



---

---

# **Teorías para calcular esfuerzos, deformaciones y deflexiones en pavimentos flexibles: un enfoque mecanicista**

Carlos Adolfo Coria Gutiérrez  
Roberto Israel Hernández Domínguez  
Paul Garnica Anguas

**Documento Técnico No. 72  
Sanfandila, Qro, 2018**



---

**SECRETARÍA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES**

**INSTITUTO MEXICANO DEL TRANSPORTE**

**Teorías para calcular esfuerzos, deformaciones y deflexiones en pavimentos flexibles: un enfoque mecanicista**

**Documento Técnico No. 72  
Sanfandila, Qro, 2018**

---



Esta investigación fue realizada en la Coordinación Infraestructura del Instituto Mexicano del Transporte, por M. I. Carlos Adolfo Coria Gutiérrez, M. I. Roberto Israel Hernández Domínguez y Dr. Paul Garnica Anguas.

Esta investigación es el producto final del proyecto de investigación externa IE 18/12 “Desarrollo de una herramienta informática para el diseño mecanicista de pavimentos flexibles”



# Contenido

---

Índice de figuras .....	v
Índice de tablas .....	xi
Índice de ejemplos .....	xv
Sinopsis .....	xvii
Abstract.....	xix
Resumen ejecutivo .....	xxi
Introducción.....	1
Objetivo general .....	1
Objetivos particulares.....	1
1 Fundamentos del comportamiento mecánico de los materiales .....	3
1.1 Elasticidad .....	5
1.1.1 Principios de la Teoría de la elasticidad: Ley de Hooke .....	5
1.2 Plasticidad .....	11
1.3 Viscosidad .....	12
2 Presión aplicada en la superficie del pavimento flexible .....	15
3 Respuestas estructurales en el pavimento flexible .....	17
3.1 Respuestas derivadas de la aplicación de carga.....	19
3.1.1 Esfuerzos y deformaciones verticales.....	19
3.1.2 Esfuerzos y deformaciones cortantes .....	19
3.1.3 Esfuerzos y deformaciones tangenciales y radiales .....	20
3.1.4 Deflexiones .....	20
3.2 Respuestas no derivadas de la aplicación de carga .....	20

4	Principio de superposición aplicado al análisis estructural de pavimentos flexibles .....	27
5	Análisis lineal, no lineal, Viscoelástico y elemento finito en pavimentos flexibles	35
5.1	Análisis lineal .....	35
5.2	Análisis no lineal .....	35
5.2.1	Módulo Resiliente .....	36
5.3	Análisis viscoelástico .....	39
5.4	Análisis de elemento finito .....	40
6	Metodología de diseño de pavimentos flexibles empírico-mecanicista .....	43
7	Metodología de diseño de pavimentos flexibles .....	47
8	Sistemas estructurales de 1 capa (Monocapa) .....	49
8.1	Boussinesq (1885) .....	49
8.2	Fadum (1948) .....	57
8.3	Newmark (1942) .....	58
8.4	Damy y Casales (1985) .....	58
8.5	Foster y Ahlvin (1954) .....	60
8.6	Ahlvin y Ulery (1962) .....	67
9	Sistemas estructurales de 2 capas (Bicapa) .....	81
9.1	Burmister (1943) .....	81
9.2	Fox (1948) .....	86
9.3	Hank y Scrivner (1949).....	96
9.4	Huang (1969) .....	100
9.5	Swift (1972) .....	122
9.6	Caracterización de materiales) .....	125
10	Sistemas estructurales de 3 capas (Tricapa).....	133

---

10.1	Acum y Fox (1951) .....	133
10.2	Caracterización de materiales .....	138
10.3	Peattie (1962) .....	154
10.4	Kirk (1966) .....	154
10.5	Iwanow (1973) .....	156
11	Sistemas estructurales de n-capas (Multicapa).....	161
11.1	Mehta y Veletsos (1959) .....	162
11.2	Vesic (1963) .....	163
12	Sistemas estructurales de equivalencia .....	167
12.1	Palmer y Barber (1940) .....	168
12.2	Odemark (1949) .....	171
12.2.1	Deducción de fórmulas de Odemark para estructuras de pavimentos de 2 capas. 174	
12.2.2	Deducción de fórmulas de Odemark para estructuras de pavimentos de 3 capas 175	
12.2.3	Deducción de fórmulas de Odemark para estructuras de pavimentos de 4 capas 176	
12.2.4	Deducción de fórmulas de Odemark para estructuras de pavimentos de 5 capas 177	
12.3	Van Gurp (1995) .....	181
12.4	Thenn de Barros (1966) .....	183
13	Problemas propuestos .....	191
14	Determinación de esfuerzos, deformaciones y deflexiones en sistemas de pavimento multicapa mediante programas de computadora .....	211
14.1	BISAR 3.0 .....	212
14.2	ELSYM 5.....	213
14.3	WESLEA.....	214
14.4	DAMA.....	216

14.5	KENLAYER .....	216
14.6	WINJULEA .....	217
14.7	Otros programas .....	219
14.8	Limitaciones de los programas elásticos multicapas .....	219
15	Consideraciones adicionales para el análisis no lineal en pavimentos flexibles 221	
16	Consideraciones para controlar las respuestas mecánicas en pavimentos flexibles .....	229
17	Análisis de sensibilidad en estructuras de pavimentos flexibles .....	232
17.1	Análisis de sensibilidad 1 .....	232
17.2	Análisis de sensibilidad 2 .....	258
18	Discusión de las respuestas teóricas con las respuestas hechas en pistas de ensaye (CEDEX, MnROAD, LCPC).....	283
19	Conclusiones .....	287
	Bibliografía .....	289
	Anexos .....	303

# Índice de figuras

---

Figura 1.1 Estructuras de pavimentos flexibles en caminos y carreteras. ....	3
Figura 1.2 Banco de materiales pétreos para su explotación y construcción de carreteras. ....	4
Figura 1.3 Mezclas asfálticas para la construcción de carpetas utilizadas en pavimentos flexibles. ....	4
Figura 1.4 Parámetros elásticos para el esfuerzo uniaxial. ....	6
Figura 1.5 Concepto de Módulo Elástico de los materiales. ....	6
Figura 1.6 Notación para los esfuerzos normales y cortantes en sistema de coordenadas rectangulares. ....	7
Figura 1.7 Comportamiento elasto-plástico de los materiales. ....	12
Figura 1.8 Tasa de deformación por cortante $dy/dt$ . ....	13
Figura 1.9 Determinación de la viscosidad. ....	13
Figura 2.1 Presión de contacto y presión de inflado de los neumáticos. ....	15
Figura 2.2 Áreas circulares consideradas en las presiones de contacto con el pavimento. ....	16
Figura 3.1 Respuestas críticas en un pavimento flexible convencional. ....	23
Figura 3.2 Respuestas críticas en Pavimento Tipo full depth. ....	23
Figura 3.3 Respuestas críticas en un pavimento semirígido. ....	24
Figura 3.4 Detalle de espesores de pavimento de un pozo a cielo abierto. ....	25
Figura 4.1 Superposición de esfuerzos para cargas múltiples. ....	28
Figura 4.2 Superposición de esfuerzos para cargas múltiples (continuación). ....	28
Figura 4.3 Principio de superposición para la mitad de un eje tándem. ....	30
Figura 4.4 Principio de superposición para la mitad de un eje tándem. (continuación). ....	31
Figura 4.5 Principio de superposición para la mitad de un eje tridem. ....	32
Figura 4.6 Principio de superposición para la mitad de un eje tridem. (continuación). ....	32
Figura 4.7 Principio de superposición para la mitad de un eje tridem. (continuación). ....	33
Figura 5.1 La compactación es un factor importante en la caracterización mecánica de los materiales granulares. ....	36
Figura 5.2 Resiliencia de materiales granulares y suelos. ....	37
Figura 5.3 Equipo triaxial cíclico para obtener módulos resilientes en materiales granulares. ....	38
Figura 5.4 Diagrama de esfuerzos en espécimen para Módulo Resiliente en materiales granulares y suelos. ....	38
Figura 5.5 El asfalto es un material viscoelástico y utilizado para capas asfálticas de pavimentos flexibles. ....	39
Figura 5.6 Modelos simplificados de resorte y amortiguador. ....	39
Figura 5.7 Modelo reológico de Kelvin. ....	40

Figura 5.8.- Modelo reológico de Maxwell. ....	40
Figura 5.9 Elemento finito aplicado en análisis de pavimentos flexibles. ....	41
Figura 6.1 Metodología Empírico-Mecanicista.....	43
Figura 6.2 Métodos empírico mecanicistas para diseño de pavimentos flexibles. .45	
Figura 7.1 Deformaciones críticas asociadas a modos de falla para diseño de pavimentos flexibles. ....	47
Figura 8.1 Distribución de esfuerzos para cargas puntuales según Boussinesq....	49
Figura 8.2 Distribución de esfuerzos para cargas uniformemente distribuidas según Boussinesq.....	51
Figura 8.3 Distribución de esfuerzos verticales y radiales para el ejemplo 1. ....	55
Figura 8.4 Distribución de deformaciones verticales y radiales para el ejemplo 1. 56	
Figura 8.5 Problemática de un pavimento a nivel cimentación a mediados del siglo XX.....	56
Figura 8.6 Curva de Fadum para distribución de esfuerzos en áreas rectangulares. ....	57
Figura 8.7 Curvas de influencia de Newmark. ....	58
Figura 8.8 Polígono teórico de la solución de Damy-Casales.....	59
Figura 8.9 Polígono teórico de la solución de Damy-Casales (Continuación).....	59
Figura 8.10 Comparativa entre método de Boussinesq y método de Damy-Casales (continuación). ....	60
Figura 8.11 Respuesta de un pavimento monocapa (Huang, 1993).....	61
Figura 8.12 Esfuerzos normales según Foster y Ahlvin (1954). ....	62
Figura 8.13 Esfuerzos radiales según Foster y Ahlvin (1954).....	63
Figura 8.14 Esfuerzos cortantes según Foster y Ahlvin (1954).....	64
Figura 8.15 Factores de deflexión según Foster y Ahlvin (1954). ....	65
Figura 8.16 Respuesta de un pavimento monocapa (Ahlvin-Ullery 1962). ....	68
Figura 8.17 Deformación unitaria vs relación de Poisson mediante las funciones de Ahlvin y Ullery (1962). ....	75
Figura 8.18 Deformación unitaria vs módulo elástico mediante las funciones de Ahlvin y Ullery (1962). ....	76
Figura 8.19 Deformación unitaria vs presión de inflado mediante las funciones de Ahlvin y Ullery (1962). ....	77
Figura 9.1 Esquema bicapa para las soluciones numéricas de Burmister. ....	81
Figura 9.2 Distribución de esfuerzos para un sistema de dos capas según Burmister (1943). ....	82
Figura 9.3 Factores de deflexión para un sistema de dos capas según Burmister (1943).....	83
Figura 9.4 Distribución de esfuerzos normales con distintas presiones de inflado y pesos de ejes.....	84
Figura 9.5 Modelo bicapa de Fox (1948). ....	86
Figura 9.6 Distribución de esfuerzos normales para distintas condiciones de a/h (Fox, 1948).....	89
Figura 9.7 Distribución de esfuerzos radiales para distintas condiciones de a/h (Fox, 1948).....	90
Figura 9.8 Esfuerzo vertical en la interface de un sistema de dos capas (Fox, 1948).....	93

Figura 9.9 Esfuerzos verticales a lo largo de la interface para $h/a = 1$ (Fox, 1948).	94
Figura 9.10 Modelo bicapa de Hank y Scrivner (1949).	96
Figura 9.11 Gráficas para determinar esfuerzos normales (Hank-Scrivner, 1948).	97
Figura 9.12 Gráficas para determinar esfuerzos radiales (Hank-Scrivner, 1948).	98
Figura 9.13 Modelo de deflexión propuesto por Huang (1969).	100
Figura 9.14 Factores de deflexión para $E1/E2=1.0$ según Huang (1969).	102
Figura 9.15 Factores de deflexión para $E1/E2=2.5$ según Huang (1969).	103
Figura 9.16 Factores de deflexión para $E1/E2=5$ según Huang (1969).	104
Figura 9.17 Factores de deflexión para $E1/E2=10$ según Huang (1969).	105
Figura 9.18 Factores de deflexión para $E1/E2=25$ según Huang (1969).	106
Figura 9.19 Factores de deflexión para $E1/E2=50$ según Huang (1969).	107
Figura 9.20 Factores de deflexión para $E1/E2=100$ según Huang (1969).	108
Figura 9.21 Factores de deflexión para $r/a=0.5$ .	109
Figura 9.22 Factores de deflexión para $r/a=1$ .	110
Figura 9.23 Factores de deflexión para $r/a=2$ .	111
Figura 9.24 Factores de deflexión para $r/a=4$ .	112
Figura 9.25 Factores de deflexión para $r/a=10$ .	113
Figura 9.26 Esfuerzo vertical en la interfaz de un sistema de dos capas (Huang, 1969).	115
Figura 9.27 Modelo bicapa considerado por Swift (1972) para el cálculo de deflexiones con cargas puntuales.	122
Figura 9.28 Análisis dimensional para obtención de esfuerzos normales en un sistema de dos capas según Raad y Marhamo (1991).	127
Figura 9.29 Análisis dimensional para obtención de deflexiones en un sistema de dos capas según Raad y Marhamo (1991).	128
Figura 9.30 Análisis dimensional para obtención de deformaciones radiales en un sistema de dos capas según Raad y Marhamo (1991).	129
Figura 10.1 Modelo tricapa considerado por Acum y Fox (1951).	134
Figura 10.2 Solución del sistema tricapa propuesto por Jones (1962).	139
Figura 10.3 Transformación de un sistema bicapa tipo full depth a un sistema tricapa.	141
Figura 10.4 Nomograma de Peattie (1962) para obtener los factores de esfuerzo.	154
Figura 10.5 Sistema tricapa de Kirk (1966).	155
Figura 10.6 Modelo tricapa propuesto por Iwanow.	156
Figura 10.7 Nomograma de Iwanow para el cálculo de esfuerzos normales.	158
Figura 10.8 Nomograma de Iwanow (1974) para el cálculo de esfuerzos radiales. Nikolaides (2015).	159
Figura 10.9 Nomograma de Iwanow (1974) para el cálculo de la deflexión total. Nikolaides (2015).	160
Figura 11.1 Sistema Elástico Multicapa clásico.	161
Figura 11.2 Sistemas de pavimentos de 4 capas propuestos por Mehta y Veletsos (1959) para análisis de respuesta.	162
Figura 11.3 Sistemas de pavimentos de 4 y 5 capas propuestos por Mehta y Veletsos (1959) para análisis de respuesta.	163

