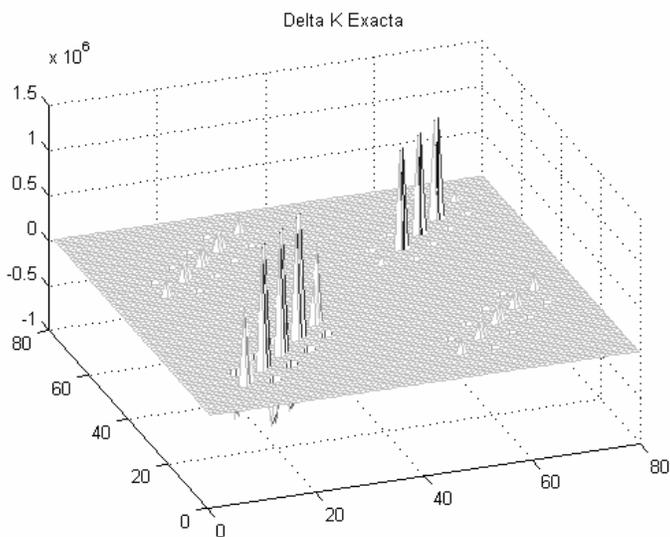


Figura 13 Fuerzas de tracción para las fronteras del Sub-Dominio



(a)



(b)

Figura 14

5 Conclusiones

La conclusión más importante del trabajo es que conjuntando las teorías de identificación de fuerzas y la de perturbaciones de rango mínimo, se obtiene un esquema flexible y potencialmente útil para la detección de daño. Los resultados obtenidos en los casos analizados son alentadores y describen un método totalmente novedoso y diferente a los basados en el análisis modal. El esquema se fundamenta en dos aspectos primordiales; el hecho de que se tienen muchos sensores y que se conocen las propiedades iniciales de la estructura. Si esto se cumple al menos en forma parcial, es posible aplicarlo a cualquier tipo de estructura.

La ventaja de poder utilizar distintos tipos de sensores, separar en sub-regiones e, inclusive, partir el modelo en sub-dominios, da al método una flexibilidad de análisis que permite adaptarlo a las diferentes necesidades que el análisis de daño estructural requiere. Con el análisis global se facilitan los estudios rápidos en tiempo real y mediante el análisis detallado es posible la caracterización total del daño en una estructura. Por otra parte, el poder realizar pruebas con excitaciones aleatorias o desconocidas, amplía las posibilidades de prueba y hace factible el monitoreo remoto bajo condiciones normales de operación.

Del método de deconvolución Wavelet para la identificación de fuerzas, se descubre un gran potencial, no sólo por la posibilidad del uso de sensores espaciales, sino por la estructura cuasi-Toeplitz de las matrices resultantes y que plantean la posibilidad de utilizar esquemas de solución super-rápidos y que proponen líneas de investigación para optimizar los algoritmos de solución.

El análisis de la respuesta dinámica de los puentes ha demostrado ser una herramienta muy poderosa para evaluar la condición estructural de este tipo de infraestructuras. Su aplicación como una técnica no destructiva ha resultado ser muy efectiva; sin embargo, su implementación práctica no es sencilla.

En primer lugar, es necesario contar con un modelo teórico, numérico o experimental de referencia, con objeto de tener información de los parámetros de vibración que representan la condición ideal o sin daño, y que serán los valores con que se comparen las condiciones futuras o subsecuentes.

En segundo lugar, el procedimiento experimental se debe planear con cuidado para obtener la información deseada y evitar los errores de medición.

Finalmente, la selección del algoritmo de interpretación, que debe estar muy ligado con el procedimiento experimental y la instrumentación, se debe seleccionar tomando en cuenta las características del puente y el potencial daño que puede

tener. Es importante destacar que, independientemente de lo anterior, para tener información detallada y suficiente, se requiere de una instrumentación igualmente proporcionada a ese nivel de detalle. En cuanto a los diferentes esquemas para la detección de daño, se encuentra una relación directa entre su grado de complejidad y el nivel de detalle que proporciona. Es posible adaptar uno de los modelos para la detección del daño y emplearlo en forma simplificada en un esquema para la administración de puentes, de tal manera que sea simple y de fácil aplicación.