Figura 11.4 Sistema elástico multicapa propuesto por Vesic.....	164
Figura 11.5 Factores de deflexión propuestos por Vesic.....	165
Figura 12.1 Principio de la teoría de equivalencia.....	167
Figura 12.2 Determinación de la expresión cúbica de igual rigidez a la flexión. .	168
Figura 12.3 Método de módulo elasticidad equivalente propuesto por Palmer y Barber (1940) para sistemas multicapa. ....	169
Figura 12.4 Método de espesores equivalentes de Odemark (1949) para sistemas multicapa. ....	171
Figura 12.5 Comparativa entre Odemark y Burmister (multicapa). ....	172
Figura 12.6 Puntos de análisis para un sistema de dos capas (Odemark).....	174
Figura 12.7 Puntos de análisis para un sistema de tres capas (Odemark). ....	175
Figura 12.8 Puntos de análisis para un sistema de cuatro capas (Odemark). ....	176
Figura 12.9 Puntos de análisis para un sistema de cinco capas (Odemark). ....	177
Figura 12.10 Curvas para calcular factores de deflexión mediante el método de Odemark.....	179
Figura 12.11 Deflectometría en pavimentos flexibles (Van Gurp, 1995). ....	181
Figura 12.12 Modelo de Van Gurp aplicado a las capas asfálticas de un pavimento flexible.....	182
Figura 12.13 Modelo de equivalencia térmico de Van Gurp (1995). ....	182
Figura 12.14 Transformación de espesor equivalente con subcapas para la capa asfáltica.....	183
Figura 12.15 Método de módulos equivalentes de Thenn de Barros (1966) para sistemas tricapa. ....	184
Figura 12.16 Método de módulos equivalentes de Thenn de Barros (1966) adaptado por Nataatmadja <i>et al.</i> ....	185
Figura 12.17 Factores de deflexión para un sistema de dos capas según Thenn de Barros (1966).....	186
Figura 14.1 Programas de análisis estructural multicapa. ....	211
Figura 14.2 Carátula y pantallas de apoyo del programa BISAR 3.0. ....	213
Figura 14.3 Carátula y pantallas de apoyo del programa ELSYM 5. ....	213
Figura 14.4 Carátula y pantallas de apoyo del programa WESLEA. ....	214
Figura 14.5 Resultado del campo de esfuerzos, deformaciones y deflexiones con WESLEA.....	215
Figura 14.6 Carátula y pantallas de apoyo del programa DAMA.....	216
Figura 14.7 Carátula y pantallas de apoyo del programa KENPAVE. ....	217
Figura 14.8 Carátula y pantallas de apoyo del programa WinJULEA.....	217
Figura 14.9 Modelo tridimensional aplicado al programa WinJULEA.....	218
Figura 16.1 Control de deformaciones críticas en pavimentos flexibles.....	230
Figura 17.1 Estructura de pavimento flexible para análisis de sensibilidad. Variación del espesor de capa 1 (carpeta asfáltica). ....	233
Figura 17.2 Análisis de sensibilidad por fatiga para sistema tricapa variando espesor de la carpeta asfáltica.....	234
Figura 17.3 Análisis de sensibilidad por deformación permanente para sistema tricapa variando espesor de la carpeta asfáltica. ....	235
Figura 17.4 Estructura de pavimento flexible para análisis de sensibilidad. Variación del espesor de capa 2 (base hidráulica). ....	236

---

Figura 17.5 Análisis de sensibilidad por fatiga para sistema tricapa variando espesor de la base hidráulica. ....	237
Figura 17.6 Análisis de sensibilidad por deformación permanente para sistema tricapa variando espesor de la base hidráulica. ....	238
Figura 17.7 Estructura de pavimento flexible para análisis de sensibilidad. Variación del módulo elástico de la capa 1 (carpeta asfáltica). ....	239
Figura 17.8 Análisis de sensibilidad por fatiga para sistema tricapa variando módulo elástico de la carpeta asfáltica. ....	240
Figura 17.9 Análisis de sensibilidad por deformación permanente para sistema tricapa variando módulo elástico de la carpeta asfáltica. ....	241
Figura 17.10 Estructura de pavimento flexible para análisis de sensibilidad. Variación del módulo elástico de la capa 2 (base hidráulica). ....	242
Figura 17.11 Análisis de sensibilidad por fatiga para sistema tricapa variando módulo elástico de la base hidráulica. ....	243
Figura 17.12 Análisis de sensibilidad por deformación permanente para sistema tricapa variando módulo elástico de la base hidráulica. ....	244
Figura 17.13 Estructura de pavimento flexible para análisis de sensibilidad. Variación del módulo elástico de la capa 3 (subrasante). ....	245
Figura 17.14 Análisis de sensibilidad por fatiga para sistema tricapa variando módulo elástico de la subrasante. ....	246
Figura 17.15 Análisis de sensibilidad por deformación permanente para sistema tricapa variando módulo elástico de la subrasante. ....	247
Figura 17.16 Estructura de pavimento flexible para análisis de sensibilidad. Variación de la relación de Poisson de la capa 1 (carpeta asfáltica). ....	248
Figura 17.17 Análisis de sensibilidad por fatiga para sistema tricapa variando la relación de Poisson de la carpeta asfáltica. ....	249
Figura 17.18 Análisis de sensibilidad por deformación permanente para sistema tricapa variando relación de Poisson de la carpeta asfáltica. ....	250
Figura 17.19 Estructura de pavimento flexible para análisis de sensibilidad. Variación de la relación de Poisson de la capa 2 (base hidráulica). ....	251
Figura 17.20 Análisis de sensibilidad por fatiga para sistema tricapa variando la relación de Poisson de la base hidráulica. ....	252
Figura 17.21 Análisis de sensibilidad por deformación permanente para sistema tricapa variando relación de Poisson de la base hidráulica. ....	253
Figura 17.22 Estructura de pavimento flexible para análisis de sensibilidad. Variación de la relación de Poisson de la capa 3 (subrasante). ....	254
Figura 17.23 Análisis de sensibilidad por fatiga para sistema tricapa variando la relación de Poisson de la subrasante. ....	255
Figura 17.24 Análisis de sensibilidad por deformación permanente para sistema tricapa variando relación de Poisson de la subrasante. ....	256
Figura 17.25 Análisis de sensibilidad por fatiga para sistema tricapa variando distintas presiones de inflado y espesores de carpeta asfáltica. ....	257
Figura 17.26 Análisis de sensibilidad por deformación permanente para sistema tricapa variando distintas presiones de inflado y espesores de carpeta asfáltica. ....	258
Figura 17.27 Estructura tricapa para análisis de sensibilidad 2. ....	259
Figura 17.28 Geometría eje semi-trídem para análisis de sensibilidad 2. ....	259

---

Figura 18.1 Simulador HVS en el Instituto Mexicano del Transporte (IMT). ..... 284  
Figura 18.2 Simulador HVS en el Instituto Mexicano del Transporte (IMT)  
(continuación). ..... 284

# Índice de tablas

---

Tabla 1.1 Módulos elásticos (E) típicos en materiales para pavimentación.	10
Tabla 1.2 Relaciones de Poisson ( $\nu$ ) típicas en materiales para pavimentación.	11
Tabla 3.1 Coeficientes para los distintos modelos constitutivos	19
Tabla 3.2 Respuestas en el pavimento flexible y uso específico en cada capa.	21
Tabla 8.1 Obtención del campo de esfuerzos y deformaciones verticales y radiales.	55
Tabla 8.2 Comparativa entre método de Boussinesq y método de Damy-Casales.	59
Tabla 9.1 Valores de esfuerzos para capas adheridas según Fox (1948).	87
Tabla 9.2 Valores de esfuerzos para capas no adheridas según Fox (1948).	88
Tabla 9.3 Comparación de resultados Fox vs Burmister (WESLEA).	91
Tabla 10.1 Factores de esfuerzo recomendados por Acum y Fox (1951). Para $H = 2.0$ y $a_1 = 1$ .	135
Tabla 10.2.- Factores de esfuerzo recomendados por Acum y Fox (1951). Para $H = 1.0$ y $a_1 = 1$ .	135
Tabla 10.3 Factores de esfuerzo recomendados por Acum y Fox (1951). Para $H = 0.5$ y $a_1 = 1$ .	136
Tabla 10.4 Factores de esfuerzo recomendados por Acum y Fox (1951). Para $H = 0.25$ y $a_1 = 1$ .	136
Tabla 10.5 Factores de esfuerzo recomendados por Acum y Fox (1951). Para $H = 2.0$ y $a_1 = 0.5$ .	137
Tabla 10.6 Factores de esfuerzo recomendados por Acum y Fox (1951). Para $H = 1.0$ y $a_1 = 0.5$ .	137
Tabla 10.7 Factores de esfuerzo recomendados por Acum y Fox (1951). Para $H = 0.5$ y $a_1 = 0.5$ .	138
Tabla 10.8 Factores de esfuerzo recomendados por Acum y Fox (1951). Para $H = 0.25$ y $a_1 = 0.5$ .	138
Tabla 10.9 Estructura de pavimento tricapa variando el módulo elástico de la capa 1 (análisis 1).	148
Tabla 10.10 Factores de esfuerzo y cálculo de esfuerzos normales y radiales con Jones (1962) (Análisis 1).	148
Tabla 10.11 Comparativa resultados con Jones (1962) con Burmister (1943) (Análisis 1).	149
Tabla 10.12 Estructura de pavimento tricapa variando el espesor de la capa 1 (Análisis 2).	150
Tabla 10.13 Factores de esfuerzo y cálculo de esfuerzos normales y radiales con Jones (1962) (Análisis 2).	151
Tabla 10.14 Comparativa resultados con Jones (1962) con Burmister (1943) (Análisis 2).	153
Tabla 15.1 Estructura considerada en el análisis no lineal de pavimentos.	222

Tabla 15.2 Datos complementarios para análisis no lineal en pavimentos (continuación).	222
Tabla 15.3 Resultados análisis no lineal de manera iterativa.	224
Tabla 17.1 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la carpeta asfáltica de 500,000 psi.	260
Tabla 17.2 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la carpeta asfáltica de 400,000 psi.	260
Tabla 17.3 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la carpeta asfáltica de 300,000 psi.	260
Tabla 17.4 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la base hidráulica de 5,000 psi.	263
Tabla 17.5 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la base hidráulica de 10,000 psi.	263
Tabla 17.6 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la base hidráulica de 20,000 psi.	263
Tabla 17.7 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la base hidráulica de 30,000 psi.	265
Tabla 17.8 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la base hidráulica de 50,000 psi.	265
Tabla 17.9 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la base hidráulica de 70,000 psi.	266
Tabla 17.10 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la base hidráulica de 100,000 psi.	266
Tabla 17.11 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la subrasante de 500 psi.	269
Tabla 17.12 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la subrasante de 1,000 psi.	269
Tabla 17.13 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la subrasante de 3,000 psi.	270
Tabla 17.14 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la subrasante de 5,000 psi.	270

---

Tabla 17.15 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la subrasante de 7,000 psi.	271
Tabla 17.16 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la subrasante de 10,000 psi.	271
Tabla 17.17 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la carpeta asfáltica de 2 in.	275
Tabla 17.18 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la carpeta asfáltica de 3 in.	275
Tabla 17.19 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la carpeta asfáltica de 4 in.	276
Tabla 17.20 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la carpeta asfáltica de 5 in.	276
Tabla 17.21 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la carpeta asfáltica de 6 in.	277
Tabla 17.22 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la base hidráulica de 8 in.	279
Tabla 17.23 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la base hidráulica de 10 in.	280
Tabla 17.24 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la base hidráulica de 12 in.	280
Tabla 17.25 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la base hidráulica de 15 in.	281
Tabla 17.26 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la base hidráulica de 20 in.	281
Tabla 0.1 Función "A" del método de Ahlvin y Ullery (1962).	315
Tabla 0.2 Función "B" del método de Ahlvin y Ullery (1962).	317
Tabla 0.3 Función "C" del método de Ahlvin y Ullery (1962).	318
Tabla 0.4 Función "D" del método de Ahlvin y Ullery (1962).	318
Tabla 0.5 Función "E" del método de Ahlvin y Ullery (1962).	319
Tabla 0.6 Función "F" del método de Ahlvin y Ullery (1962).	320
Tabla 0.7 Función "G" del método de Ahlvin y Ullery (1962).	323
Tabla 0.8 Función "H" del método de Ahlvin y Ullery (1962).	324
Tabla 0.9 Factores de esfuerzo de Jones (1962).	325
Tabla 0.10 Factores de esfuerzo de Jones (1962) (Continuación).	327
Tabla 0.11 Factores de esfuerzo de Jones (1962) (Continuación).	328

---

Tabla 0.12 Factores de esfuerzo para determinar esfuerzos radiales en la parte superior e inferior de la primera capa de un pavimento tricapa, Kirk 1966.	345
Tabla 0.13 Factores de esfuerzo para determinar esfuerzos radiales en la parte superior e inferior de la primera capa de un pavimento tricapa, Kirk 1966. Continuación.	348
Tabla 0.14 Factores de esfuerzo para determinar esfuerzos radiales en la parte superior e inferior de la primera capa de un pavimento tricapa, Kirk 1966. Continuación.	351
Tabla 0.15 Factores de esfuerzo para determinar esfuerzos radiales en la parte superior e inferior de la primera capa de un pavimento tricapa, Kirk 1966. Continuación.	354

# Índice de ejemplos

---

Ejemplo 1.- Boussinesq .....	53
Ejemplo 2.- Foster y Ahlvin.....	66
Ejemplo 3.- Ahlvin y Ulery.....	78
Ejemplo 4.- Burmister .....	85
Ejemplo 5.- Fox .....	92
Ejemplo 6.- Fox (2) .....	95
Ejemplo 7.- Hank-Scrivner.....	99
Ejemplo 8.- Huang .....	114
Ejemplo 9.- Principio de Superposición para eje tándem. ....	115
Ejemplo 10.- Principio de Superposición para eje dual. ....	118
Ejemplo 11. Swift .....	124
Ejemplo 12.- Raad y Marhamo .....	130
Ejemplo 13.- Jones (Esfuerzos normales y radiales) .....	143
Ejemplo 14.- Jones (Máxima deformación a tensión y a compresión) .....	145
Ejemplo 15.- Vesic .....	166
Ejemplo 16.- Thenn de Barros .....	188



# Sinopsis

---

Se presentan las teorías existentes para calcular los esfuerzos, deformaciones y deflexiones en pavimentos flexibles mediante la resolución didáctica de ejercicios sencillos de aplicación en distintas estructuras de pavimento flexible. Complementariamente se proponen ejercicios para la resolución del usuario del documento. Se expone la metodología general empírico-mecanicista para el diseño de pavimentos flexibles, y se diferencia entre análisis de tipo lineal, análisis no lineal, análisis viscoelástico y análisis mediante elemento finito. Se define la importancia de la respuesta estructural de un pavimento flexible, mediante los postulados de la teoría de la elasticidad y de la mecánica del medio continuo, para así entender la teoría elástica multicapa. Se discute el principio de superposición de causas y efectos aplicado al análisis estructural de pavimentos flexibles. Se exponen los métodos de cálculo numérico más importantes para estructuras de pavimentos y su relevancia en los análisis actuales de pavimentos.

Palabras clave: Teorías, Esfuerzos, Deformaciones, Elasticidad, Pavimentos



# Abstract

---

The existing theories are presented to calculate the stresses, deformations and deflections in flexible pavements through the didactic resolution of simple exercises to be applied in different flexible pavement structures. Complementarily, exercises are proposed for the resolution of the document user. The general empirical-mechanical methodology for the design of flexible pavements is presented, and a distinction is made between linear, non-linear, viscoelastic and finite element analysis. The importance of the structural response of a flexible pavement is defined by the postulates of the theory of elasticity and the mechanics of the continuous medium, in order to understand the multi-layer elastic theory. The principle of cause and effect overlap applied to the structural analysis of flexible pavements is discussed. The most important numerical calculation methods for pavement structures and their relevance to current pavement analyses are presented.