Referencias

- 1 D. Huston, **Smart civil structures - an overview**, *Smart Structures and Skins IV*, SPIE, Boston, 1991.
- 2 P. L. Fuhr, D. R. Huston, P. J. Kajenski, and T. P. Ambrose, **Performance and health monitoring of the Stafford Medical Building using embedded sensors**, *Journal of Smart Materials and Structures*, **1**(1),pp. 63-68, 1992.
- 3 M. I. Friswell, and D. J. Inman, **Sensor validation for smart structures**, *IMAC-XVIII: Conference on Structural Dynamics*, San Antonio, pp. 483-489, 2000.
- 4 A. E. Aktan, A. J. Helmicki, and V. J. Hunt, **Issues in health monitoring for intelligent infrastructure**, *Journal of Smart Materials and Structures*, **7**(5), pp. 674-692, 1998.
- 5 A. E. Aktan, and K. A. Grimmelsman, **The role of NDE in bridge health monitoring**, *Proceedings of the SPIE: Conference on Nondestructive Evaluation of Bridges and Highways II*, SPIE **3587**, Newport Beach, California, 1999.
- 6 D. J. Pines, and P. A. Lovell, **Conceptual framework of a remote wireless health monitoring system for large civil structures**, *Journal of Smart Materials and Structures*, **7**(5), pp. 627-692, 1998.
- 7 E. J. Friebele, et. al., **Optical fiber sensors for spacecraft applications**, *Journal of Smart Materials and Structures*, **8**(6), pp. 813-838, 1999.
- 8 Y. Y. Huang, **Shearography: A new optical method for strain measurement and non-destructive testing**, *Optical Engineering*, pp. 391-395, 1982.
- 9 R. Aprahamian, D. A. Evensen, J. S. Mixson, and J. E. Wright, **Application of pulsed holographic interferometry to the measurement of propagating transverse waves in beams**, *Experimental Mechanics*, **11**, pp. 309-314, 1971.
- 10 R. Aprahamian, D. A. Evensen, J. S. Mixson, and J. L. Jacoby, **Holographic study of propagating transverse waves in plates**, *Experimental Mechanics*, **11**, pp. 357-362, 1971.
- 11 D. Post, B. Han, and P. Ifju, **High sensitivity Moiré**, *Springer-Verlag*, New York, 1994.
- 12 J. W. Dally, and D. T. Read, **Electron beam Moiré**, *Experimental Mechanics*, **50**, pp. 270-277, 1993.
- 13 D. E. Oliver, **Stress analysis by thermal emission**, In *Chapter 14, Handbook on Experimental Mechanics*, A. S. Kobayashi, editor, pp. 79-118, Society for Experimental Mechanics, 1993.

- 14 J. W. Dally, **An introduction to dynamic photoelasticity**, *Experimental Mechanics*, **20**, pp. 409-416, 1980.
- 15 A. Asundi, and M. R. Sajan, **Digital dynamic photoelasticity – Recent advances**, *Proceedings SEM*, Baltimore, **28**, pp. 212-217, 1994.
- 16 C. R. Farrar, and D. A. Jauregui, **Comparative study of damage identification algorithms applied to a bridge: I. Experiment**, *Journal of Smart Materials and Structures*, **7**(5), pp. 704-719, 1998.
- 17 C. R. Farrar, and D. A. Jauregui, **Comparative study of damage identification algorithms applied to a bridge: II. Numerical study**, *Journal of Smart Materials and Structures*, **7**(5), pp. 720-731, 1998.
- 18 A. Kirsch, **An introduction to the mathematical theory of inverse problems**, *Springer-Verlag*, New York, 1996.
- 19 R. A. Adams, **Force identification in complex structures**, *M.S. Thesis*, Purdue University, 1999.
- 20 A. N. Tikhonov, and V. Y. Arsenin, **Solutions of Ill-Posed problems**, *Wiley & Sons*, New York, 1977.
- 21 D. M. Trujillo, and H. R. Busby, **Practical inverse analysis in engineering**, *CRC Press*, Boca Raton, 1997.
- 22 J. F. Doyle, **A wavelet deconvolution method for impact force identification**, *Experimental Mechanics*, **37**, pp. 404-408, 1997.
- 23 J. F. Doyle, **Determining dynamic events for time-limited spatially distributed data**, *Computer Methods in Engineering*, submitted, 2000.
- 24 S. M. Cho, **Sub-domain inverse method**, *M. S. Thesis*, Purdue University, 2000.
- 25 T. Kailath, and A. H. Sayed, Eds., **Fast reliable algorithms for matrices with structure**, *SIAM*, Philadelphia, PA, 1999.
- 26 W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, **Numerical Recipes**, 2nd Ed., *Cambridge University Press*, Cambridge, 1992.
- 27 R. Chan, and M. Ng, **Conjugate gradient methods for Toeplitz systems**, *SIAM Review*, **38**(3), pp. 427-482.
- 28 S. Serra, **Superlinear PCG methods for symmetric Toeplitz systems**, *Mathematics of Computation*, **68**(226), 1999.
- 29 X. Jin, **Fast iterative solvers for symmetric Toeplitz systems – A survey and an extension**, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **66**, pp. 315-321, 1996.
- 30 V. Pan, A. Zheng, O. Dias, and X. Huang, **A fast, preconditioned conjugate gradient Toeplitz and Toeplitz-like solvers**, *Computers and Mathematical Applications*, **30**(8), pp. 57-63, 1995.