Keywords: Theories, Stresses, Deformations, Elasticity, Pavements.



## Resumen ejecutivo

---

Las metodologías actuales de diseño de pavimentos flexibles tienen una tendencia empírico-mecanicista en varias partes del mundo. En ellas se correlacionan los aspectos teóricos de la mecánica de materiales, la mecánica del medio continuo y la mecánica de pavimentos, con ensayos o verificaciones de campo que definen el desempeño funcional y estructural del pavimento traducido este en su vida útil o vida remanente. Este desempeño trae consigo la implementación de sistemas de gestión o administración de pavimentos que justifican la erogación de recursos económicos por parte del gobierno federal para el mantenimiento y rehabilitación de los corredores carreteros en nuestro país. De allí la enorme importancia de no descuidar ninguno de los elementos o insumos de diseño.

Una parte importante en esta metodología de diseño es la concerniente a la respuesta que sufre el pavimento ante la acción reiterada y repetida de los vehículos, traducidas en repeticiones de carga por eje o por ejes. La respuesta del pavimento se define como los esfuerzos, deformaciones y deflexiones generados en cada una de las capas que conforman el pavimento por los pesos de esos vehículos. Desde el punto de vista del diseño, interesan dos tipos de respuesta del pavimento: la deformación a tensión debajo de la fibra inferior de la o las capas estabilizadas la cual está asociada al agrietamiento conocido como “piel de cocodrilo”; y la deformación a compresión arriba de la capa subrasante la cual está asociada a la deformación permanente o rodadura plástica en la superficie del pavimento. Desde el punto de vista de auscultación o revisión estructural del pavimento, interesa la deflexión, ya que está nos indicará la capacidad y calidad de la estructura.

Como se observa estas respuestas del pavimento juegan un papel fundamental y trascendental en el diseño de pavimentos. Sin embargo, las soluciones a estos problemas mediante programas elásticos multicapa no hubieran sido posible sin un cimiento de investigación y desarrollo que se gestó por muchos años por varios investigadores y agencias de transporte del mundo que con sus aportaciones hicieron posible conocer o inferir la respuesta del pavimento. Por este motivo se presenta en esta publicación todos los desarrollos hechos en varios años por Boussinesq, Burmister, Jones, Ulery, Peattie, Hogg, Odemark, Huang, entre muchos otros, soluciones que en su momento fueron muy vigentes y que a nuestros días siguen teniendo una gran vigencia por lo que vale la pena seguir explotando y desarrollando estas soluciones y estudios. Lo contemplado en este documento está dirigido hacia los niveles de licenciatura y de posgrado en los programas de Ingeniería Civil.



# Introducción

---

## Objetivo general

Conocer y entender cada una de las teorías para calcular los esfuerzos, deformaciones y deflexiones en pavimentos flexibles mediante resolución didáctica de ejercicios sencillos de aplicación en distintas estructuras de pavimento flexible. Complementariamente se propondrán ejercicios para la resolución del usuario del documento.

## Objetivos particulares.

- Definir lo que es la metodología general empírico-mecanicista para el diseño de pavimentos flexibles.
- Diferenciar entre análisis de tipo lineal, análisis no lineal, análisis viscoelástico y análisis mediante elemento finito.
- Definir la importancia de la respuesta estructural de un pavimento flexible.
- Mediante los postulados de la teoría de la elasticidad y de la mecánica del medio continuo entender la teoría elástica multicapa.
- Entender el principio de superposición de causas y efectos aplicado al análisis estructural de pavimentos flexibles.
- Exponer los métodos de cálculo numérico más importantes para estructuras de pavimentos y su relevancia en los análisis actuales de pavimentos (Teoría elástica multicapa y trabajos derivados de la misma).
- Definir los métodos de simplificación o de estructuras equivalentes que se usan en trabajos de auscultación estructural (retrocálculo) y sus diversas variantes de análisis.
- Exponer y conocer los distintos paquetes de cómputo que existen para analizar estructuras de pavimento (programas de tipo lineal)

Nota de los autores: La mayoría de los gráficos aquí presentados fueron reproducidos con el software elástico multicapa WinJULEA del Dr. Jacob Uzan (Universidad Técnica de Israel) y WESLEA del Dr. David Timm (Universidad de Auburn, Alabama EUA). Se llevaron a cabo cientos de corridas con estos paquetes de cómputo, respetando lo expresado originalmente por los autores de cada uno de los métodos presentados en este documento técnico (ver bibliografía

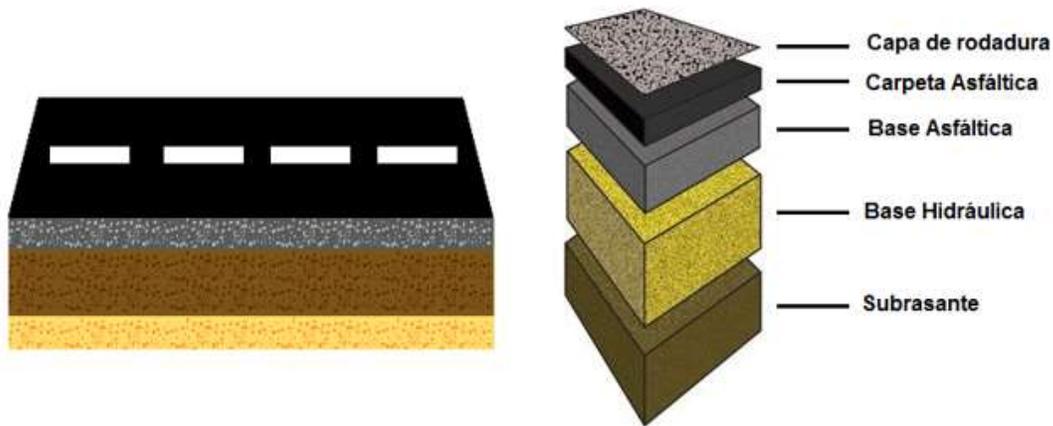
para más detalle). Se ha buscado darle mayor calidad gráfica a cada uno de los gráficos presentados.

Este documento forma parte del Curso de Actualización Post-profesional que se da de manera anual en el Instituto Mexicano del Transporte denominado “*Análisis y diseño mecanicista de pavimentos en carreteras mexicanas*”. Este curso, está orientado hacia el uso del nuevo método de diseño de pavimentos flexibles llamado IMT PAVE 3.0. El programa contempla una parte resolutiva de cálculo de esfuerzos y deformaciones en pavimentos flexibles mismo que se profundiza y detalle en este documento.

# 1 Fundamentos del comportamiento mecánico de los materiales

---

Los pavimentos de carreteras y caminos son estructuras compuestas con capas de distintos materiales colocadas de manera horizontal y con funciones y características especiales. Su función primordial es la de soportar las cargas del tránsito y los efectos de los agentes atmosféricos como la temperatura y la precipitación. Esto lleva a tener estructuras multicapa como las mostradas en la Figura 1.1 las cuales trabajan de manera conjunta para prestar un servicio seguro y cómodo para el usuario.



**Figura 1.1 Estructuras de pavimentos flexibles en caminos y carreteras.**

Los objetivos de un pavimento flexible son el de prestar un nivel de servicio seguro, cómodo, expedito para los usuarios, transmitir y distribuir las cargas del tránsito, así como proteger las capas subyacentes del agua. Estos objetivos se logran en la medida en que cada una de las capas del pavimento cumpla con la función para la cual fue concebida. Por lo anterior es muy importante cumplir con la calidad de los materiales a emplearse en cada capa y cumplir con los procedimientos de construcción especificados para ellas.

Los materiales juegan un papel fundamental en la ingeniería de pavimentos. La mayoría de los materiales que se utilizan para la construcción de carreteras se pueden clasificar en tres grandes grupos:

- Materiales granulares o no tratados (gravas o rocas trituradas) Ver Figura 1.2.
- Materiales asfálticos (carpetas asfálticas, bases negras en frío o en caliente, etc.) Ver Figura 1.3.
- Materiales cementados (concreto Portland o bases tratadas con cemento).



**Figura 1.2 Banco de materiales pétreos para su explotación y construcción de carreteras.**



**Figura 1.3 Mezclas asfálticas para la construcción de carpetas utilizadas en pavimentos flexibles.**

Es necesario comprender el comportamiento mecánico de los materiales antes de utilizarlos en proyectos de pavimentación de carreteras. Existen tres propiedades fundamentales que deben entenderse y analizarse:

- Elasticidad
- Plasticidad
- Viscosidad

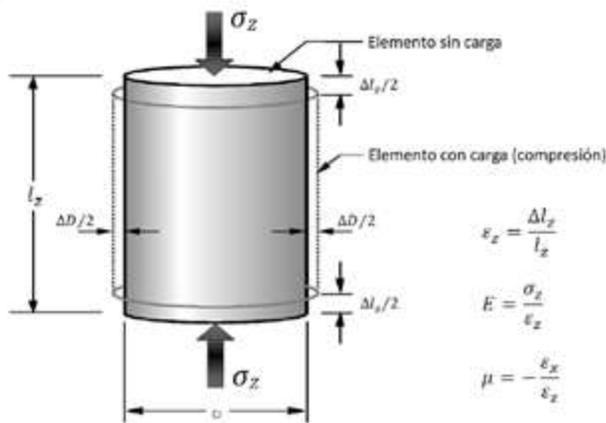
Estos tres comportamientos a menudo se combinan para poder modelar el comportamiento de los materiales que constituyen un pavimento, de una manera más precisa y racional. Algunos de estas combinaciones mecánicas son:

- Comportamiento elástico del material (cemento/concreto)
- Comportamiento elasto-plástico del material (materiales granulares)
- Comportamiento viscoelástico del material (materiales asfálticos)
- Comportamiento visco-elasto-plástico del material (asfalto)

## 1.1 Elasticidad

### 1.1.1 Principios de la Teoría de la elasticidad: Ley de Hooke

Si un elemento cilindro es sometido a una presión uniforme en la dirección  $z$  (vertical),  $\sigma_z$ , como se muestra en la Figura 1.4, se generará un cambio de longitud en todas direcciones. Cuando las deformaciones son muy pequeñas comparadas con las dimensiones del cilindro, las deformaciones unitarias serán iguales al cambio relativo de la longitud.



### Figura 1.4 Parámetros elásticos para el esfuerzo uniaxial.

Si el material es elásticamente lineal, entonces la relación entre el esfuerzo vertical  $\sigma_z$  y la deformación vertical,  $\varepsilon_z$ , será constante, definiendo así el coeficiente de elasticidad o módulo de Young ( $E$ ). Ver Figura 1.5. A esta relación se le conoce como ley de Hooke, y para el caso unidimensional se expresa con la ecuación (1).

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad (1)$$

Donde:

$E$  = Módulo de elasticidad

$\sigma_z$  = Esfuerzo vertical

$\varepsilon_z$  = Deformación vertical

Si la carga continúa más allá del límite elástico, algunos materiales experimentan una reducción de la rigidez hasta el límite de rendimiento. El esfuerzo máximo que un material puede resistir también se conoce como un límite elástico. Esta es una medida de la fuerza del material. Ver Figura 1.5.

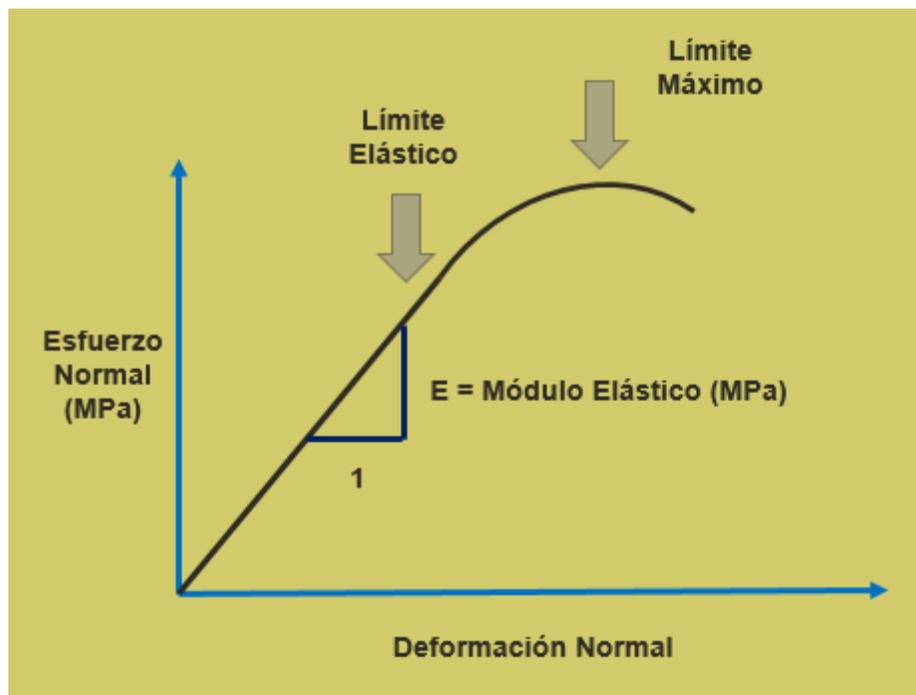


Figura 1.5 Concepto de Módulo Elástico de los materiales.

Fuente: Elaboración propia.

Adicionalmente, el material se denomina isótropo si los parámetros que lo definen son los mismos en todas las direcciones. La isotropía reduce el número de parámetros elásticos en un punto a dos: el módulo de elasticidad  $E$ , y el

coeficiente de Poisson  $\nu$ . Si además los parámetros elásticos son los mismos en todos los puntos dentro de una región de un material, esta región se dice que es homogénea.

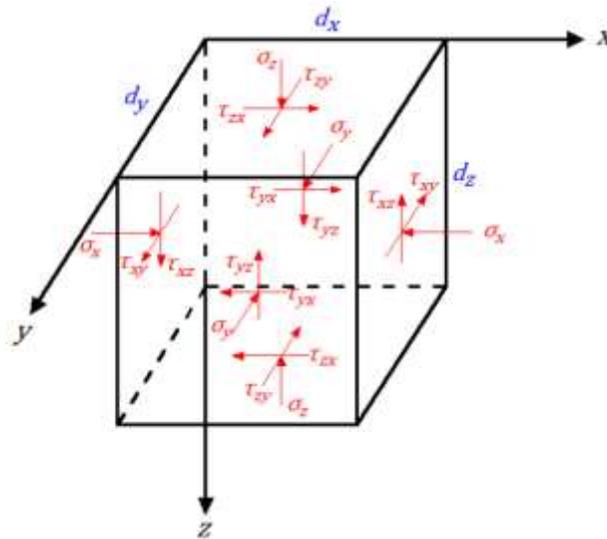
Así entonces, las deformaciones axiales para una material ideal, homogéneo, elástico e isotrópico, generadas por una carga aplicada a un elemento tridimensional del medio (Figura 1.6) en términos de las componentes de esfuerzo, son dadas por la ley de Hooke mediante las ecuaciones (2), (3) y (4).