-
- 31 G. Ammar, and W. Gragg, **Superfast solution of real positive definite Toeplitz systems**, *SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications*, **9**(1), 1988.
- 32 G. Ammar, and W. Gragg, **Numerical experience with a superfast real Toeplitz solver**, *Linear Algebra and Its Applications*, **121**, pp. 185-206, 1989.
- 33 M. Van Barel, and P. Kravanja, **A stabilized superfast solver for indefinite Hankel systems**, *Linear Algebra and Its Applications*, **284**, pp. 335-355, 1998.
- 34 M. Van Barel, G. Heining, and P. Kravanja, **A stabilized superfast solver for nonsymmetric Toeplitz systems**, *Dept. of Computer Science*, Report **TW293**, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 1999.
- 35 R. M. Morey, **Innovative GPR for pavement inspection**, *Proceedings of the SPIE: Conference on Nondestructive Evaluation of Bridges and Highways II*, SPIE **3587**, Newport Beach, California, 1999.
- 36 N. K. Del Grande, and P. F. Durbin, **Delamination detection in reinforced concrete using thermal inertia**, *Proceedings of the SPIE: Conference on Nondestructive Evaluation of Bridges and Highways II*, SPIE **3587**, Newport Beach, California, 1999.
- 37 D.-J. Yoon, W. J. Weiss, D. W. Prine, and S. P. Shah, **Assessing corrosion damage in reinforced concrete beams using acoustic emission**, *Proceedings of the SPIE: Conference on Nondestructive Evaluation of Bridges and Highways II*, SPIE **3587**, Newport Beach, California, 1999.
- 38 E. A. Mandracchia, **Ultrasonic dead load testing of steel highway bridges**, *Structural Materials Technology III, An NDT Conference*, SPIE **3400**, San Antonio, Texas, 1998.
- 39 Z. Zhang, and A. E. Aktan, **The damage indices for the constructed facilities**, *Proceedings of the 13th IMAC*, Nashville, TN, 1995.
- 40 M. Kaouk, and D. C. Zimmerman, **Structural damage assessment using a generalized minimum rank perturbation theory**, *AIAA Journal*, **32**(4), pp. 836-842, 1994.
- 41 M. Kaouk, and D. C. Zimmerman, **Structural health assessment using a partition model update technique**, *Proceedings of the 13th IMAC*, Nashville, TN, 1995.
- 42 D. C. Zimmerman, T. Simmermacher, and M. Kaouk, **Structural damage detection using frequency response functions**, *Proceedings of the 13th IMAC*, Nashville, TN, 1995.
- 43 G. James, D. C. Zimmerman, and T. Cao, **Development of a coupled approach for structural damage detection with incomplete measurements**, *AIAA Journal*, **32**(12), pp. 2209-2217, 1998.

- 44 J. Doyle, *Static and Dynamic Analysis of Structures*, Kluwer, The Netherlands, 1991.

**CIUDAD DE MEXICO**

Av. Patriotismo 683
Col. Mixcoac
03730, México, D. F.
Tel (55) 56 15 35 75
55 98 52 18
Fax (55) 55 98 64 57

SANFANDILA

Km. 12+000, Carretera
Querétaro-Galindo
76700, Sanfandila, Qro.
Tel (442) 2 16 97 77
2 16 96 46
Fax (442) 2 16 96 71

Internet: <http://www.imt.mx>
publicaciones@imt.mx