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (3)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (4)$$

Donde,  $E$  es el módulo elástico,  $\nu$  es la relación de Poisson,  $\varepsilon_i$  e  $\sigma_i$  son las deformaciones y esfuerzos normales, respectivamente, en las direcciones  $i = x, y, z$ , respectivamente.



**Figura 1.6 Notación para los esfuerzos normales y cortantes en sistema de coordenadas rectangulares.**

Fuente: Instituto Mexicano del Transporte (IMT), 2015.

De las relaciones dadas por las ecuaciones (2), (3) y (4) las componentes de esfuerzo pueden ser expresadas como se indican en las ecuaciones (5), (6) y (7).

$$\sigma_x = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_x \quad (5)$$

$$\sigma_y = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_y \quad (6)$$

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_z$$

Las deformaciones cortantes en término de las componentes de esfuerzo pueden obtenerse mediante las siguientes ecuaciones (7), (8) y (9).

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (7)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (8)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (9)$$

Donde G es el módulo de corte mismo que se obtiene con la ecuación (10).

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (10)$$

La

Tabla

1.1

y

Tabla 1.2 muestran valores comunes de módulos de elasticidad y relaciones de Poisson respectivamente de materiales utilizados en capas de pavimentos flexibles.

**Tabla 1.1 Módulos elásticos (E) típicos en materiales para pavimentación.**

<b>Material</b>	<b>Rango (MPa)</b>	<b>Valor típico (MPa)</b>
Carpeta Asfáltica Convencional	2000-4000	3000
Carpeta Asfáltica con asfalto modificado	4000-6000	5000
Base estabilizada con cemento	750-2000	1500
Base estabilizada con asfalto	500-1500	1000
Base Hidráulica	270-350	310
Subrasante	190-260	220

Fuente: Garnica y Hernández, 2013

**Tabla 1.2 Relaciones de Poisson ( $\nu$ ) típicas en materiales para pavimentación.**

<b>Material</b>	<b>Rango</b>	<b>Valor típico</b>
Carpeta Asfáltica Convencional	0.15-0.45	0.30
Carpeta Asfáltica con asfalto modificado	0.15-0.30	0.20
Base estabilizada con cemento	0.15-0.30	0.20
Base estabilizada con asfalto	0.15-0.45	0.30
Base Hidráulica	0.30-0.40	0.35
Subrasante	0.30-0.50	0.40

Fuente: Garnica y Hernández, 2013

## 1.2 Plasticidad

El comportamiento plástico describe materiales que acumulan deformaciones no recuperables cuando se les aplica una carga. Algunas veces el comportamiento plástico sólo comienza cuando el esfuerzo aplicado alcanza una cierta magnitud.

Cuando la carga se extiende más allá del límite elástico y se extiende al comportamiento plástico (ver Figura 1.7) da como resultado la acumulación de deformación plástica no recuperable. Este comportamiento se denomina elasto-plástico y se utiliza para modelar materiales bajo repetición de carga y obtener su correspondiente Módulo Resiliente ( $M_r$ ). Con cada ciclo de carga se acumula una deformación plástica lo que resulta en deformación permanente en el material después de varios ciclos de carga repetidos.

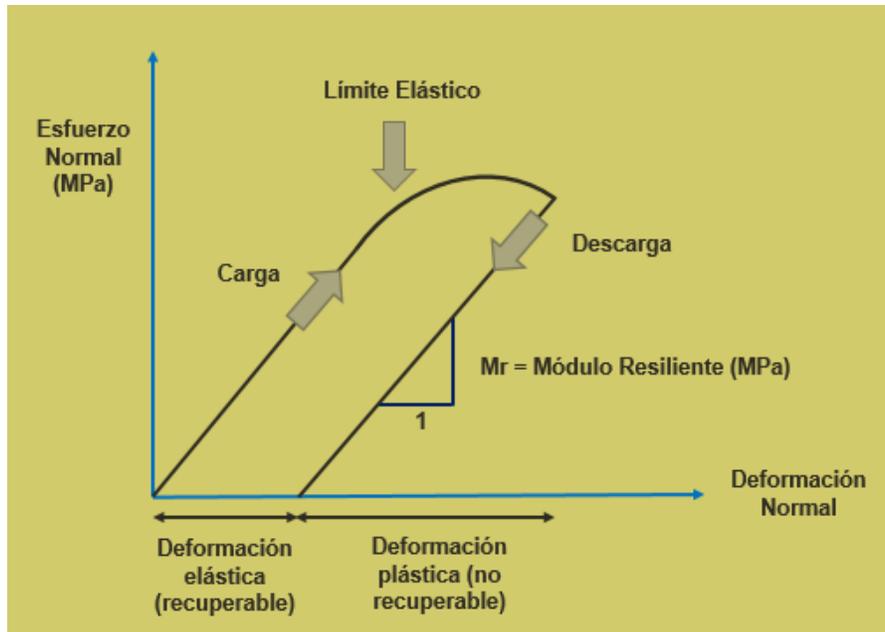


Figura 1.7 Comportamiento elasto-plástico de los materiales.

### 1.3 Viscosidad

La caracterización de los materiales asfálticos se caracteriza a través de su comportamiento viscoelástico. El asfalto es muy rígido y elástico a bajas temperaturas. A altas temperaturas se convierte en un fluido. Para estudiar el comportamiento de deformación y flujo de estos materiales se hace uso de la Reología para modelar dichos materiales.

La medición de la viscosidad dinámica requiere de la aplicación de esfuerzos cortantes midiendo la tensión y el tiempo de respuesta del material. Esta última se requiere en materiales viscosos en comparación con materiales elásticos (también se requieren consideraciones de temperatura).

Si esta prueba se repite a un esfuerzo cortante más alto, entonces la deformación será más grande (más pronunciada la línea) como se muestra en la línea punteada de la Figura 1.8. Ahora en lugar de graficar un esfuerzo cortante contra la tensión, como se hace con los materiales elásticos, el esfuerzo cortante se graficará contra la tensión cortante. La pendiente de esta relación es la viscosidad de los materiales (ver Figura 1.9).

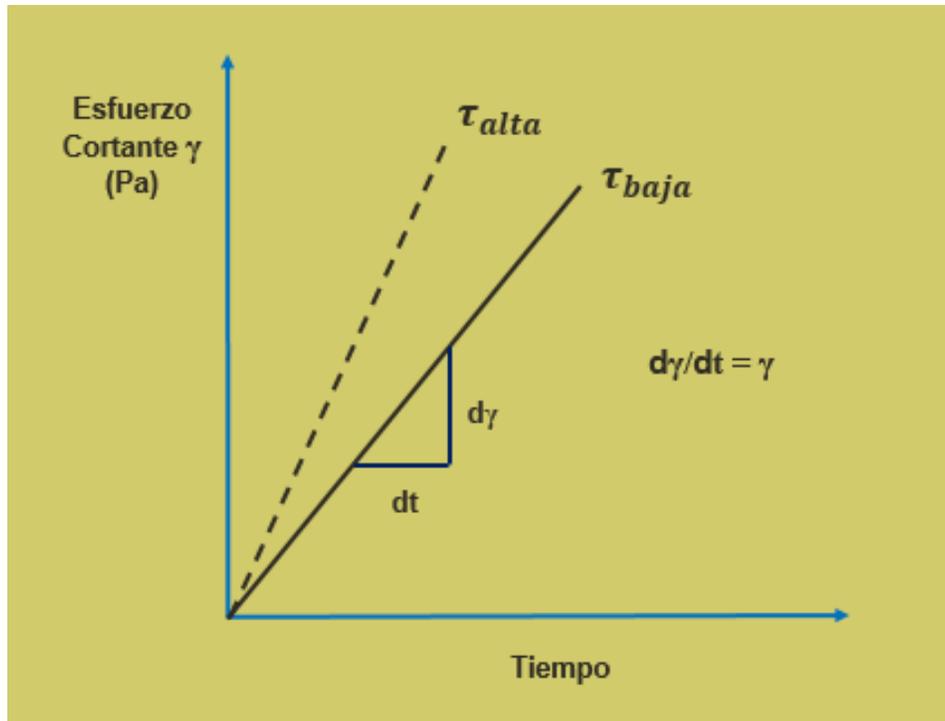


Figura 1.8 Tasa de deformación por cortante  $d\gamma/dt$ .

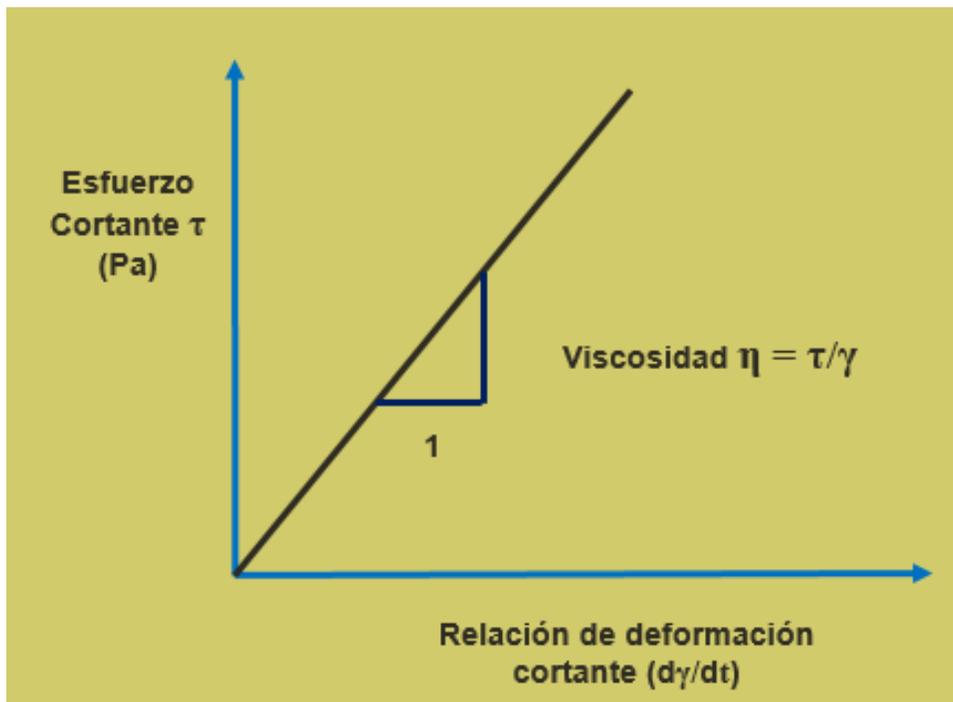


Figura 1.9 Determinación de la viscosidad.



## 2 Presión aplicada en la superficie del pavimento flexible

---

En el diseño de pavimentos, las cargas más pesadas son las que interesan debido a que son las que más deterioran el pavimento, por ello son las más utilizadas para determinar los espesores de cada una de las capas del mismo.

Para el transporte carretero los ejes neumáticos se pueden clasificar de la siguiente manera:

- Neumático simple o neumático doble.
- Ejes sencillos, ejes tándem o eje trídem.

Según la SCT (2014), los pesos máximos permitidos por eje sencillo o carga legal varían entre 6.5 a 11 toneladas. Estos últimos en eje motriz con cuatro llantas, lo que implica que para neumáticos dobles, el peso se divide en partes iguales. Para las cargas mayores a las permitidas se recomienda adicionar otro eje (Yoder & Witczak, 1975).

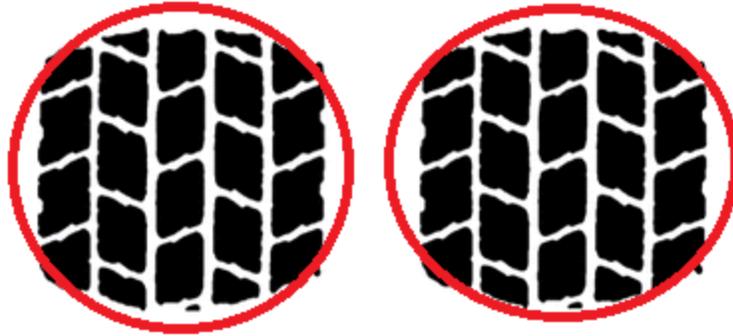
Si no se considera el efecto del neumático sobre el pavimento, entonces la presión de contacto entre el neumático y el pavimento será igual a la presión de aire en el neumático (ver Figura 2.1). Para presiones bajas, se considera que la mayor presión en el neumático se presenta al centro de éste. Es común asumir que la presión de contacto es uniforme en toda el área de huella del neumático.



**Figura 2.1 Presión de contacto y presión de inflado de los neumáticos.**

Fuente: Elaboración propia.

A pesar de que estudios de agencia de transporte alrededor del mundo han demostrado que las huellas de los neumáticos tienen formas irregulares, se sigue considerando por simplicidad utilizar un área circular en la gran mayoría de los problemas. Ver Figura 2.2.



**Figura 2.2 Áreas circulares consideradas en las presiones de contacto con el pavimento.**

Fuente: Elaboración propia.

Para calcular el radio de contacto del neumático con el pavimento se utiliza la ecuación (11).

$$a = \sqrt{\frac{P}{q \pi}} \quad (11)$$

Donde:

a = Radio de contacto

P = carga aplicada

q = Presión de contacto

A lo largo del desarrollo de este documento se tomarán siempre áreas de tipo circular para el cálculo de esfuerzos, deformaciones y deflexiones en pavimentos flexibles. No obstante y como se ha comentado anteriormente existen muchos estudios donde las áreas se toman como áreas de tipo rectangular, elípticas o con formas irregulares.

### 3 Respuestas estructurales en el pavimento flexible

---

Cuando la carga de un neumático es aplicada en la parte superior de una estructura de pavimento, esta se flexiona originando esfuerzos y deformaciones en cada una de las capas del mismo. La magnitud de los esfuerzos, deformaciones y deflexiones dependen del tipo de carga y la configuración de cada uno de los ejes de los vehículos que transitan sobre la estructura del pavimento: eje sencillo, eje dual, eje tándem y eje tridem. La ubicación y magnitud de cada una de estas respuestas determinan el tipo y grado de deterioro en la estructura del pavimento. Por lo anterior estas respuestas deben ser consideradas de manera importante en el diseño de pavimentos flexibles.

Las respuestas del pavimento deben considerarse por dos razones:

- Permiten caracterizar los materiales mediante modelos constitutivos. Esto es, permiten determinar las rigideces de cada una de las capas a partir del nivel de esfuerzo con el que vaya a trabajar.
- Permiten diseñar la estructura del pavimento por fatiga y deformación permanente tomando en cuenta la deformación a tensión debajo de la capa asfáltica y la deformación a compresión arriba de la capa subrasante.

Las respuestas necesarias para caracterizar materiales dependen del modelo constitutivo que se seleccione. Existen varios modelos constitutivos que se han utilizado para el diseño de pavimentos. A continuación se presentan algunos de ellos.

Para suelos granulares y finos- Guía de Diseño AASHTO 1993. Ver ecuación (12).

$$M_r = k_1(\sigma_d)^{k_2} \quad (12)$$

Para suelos granulares y finos- Guía de Diseño AASHTO 1993. Ver ecuación (13).

$$M_r = k_1(\theta)^{k_2} \quad (13)$$

Ecuación Universal Constitutiva. Ver ecuación (14).

$$M_r = k_1 P_a \left[ \frac{\theta}{P_a} \right]^{k_2} \left[ \frac{\sigma_d}{P_a} \right]^{k_3} \quad (14)$$

Ecuación Universal Constitutiva expandida. Ver ecuación (15), (16) y (17).

$$M_r = k_1 P_a \left[ \frac{\theta - 3k_6}{P_a} \right]^{k_2} \left[ \frac{\tau_{oct}}{P_a} + 1 \right]^{k_3} \quad (15)$$

$$\theta = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (16)$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad (17)$$

Donde:

$P_a$  = Presión atmosférica.

$\theta$  = Esfuerzo volumétrico.

$\sigma_d$  = Esfuerzo desviador.

$\sigma_1$  = Esfuerzo principal mayor.

$\sigma_2$  = Esfuerzo principal intermedio.

$\sigma_3$  = Esfuerzo principal menor/presión de confinamiento.

$\tau_{oct}$  = Esfuerzo cortante octaédrico.

$k_1, k_2, k_3, k_6,$

= Constantes de regresión de ensayos de módulo resiliente de carga repetida.

Muchos modelos constitutivos requieren constantes de los distintos materiales (materiales basálticos, riolítico, calizos, etc.). Reza y Ziaie (2015) proponen los valores de la Tabla 3.1 para los distintos modelos constitutivos.

**Tabla 3.1 Coeficientes para los distintos modelos constitutivos**

<b>Modelo</b>	<b>k<sub>1</sub></b>	<b>k<sub>2</sub></b>	<b>k<sub>3</sub></b>
K-θ	5646	0.5452	-
Universal (Uzan)	4636.43	0.7467	-0.2202
MEPDG	5070.02	0.7418	-0.2394

Fuente: Reza y Ziaie, 2015

Las respuestas necesarias para predecir el deterioro de un pavimento pueden ser separadas en dos grupos: las que se generan por la acción de las cargas vehiculares y a las que no son producidas por éstas.

Dentro de las que son producidas por la acción de las cargas vehiculares tenemos a los esfuerzos y deformaciones verticales, a los esfuerzos y deformaciones cortantes, a los esfuerzos y deformaciones tangenciales y radiales y a las deflexiones.

Dentro de las que no son producidas por la acción de las cargas vehiculares tenemos a aquellas generadas por los fenómenos de las altas y bajas temperaturas propias de los materiales utilizados en la pavimentación.

A continuación, se describen estos dos grupos.

## **3.1 Respuestas derivadas de la aplicación de carga**

### **3.1.1 Esfuerzos y deformaciones verticales**

Una carga de un neumático produce un esfuerzo vertical (compresión). Esta respuesta produce compresión en los materiales del pavimento que sí es permanente puede observarse como surcos o roderas plásticas en la superficie del pavimento. El esfuerzo vertical será mayor a compresión directamente debajo de la carga aplicada. Sin embargo, cuando se tienen cargas múltiples este esfuerzo puede estar a compresión o a tensión. Cuando el esfuerzo vertical se vuelve a tensión en materiales no consolidados y suelos, puede producirse una descompactación y el material es susceptible al desplazamiento lateral, es decir se transforma en flujo plástico.

### **3.1.2 Esfuerzos y deformaciones cortantes**

Las cargas de los neumáticos crean tensiones de corte dentro de la estructura del pavimento. La magnitud de los esfuerzos y deformaciones al corte dependen de la

configuración de la carga del neumático y de las mismas propiedades de las capas del pavimento. Los esfuerzos al corte son críticos en capas donde se tienen materiales no tratados (bases hidráulicas) y algunos procedimientos de diseño de pavimentos flexibles se han desarrollado para reducir al mínimo los esfuerzos al corte en estas capas. Los esfuerzos al corte excesivos en una base hidráulica pueden producir movimientos inestables, como los que se observan con frecuencia en los caminos de bajo volumen de tránsito donde ocasionalmente se tienen vehículos pesados. Las magnitudes de estos esfuerzos de corte son muy importantes pero no se han utilizado en la mayoría de los métodos de diseño empírico-mecanicista. Los esfuerzos al corte excesivos a lo largo del borde del neumático cerca de la superficie del pavimento pueden ser una de las razones por las que se producen grietas en la superficie del pavimento.

### **3.1.3 Esfuerzos y deformaciones tangenciales y radiales**

El pavimento y las capas individuales se deforman de manera similar que una viga a flexión. Esta flexión da como resultado esfuerzos radiales y tangenciales en la parte inferior de las capas del pavimento. Los esfuerzos radiales y tangenciales se producen en un plano horizontal y pueden ser tanto a compresión como a tensión dependiendo del número y ubicación de las cargas de los neumáticos (ejes tándem, trídem, etc.). Los esfuerzos a tensión en la parte inferior de la carpeta asfáltica pueden conducir a la aparición de daños por fatiga y grietas. En capas estabilizadas con asfalto o cemento pueden también desarrollar esfuerzos a tensión en la parte inferior de dicha capa lo cual contribuye al agrietamiento de dichas capas.

### **3.1.4 Deflexiones**

Una carga de un neumático aplicada en la superficie del pavimento hará que el pavimento se deforme verticalmente. La magnitud de esta deflexión es proporcional a la rigidez total del pavimento (espesor y módulos elásticos), la rigidez del suelo de desplante o apoyo. Cuanto mayor sea esta deflexión más susceptible es el pavimento de presentar fallas de tipo estructural.

## **3.2 Respuestas no derivadas de la aplicación de carga**

Las mezclas asfálticas en caliente se someten a cambios de volumen bajo continuos ciclos de temperatura. A medida que la temperatura disminuye la capa asfáltica intenta contraerse, pero está restringida debido a que es una capa continua. Cuando esto ocurre, los esfuerzos a tensión comienzan a desarrollarse y son proporcionales a la magnitud de la disminución de la temperatura. El esfuerzo a tensión disminuye con el tiempo debido a la relajación en el material viscoelástico. Sin embargo, la tensión causada por el cambio de volumen continuo se acumula en la parte superior de la capa asfáltica y cuando el esfuerzo a tensión

excede la resistencia (resistencia a la tensión o a la fatiga térmica) se genera una grieta. A manera de resumen, en la Tabla 3.2 se muestran las respuestas mecánicas en el pavimento en cada una de las capas del mismo y sus usos en la ingeniería de pavimentos.

**Tabla 3.2 Respuestas en el pavimento flexible y uso específico en cada capa.**

Respuesta en el pavimento		Capa aplicable	Uso de la respuesta		
			Caracterización del material	Deterioro	Otro
$\delta_{max}$	Máxima deflexión	Todo el pavimento	-----	Fatiga, deformación permanente (rodera)	-----
$\delta$	Deflexión	Todo el pavimento	Módulo Elástico	-----	Retrocálculo
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Esfuerzos principales	Base y sub-base granular	Módulo Resiliente	-----	-----
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_t, \sigma_r$	Esfuerzo Horizontal	HMA, ATB, CTB	-----	Fatiga y agrietamiento térmico	-----
$\sigma_z, \sigma_c$	Esfuerzo Vertical	HMA, ATB	-----	Deformación permanente (Rodería)	-----
$\epsilon_c$	Deformación Vertical	HMA, ATB	-----	Deformación permanente (Rodería)	-----
$\epsilon_z$	Deformación Vertical	Sub-rasante	-----	Distorsión	-----
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_t, \epsilon_r$	Deformación Horizontal	HMA, CTB, ATB	-----	Fatiga y agrietamiento térmico	-----
HMA – Mezcla Asfáltica en Caliente (Hot Mix Asphalt)					
ATB – Base estabilizada con asfalto o base negra (Asphalt Treated Base)					
CTB – Base estabilizada con cemento (Cement Treated Base)					

Fuente: Federal Highway Administration (FHWA), 2002

La localización y tipo de respuestas críticas dependen del tipo de pavimento flexible a utilizar, así como de los materiales utilizados durante su construcción. Los tipos de pavimentos flexibles empleados en la actualidad pueden agruparse en tres grupos:

- a) Pavimentos flexibles convencionales (espesor delgado de la carpeta asfáltica y espesores robustos de las capas granulares).
- b) Pavimentos tipo *full depth* (espesor robusto de carpeta asfáltica desplantado sobre la capa subrasante).
- c) Pavimentos semirígidos.

A continuación, se describen cada uno de estas estructuras:

- a) Pavimentos flexibles convencionales.
  - Deflexión en la superficie del pavimento directamente debajo de la carga aplicada y a varias distancias radiales de la misma ( $\delta$ ).
  - Esfuerzos y deformaciones verticales en la parte superior y a distintas profundidades de la carpeta asfáltica ( $\sigma_z$  y  $\epsilon_t$ ).
  - Esfuerzos y deformaciones radiales y tangenciales en la parte inferior de la carpeta asfáltica y en puntos radiales superficiales adyacentes a la carga aplicada ( $\sigma_r$  y  $\epsilon_t$ ).
  - Esfuerzo horizontal y vertical en las capas granulares (base y sub-base hidráulica) en la superficie y en puntos intermedios a lo largo de los espesores de las mismas ( $\sigma_z$  y  $\sigma_r$ ).
  - Esfuerzo horizontal y vertical en la parte superior de la subrasante y en varios puntos dentro de la misma ( $\sigma_z$  y  $\sigma_r$ ).
  - Deformación vertical en la parte superior de la subrasante ( $\epsilon_z$ ). Ver Figura 3.1.

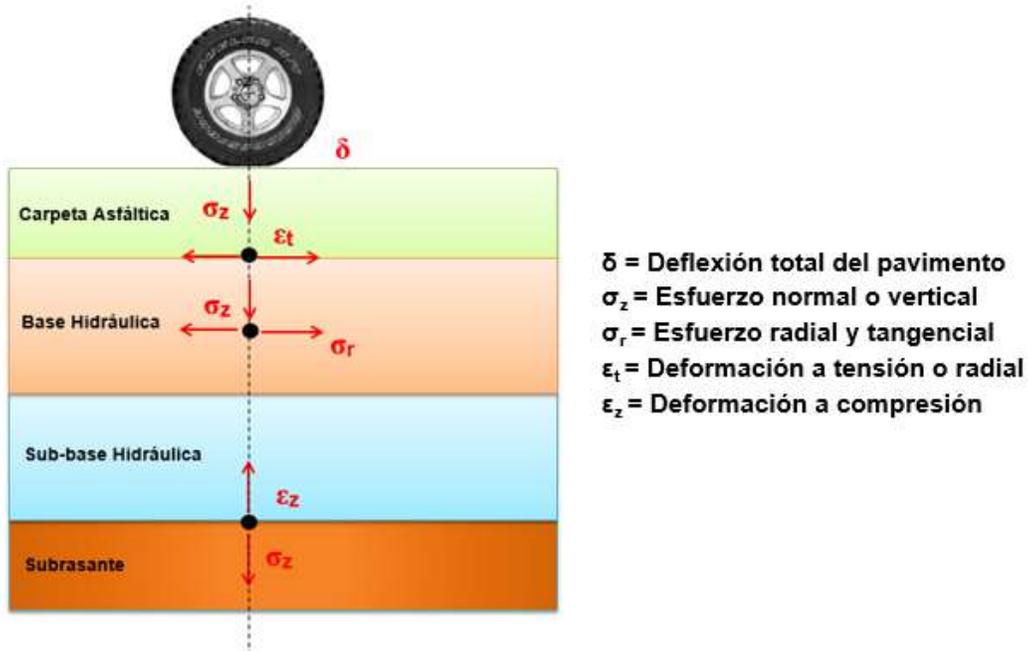


Figura 3.1 Respuestas críticas en un pavimento flexible convencional.

b) Pavimentos tipo *full depth*

Para un pavimento tipo *full depth*, las respuestas críticas son las mismas que las del pavimento flexible convencional excepto que en este pavimento no hay capas granulares (base y sub-base hidráulica). Ver

Figura 3.2.

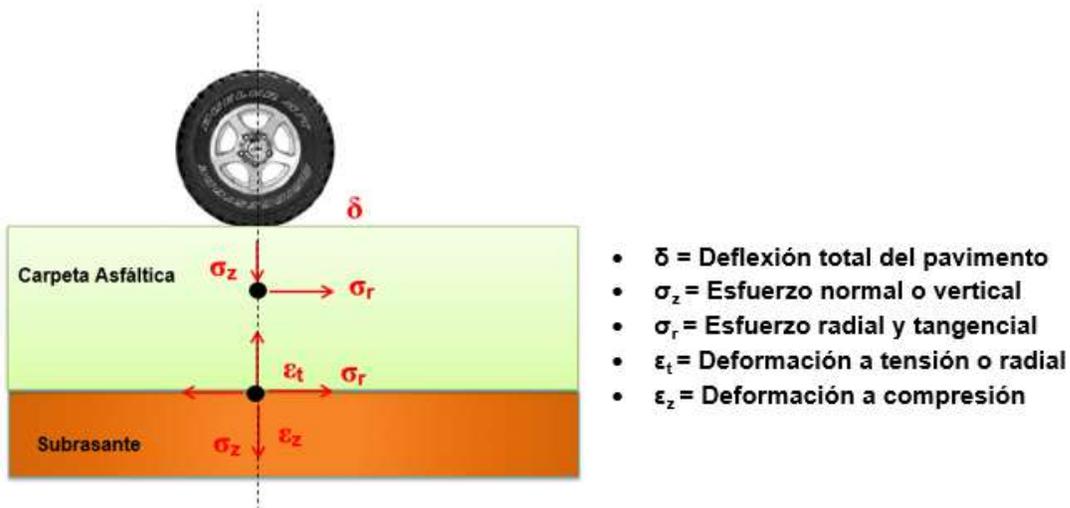


Figura 3.2 Respuestas críticas en Pavimento Tipo *full depth*.

c) Pavimentos semirígidos

Los pavimentos semirígidos están compuestos por una carpeta asfáltica la cual subyace sobre capas estabilizadas que tienen una rigidez mayor (Deep Strength). Estas capas estabilizadas suelen ser bases estabilizadas con cemento Portland, cal, etc. Esto origina que los esfuerzos y deformaciones radiales aumenten y generen agrietamientos en la parte inferior de estas capas y que se reflejen a la capa superficial. Los esfuerzos y deformaciones críticos son similares a los desarrollados por una estructura de pavimento convencional. Ver Figura 3.3.

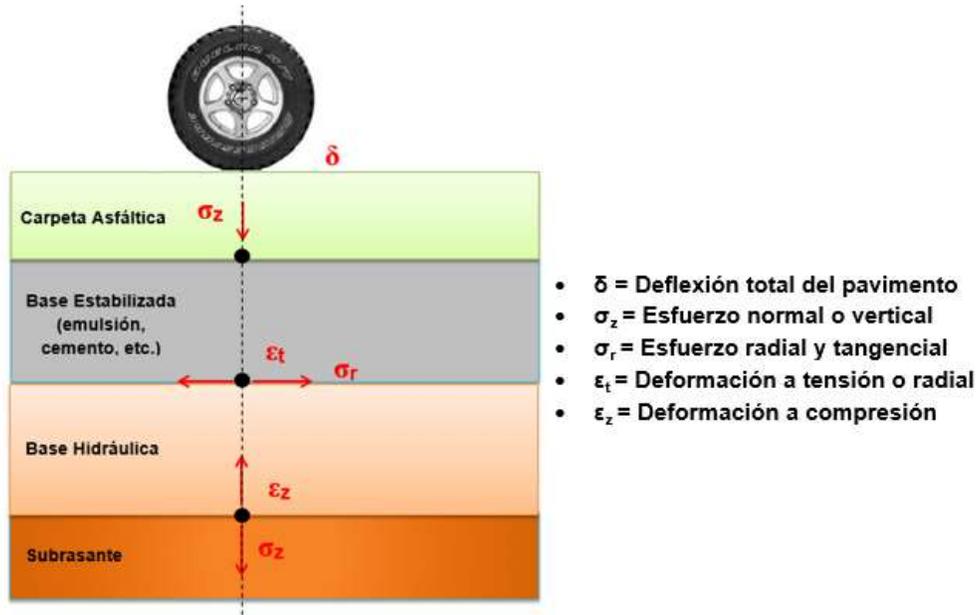


Figura 3.3 Respuestas críticas en un pavimento semirígido.

En la Figura 3.4 muestra el detalle de capas y espesores de un pavimento como los mencionados anteriormente.



**Figura 3.4 Detalle de espesores de pavimento de un pozo a cielo abierto.**



## 4 Principio de superposición aplicado al análisis estructural de pavimentos flexibles

---

El principio de superposición es un postulado elemental en la mecánica de materiales el cual tiene una importancia preponderante en el análisis estructural de los sistemas de pavimentos flexibles. El principio indica la sumatoria de cada uno de los efectos que causan cada una de las fuerzas que obran sobre un elemento sólido o sobre un punto en especial teniendo en cuenta la convención de signos adoptada (por ejemplo compresión (+) y tensión (-)).

Las soluciones para sistemas elásticos multicapa bajo una carga simple pueden ser extendidas a casos que involucran cargas múltiples, mediante la aplicación del principio de superposición. La Figura 4.1 muestra la configuración en planta de un arreglo de llantas en sistema dual-tándem. El esfuerzo y deflexión vertical bajo el punto *A* debido a las cuatro cargas, pueden ser fácilmente obtenidos mediante la suma de los correspondientes a cada una de las cargas, debido a que todos ellos (esfuerzos y deflexiones) están en la misma dirección vertical, o *z*. Sin embargo, el esfuerzo radial  $\sigma_r$ , el esfuerzo tangencial  $\sigma_\theta$ , y el esfuerzo cortante  $\tau_{rz}$ , debidos a cada carga no pueden ser sumados directamente, porque no están en la misma dirección, como está indicado por las cuatro diferentes direcciones radiales en el punto *A*. Por consiguiente,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  y  $\tau_{rz}$ , deben ser resueltos en base a componentes en las direcciones *x* e *y*, como se muestra en la Figura 4.2 para esfuerzos en el punto *A* debidos a la carga en el punto *B*. El uso del punto *A* tiene para propósitos ilustrativos, y cualquier otro punto también puede considerarse para encontrar los esfuerzos máximos.

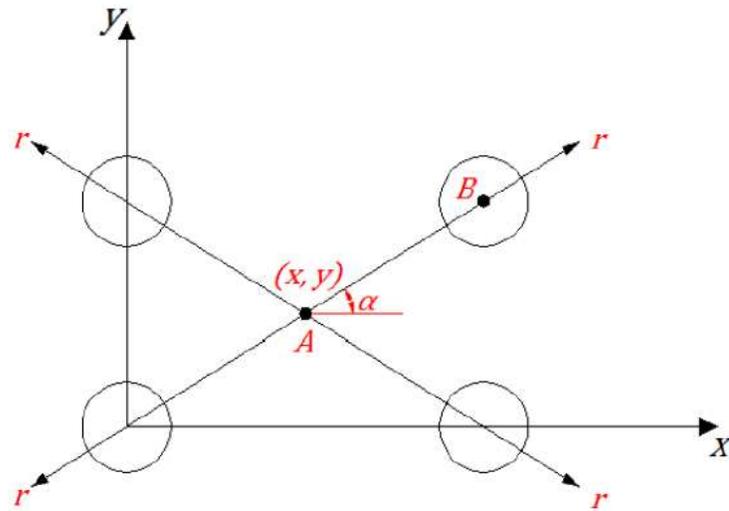


Figura 4.1 Superposición de esfuerzos para cargas múltiples.

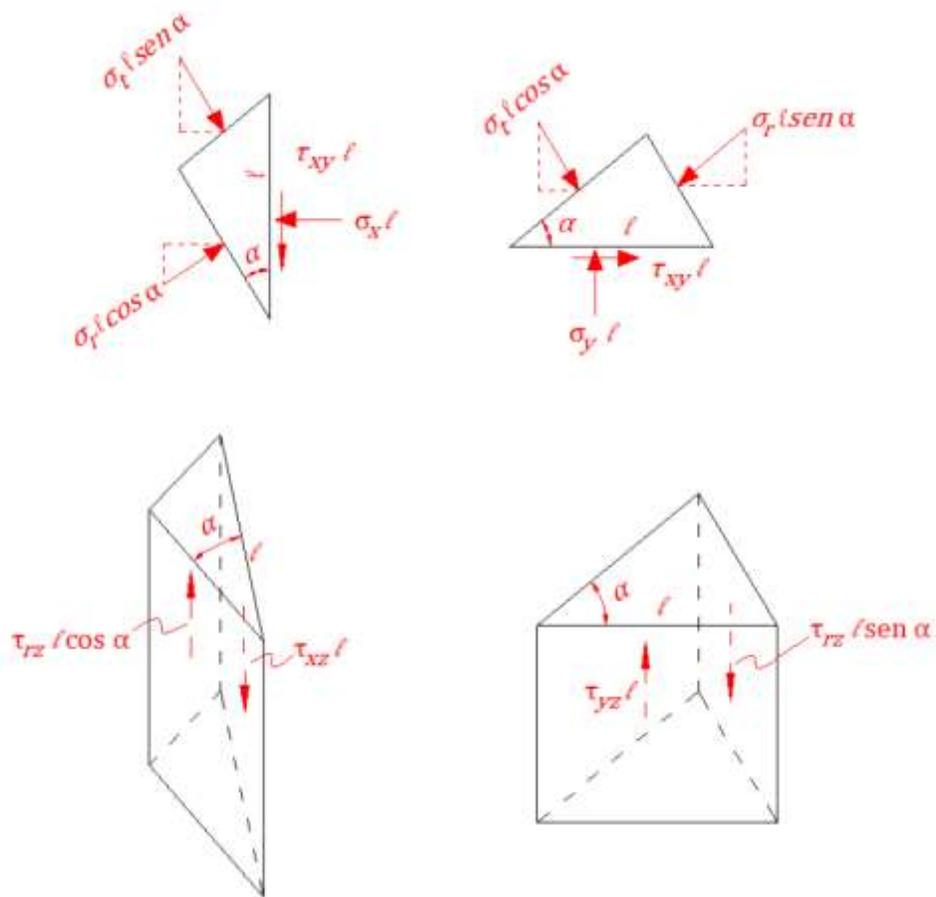


Figura 4.2 Superposición de esfuerzos para cargas múltiples (continuación).

Mediante la igualación de fuerzas en las direcciones x e y a cero, pueden fácilmente comprobarse de la Figura 4.2 las ecuaciones (18), (19),(20), (21) y (22).

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \alpha + \sigma_t \sin^2 \alpha \quad (18)$$

$$\sigma_y = \sigma_r \sin^2 \alpha + \sigma_t \cos^2 \alpha \quad (19)$$

$$\tau_{xy} = (\sigma_r - \sigma_t)(\sin \alpha)(\cos \alpha) \quad (20)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{rz}(\sin \alpha) \quad (21)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{rz}(\cos \alpha) \quad (22)$$

Después de resolver los esfuerzos debidos a cada carga en las componentes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  y  $\tau_{xz}$ , las componentes debidas a las cargas múltiples pueden obtenerse mediante superposición. Durante la superposición debe tenerse precaución en determinar correctamente el signo de cada esfuerzo.

Después de obtener mediante superposición  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  y  $\tau_{xz}$ , los tres esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , y  $\sigma_3$ , pueden obtenerse resolviendo la siguiente ecuación cúbica (ver ecuación (23))

$$\sigma^3 - \sigma^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2) - (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2) = 0 \quad (23)$$

Las deformaciones principales  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , y  $\varepsilon_3$ , pueden obtenerse aplicando la ley de Hooke.

En el análisis de fatiga, la deformación horizontal principal menor, en lugar de todas las deformaciones principales menores, es utilizada. La deformación es llamada menor porque la deformación por tensión es considerada negativa. La deformación horizontal principal menor es empleada porque ésta es la deformación que causa el agrietamiento que inicia en la fibra inferior de la carpeta de concreto asfáltico. Esta deformación se determina mediante la ecuación (24).

$$\varepsilon_t = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (24)$$

En esta ecuación,  $\varepsilon_t$  es la deformación horizontal principal menor que se presenta en la fibra inferior de la carpeta asfáltica,  $\varepsilon_x$  es la deformación en la dirección x,  $\varepsilon_y$  es la deformación en la dirección y,  $\gamma_{xy}$  es la deformación de corte en el plano x en la dirección y. Las ecuaciones con las que pueden determinarse los parámetros anteriores son las ya mostradas ecuaciones (2), (3) y (25).

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{xy} \quad (25)$$

En la Figura 4.3 se muestra un arreglo de la mitad de un eje tándem. Para ejemplificar la aplicación del principio de superposición, se considerará determinar la deflexión y el esfuerzo normal en el punto A. Para ello debe de calcularse el efecto individual que produce cada uno de los cuatro neumáticos (cargas) mostrados en la figura y posteriormente sumar dichos efectos.

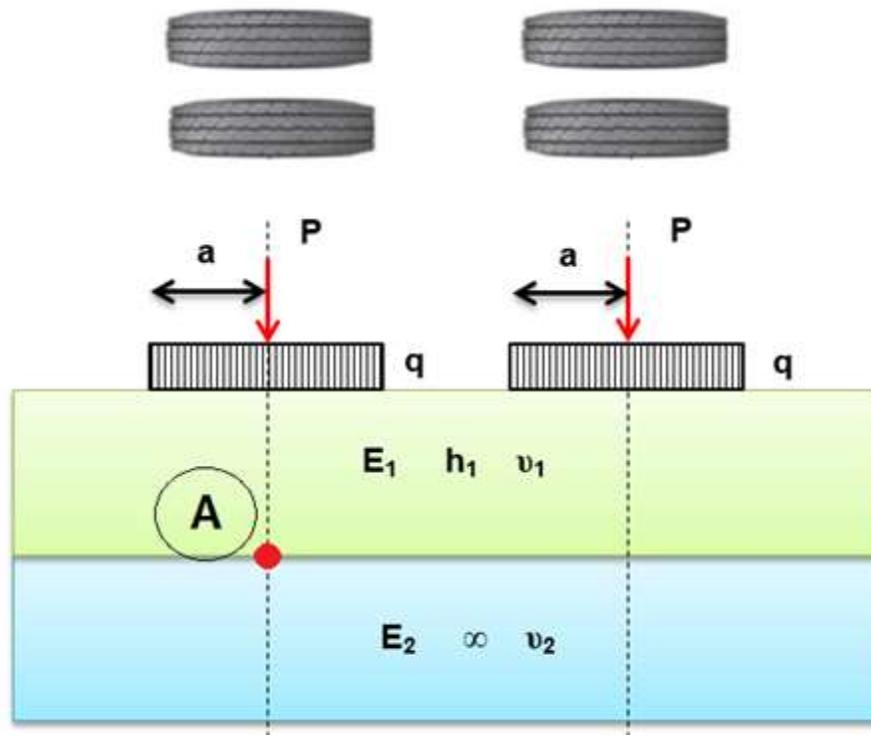
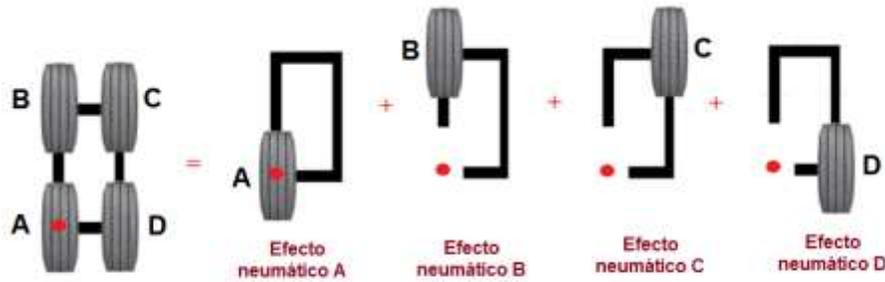


Figura 4.3 Principio de superposición para la mitad de un eje tándem.

Fuente: Elaboración propia.

La Figura 4.4 muestra el desglose de los efectos de los cuatro neumáticos (cargas). Se calcula el esfuerzo normal y deflexión en el neumático A (justo arriba del punto de interés). A continuación se calcula la respuesta en el punto B, C y D y se suman aritméticamente todos los esfuerzos normales y todas las deflexiones. Cabe aclarar que a medida que se alejan las cargas del punto de interés, tanto los esfuerzos como las deflexiones disminuirán.



Esfuerzo normal total en A = Esfuerzo normal neumático A + Esfuerzo normal neumático B + Esfuerzo normal neumático C + Esfuerzo normal neumático D

Deflexión total en A = Deflexión neumático A + Deflexión neumático B + Deflexión neumático C + Deflexión neumático D

**Figura 4.4 Principio de superposición para la mitad de un eje tándem.  
(continuación).**

Fuente: Elaboración propia.

De manera similar se resuelve para un semi eje tándem. Ver Figura 4.5 y Figura 4.6. En este caso para obtener el esfuerzo normal o la deflexión del sistema en el punto A, debe de encontrarse el efecto, primeramente del neumático en ese punto, posteriormente todos y cada uno de los neumáticos complementarios: B, C, D, E y F.

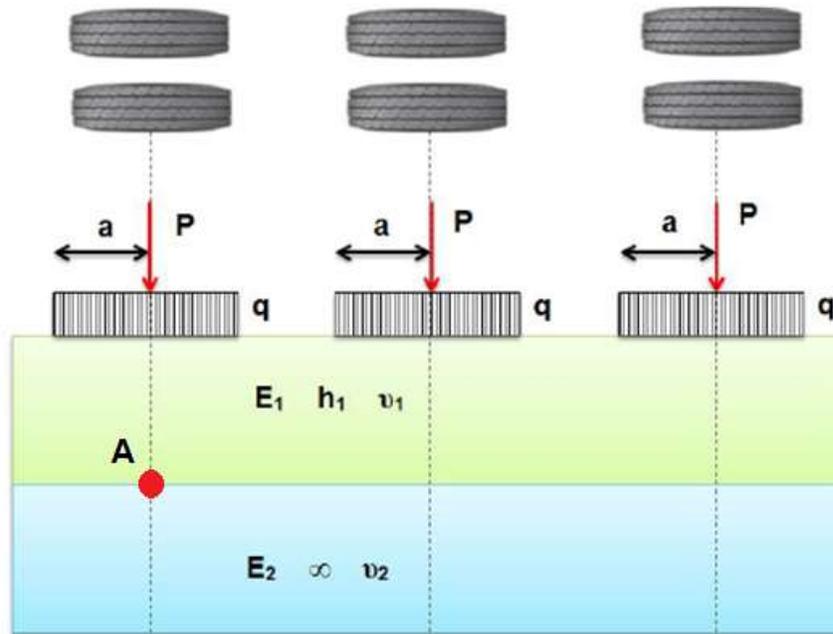


Figura 4.5 Principio de superposición para la mitad de un eje trídem.

Fuente: Elaboración propia.

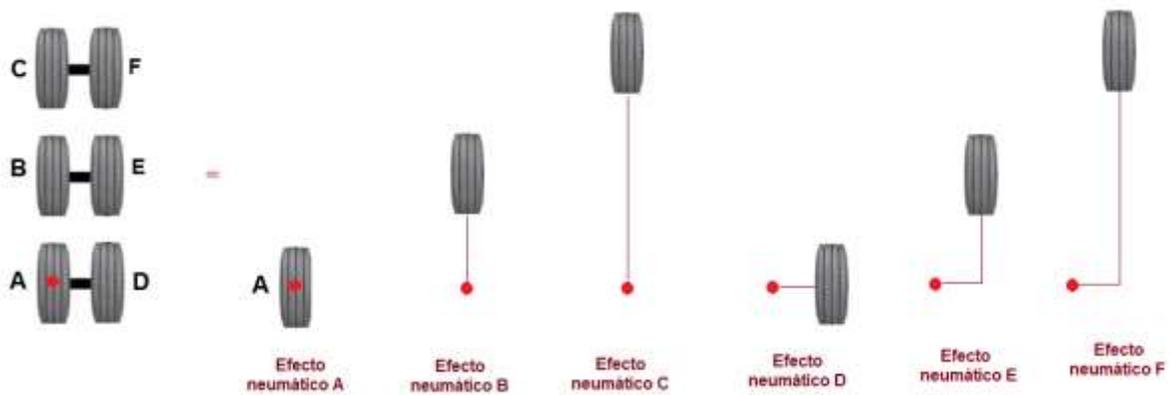
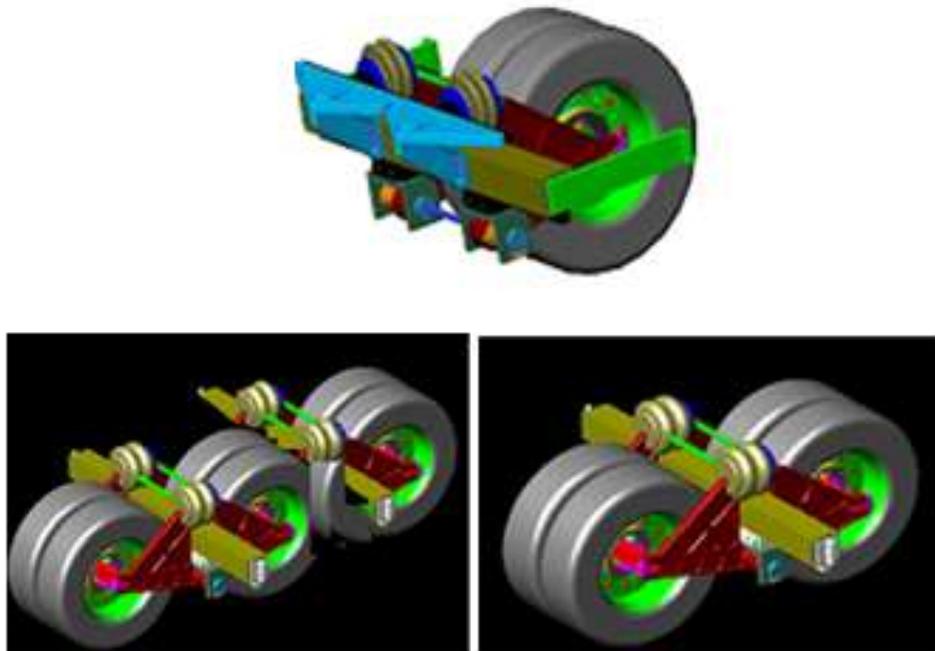


Figura 4.6 Principio de superposición para la mitad de un eje trídem. (continuación).

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 4.7 se muestran los arreglos tridimensionales de cada uno de los ejes de las configuraciones vehiculares, mismas que son empleados en los análisis del principio de superposición.



**Figura 4.7 Principio de superposición para la mitad de un eje trídem.  
(continuación).**

Fuente: Elaboración propia.



## 5 Análisis lineal, no lineal, Viscoelástico y elemento finito en pavimentos flexibles

---

### 5.1 Análisis lineal

El análisis lineal considera que los materiales tienen un comportamiento de correspondencia proporcional entre el esfuerzo aplicado y la deformación generada. Este tipo de análisis es el que generalmente se considera en los análisis estructurales de pavimentos que más adelante se describen por su simplicidad.

### 5.2 Análisis no lineal

El análisis no lineal considera que los materiales tienen un comportamiento en cuanto a rigidez que depende del nivel de aplicación de esfuerzos. Este tipo de análisis corresponde a suelos no estabilizados. El análisis no lineal considera que los materiales tienen un comportamiento que depende del estado de esfuerzos al que está sometido producto de las condiciones de carga vehicular. Esta caracterización corresponde a materiales no tratados y suelos.

A lo largo de los últimos años han evolucionado los protocolos y pruebas para obtener las características mecánicas de los materiales granulares. Existe una amplia gama de pruebas de laboratorio y otras ensayadas en campo. Algunas se encuentran fuera de uso.

Las que se han llevado a cabo en laboratorio son: estabilómetro de Hveem (R), índice de grupo, compresión triaxial, Valor Relativo de Soporte (CBR) (también aplicada en campo), módulo resilientes, por mencionar las más utilizadas (Huang, 1993).

Las que se llevan *in situ* son pruebas con deflectómetro de impacto (HWD), deflectómetro ligero portátil (LFWD), Geo gauge, analizador sísmico, prueba de placa, Penetrómetro dinámico de cono (PDC), entre otros (Puppala, 2008).

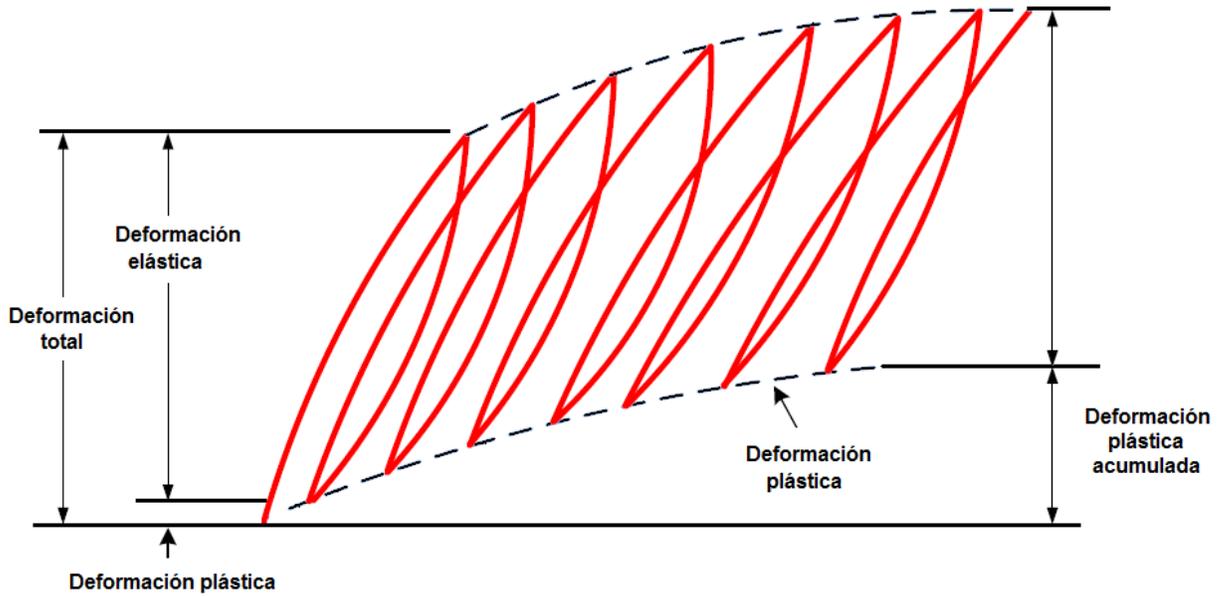
Muchas de estas pruebas consideran cargas de manera estática o dinámica. La gran mayoría de ellas toma en cuenta propiedades físicas de los materiales puestos en obra tales como granulometrías de los esqueletos minerales, formas de las partículas, pesos volumétricos secos máximos, humedades óptimas, grados de compactación (Ver Figura 5.1), tipos de compactación, límites de plasticidad de los materiales finos, etc.



**Figura 5.1 La compactación es un factor importante en la caracterización mecánica de los materiales granulares.**

### **5.2.1 Módulo Resiliente**

Un material granular sujeto a la aplicación de cargas, experimenta una deformación cuya magnitud está en función de varios factores como es el tipo de material, tamaño del espécimen, granulometría, tipo de compactación, peso específico, esfuerzo aplicado, contenido de humedad, por mencionar solo algunos. La deformación total producida por la aplicación de las cargas repetidas tiene dos componentes una definida como deformación recuperable o elástica, la cual es cuantificable una vez que la carga deja de actuar sobre el material, la otra componente denominada deformación permanente, se define como la deformación no recuperable o plástica que experimenta un material de espesor definido, en cada ciclo de carga aplicado (ver Figura 5.2).



**Figura 5.2 Resiliencia de materiales granulares y suelos.**

A la magnitud del esfuerzo desviador repetido en compresión triaxial dividido entre la deformación axial recuperable se denomina módulo resiliente. Ver ecuación (26).

$$M_r = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\epsilon_{axial}} = \frac{\sigma_d}{\epsilon_{axial}} \quad (26)$$

Donde:

$M_r$  = Módulo resiliente

$\sigma_1$  = Esfuerzo principal mayor

$\sigma_3$  = Esfuerzo principal menor

$\sigma_d$  = Esfuerzo desviador

$\epsilon_{axial}$  = Deformación axial recuperable

El equipo para la ejecución de la prueba en materiales granulares se muestra en la Figura 6 bajo el protocolo de ensayo AASHTO T307-99 denominado “*Determining the Resilient Modulus of soils and Aggregate materials*”. Ver Figura 5.3. En la Figura 5.4 se muestran los esfuerzos considerados en la obtención del módulo resiliente en materiales granulares y suelos. El primero de ellos es el esfuerzo desviador y normal y el segundo es el esfuerzo producido por confinamiento.



Figura 5.3 Equipo triaxial cíclico para obtener módulos resilientes en materiales granulares.

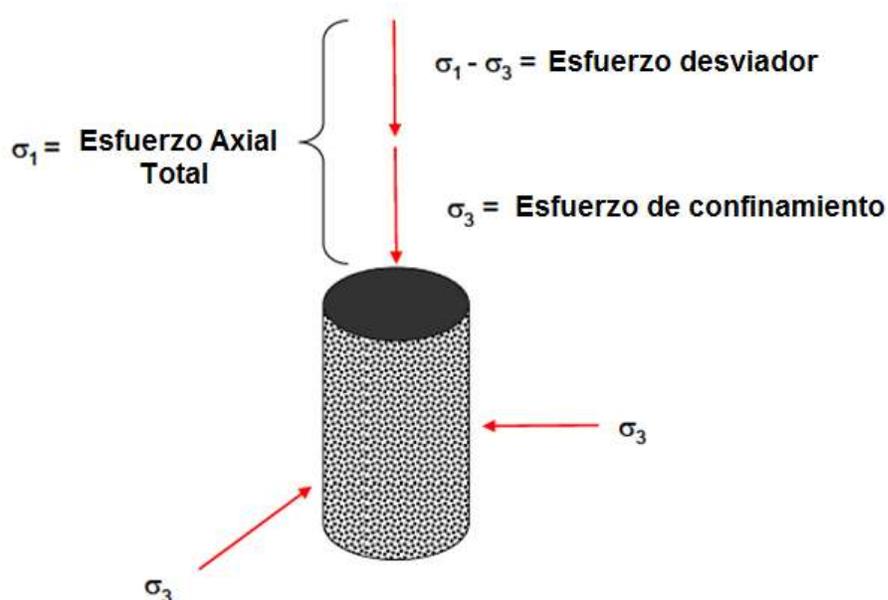


Figura 5.4 Diagrama de esfuerzos en espécimen para Módulo Resiliente en materiales granulares y suelos.

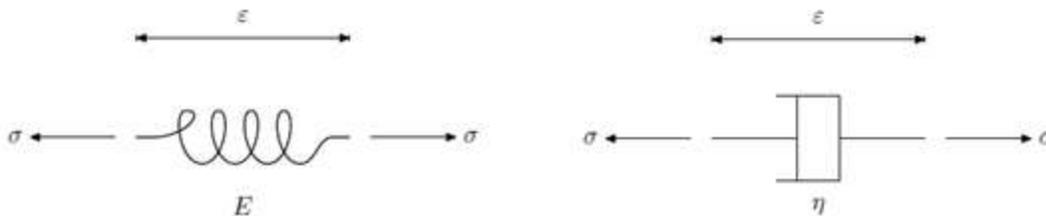
### 5.3 Análisis viscoelástico

El análisis viscoelástico considera que los materiales estabilizados con asfalto tienen un comportamiento dependiente de la temperatura pero sobre todo del tiempo de aplicación de la carga o frecuencia (ver Figura 5.5). La viscoelasticidad supone una elaboración de la respuesta elástica que incorpora los efectos de dependencia de la velocidad de deformación e historia. Estos efectos son imprescindibles para poder modelar sólidos que poseen fluencia y relajación. La forma más sencilla de abordar la viscoelasticidad es mediante modelos reológicos. Estos modelos son sistemas mecánicos elementales que idealizan de forma sencilla los distintos tipos de comportamientos, a partir de una combinación de resortes y amortiguadores.



**Figura 5.5 El asfalto es un material viscoelástico y utilizado para capas asfálticas de pavimentos flexibles.**

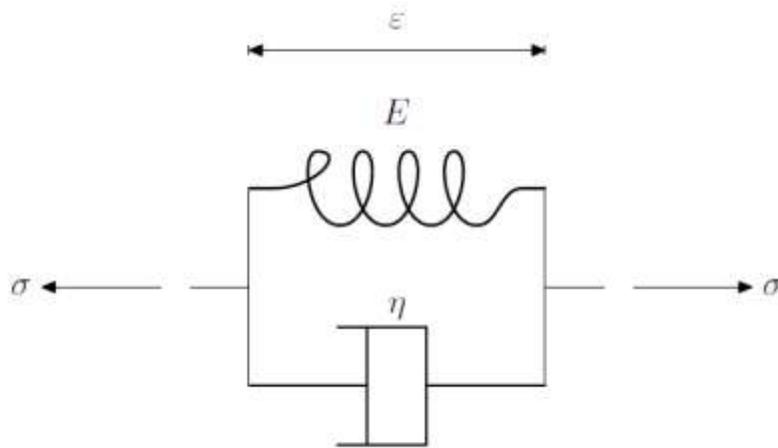
En la Figura 5.6 se muestran los elementos básicos que se emplean para analizar la viscoelasticidad: El resorte es el elemento elástico básico. El amortiguador es un elemento cuya tensión es proporcional a la velocidad de deformación.



**Figura 5.6 Modelos simplificados de resorte y amortiguador.**

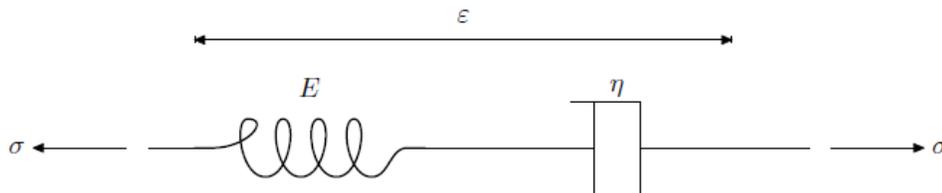
Cuando un material sólido viscoelástico se somete a un estado tensional, su deformación no permanece constante sino que cambia con el tiempo. El material fluye de manera relativa pues la deformación aumenta progresivamente como si fuera un fluido. Para describir este fenómeno de fluencia se emplea el modelo

reológico de Kelvin compuesto por un resorte y un amortiguador colocados en paralelo. Ver Figura 5.7.



**Figura 5.7 Modelo reológico de Kelvin.**

Otro elemento estudiado en el ámbito de la viscoelasticidad es la relajación. Esta consiste en la reducción del estado tensional cuando un sólido se somete a una deformación constante. Este comportamiento se idealiza mediante el modelo reológico de Maxwell que combina un resorte y un amortiguador en serie. Ver Figura 5.8.



**Figura 5.8.- Modelo reológico de Maxwell.**

## 5.4 Análisis de elemento finito

El método de elemento finito consiste en la división del modelo a ser analizado en cuerpos discretos o elementos finitos a los cuales se les definen sus propiedades mecánicas y térmicas. Este funciona por medio de la iteración de cuatro partes principales:

- La discretización
- La formulación de las ecuaciones
- La matriz de rigidez correspondiente

- Resolución del campo de esfuerzos y deformaciones en los diferentes puntos del cuerpo. Ver Figura 5.9.

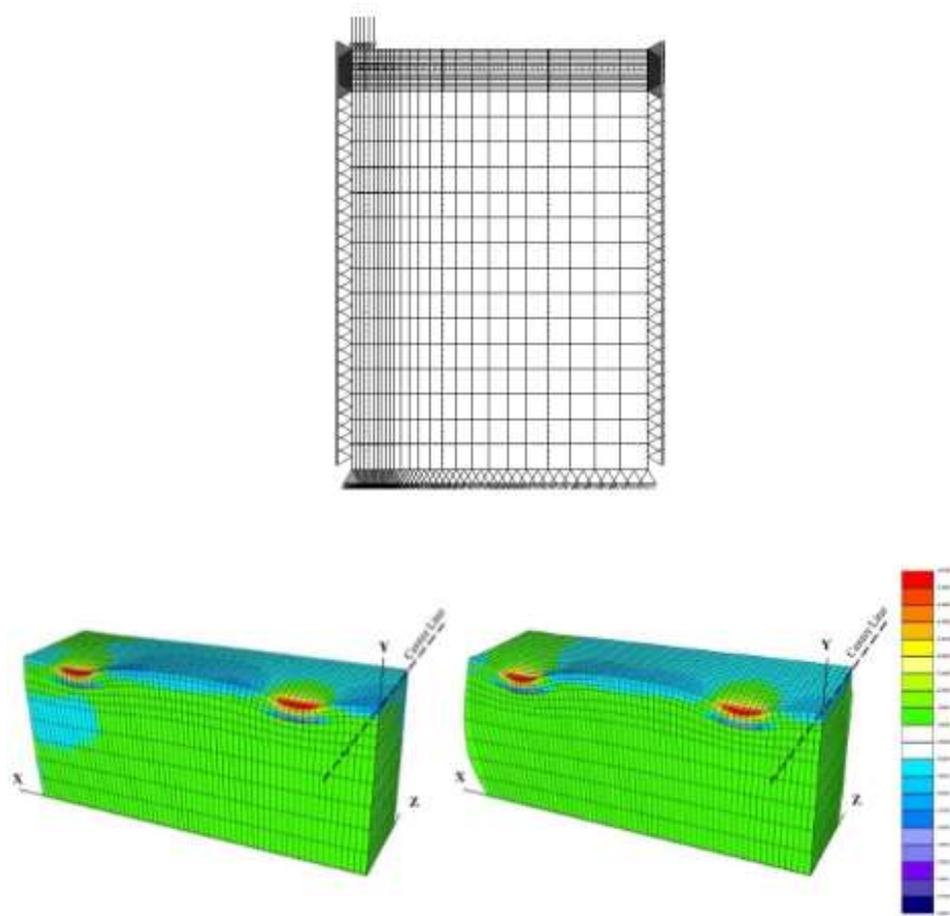


Figura 5.9 Elemento finito aplicado en análisis de pavimentos flexibles.



## 6 Metodología de diseño de pavimentos flexibles empírico-mecanicista

La gran mayoría de los métodos de diseño de pavimentos flexibles desarrollan una metodología general de diseño empírico-mecanicista aceptada internacionalmente con algunas variantes en su ejecución. La metodología general para el diseño de pavimentos flexibles asume que los materiales utilizados en la estructura del pavimento son conocidos con anticipación y que sólo sus espesores están sujetos a iteraciones de diseño. Si los espesores propuestos no soportarán el tránsito durante la vida útil esperada, será entonces necesario cambiar los tipos y propiedades de los materiales a utilizar o sus espesores. Ver Figura 6.1.

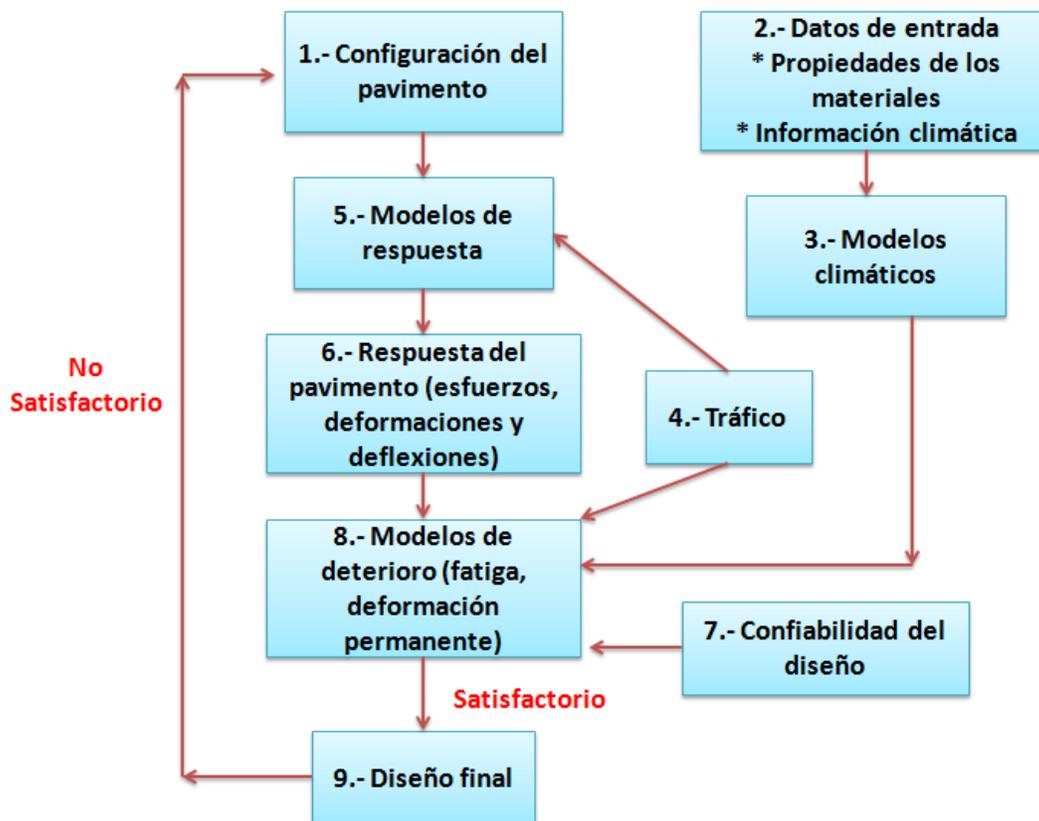


Figura 6.1 Metodología Empírico-Mecanicista

A continuación, se describe de manera muy breve y general esta metodología.

- a) Configuración del pavimento. El primer paso implica la suposición inicial del pavimento o geometría del mismo que incluye el número de capas, su espesor y el tipo de materiales a utilizar.
- b) Caracterización de materiales. Las características elásticas de los materiales que conforman las capas de pavimento son sus módulos elásticos y sus relaciones de Poisson. Para las capas asfálticas el módulo dinámico ( $E^*$ ) es el usual y para las capas granulares los módulos resilientes ( $M_r$ ) son los utilizados.
- c) Modelos climáticos. Estos modelos han sido muy poco difundidos debido a la complejidad de análisis que ello representa. Se reconocen modelos de equilibrio de humedad (succión), transferencia de calor e infiltración y drenaje.
- d) Condiciones de tránsito. El tránsito debe subdividirse en un cierto número de grupos, cada uno con diferentes configuraciones, pesos y número de repeticiones. El peso, la configuración, la separación entre ejes, el radio y la presión de contacto son variables utilizadas en los modelos estructurales, mientras que el número de repeticiones se usa en los modelos de deterioro.
- e) Modelos estructurales y respuesta del pavimento. En este punto se calculan respuestas en el interior del pavimento. Dichas respuestas forman el campo de esfuerzos, deformaciones y deflexiones en el pavimento. Durante el desarrollo del documento se irán desarrollando y exponiendo los modelos o teorías estructurales para calcular estas respuestas.
- f) Análisis de confiabilidad. Dada la variabilidad que existe en las características de los materiales de los factores de clima, en la valoración de tránsito y en los procesos constructivos, será necesario realizar un análisis de confiabilidad en el proyecto. Los métodos de diseño de pavimentos pueden ser de tipo determinístico o probabilístico.
- g) Modelos de deterioro. Los modelos de deterioro son funciones de transferencia que relacionan la respuesta estructural de un sistema con varios tipos de deterioro. Estos modelos requieren una extensiva y permanente calibración y verificación en campo para que sean confiables, y tomar en cuenta las condiciones locales del ámbito en que serán utilizados.

- h) Diseño final. El diseño final consiste en comparar el número de repeticiones esperadas de tránsito durante el período de diseño del pavimento con el número de repeticiones permisibles en la carpeta asfáltica y en las capas granulares derivados de los modelos de deterioro. Si resultan mayores, quiere decir que los materiales todavía no satisfacen todas las repeticiones de tránsito, por lo tanto se repite el procedimiento modificando la geometría del pavimento o las características elásticas de las capas (módulos dinámicos y módulos resilientes) hasta que cumplan con la solicitud de tránsito esperada.

Dentro de este tipo de metodologías se pueden mencionar el método del Instituto del Asfalto (DAMA), el método del Catálogo Español (MOPU), el método del Instituto Mexicano del Transporte (IMT-PAVE), el método empírico mecanicista AASHTO WARE de AASHTO, entre otros. Ver Figura 6.2. Todas estas metodologías consideran análisis de tipo lineal.



**Figura 6.2 Métodos empírico mecanicistas para diseño de pavimentos flexibles.**

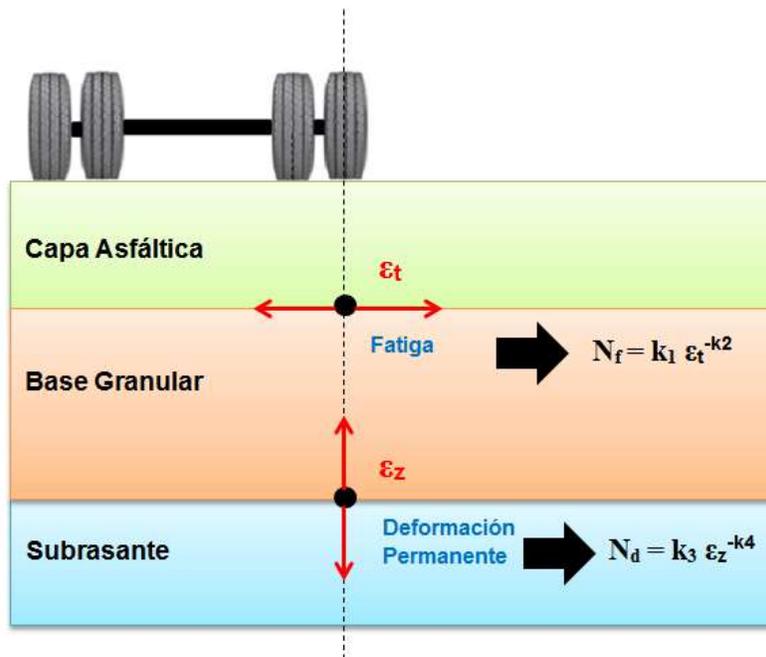
Existen otros métodos de diseño de pavimentos aplicados no a carreteras o caminos sino a otro modo de transporte. Por ejemplo para pavimentos aeroportuarios se tiene el programa FAARFIELD (Kawa *et al* (2007)) el cual permite modelar distintas secciones de pavimento en función de varias flotas de aeronaves cargadas en la plataforma de diseño. Este programa sigue los fundamentos de pavimentos multicapa que más adelante se describirán y comentarán.



## 7 Metodología de diseño de pavimentos flexibles

Las metodologías empírico-mecanicista comentadas en el apartado anterior consideran dos criterios básicos para cualquier estructura de pavimento nueva: la fatiga y la deformación permanente.

Kerkhoven y Dormon (1953) (citado por Huang, 1993) fueron los primeros en sugerir el uso de la deformación vertical de compresión en la coronación de la subrasante como criterio de fallo para controlar las deformaciones permanentes. Así mismo, Saal y Pell (1960) recomendaron el uso de la deformación horizontal de tensión en el fondo de la capa de mezcla bituminosa como criterio para controlar la fisuración por fatiga. El uso de ambos conceptos para el diseño de firmes fue presentado por Dormon y Metcalf (1965). Ver Figura 7.1.



**Figura 7.1 Deformaciones críticas asociadas a modos de falla para diseño de pavimentos flexibles.**

Desde el punto de vista del diseño de pavimentos flexibles es necesario conocer la respuesta del pavimento en puntos críticos del mismo (inciso e del apartado anterior). Estas respuestas se definen como respuestas mecánicas críticas y son las siguientes:

- La deformación a tensión debajo de la(s) capa(s) estabilizada(s) asociada al agrietamiento por fatiga, conocida también coloquialmente como “piel de cocodrilo”. Cuando dicha respuesta es máxima, se comienza a generar un agrietamiento de abajo hacia arriba de dichas capas estructurales. Esta deformación a tensión actuante deberá ser menor a la deformación a tensión admisible con el fin de controlar la fatiga de capa estabilizada (capa o capas asfálticas) ante las sollicitaciones de ejes de carga. Ver ecuación (27).

$$\epsilon_t < \epsilon_{t \text{ admisible}} \quad (27)$$

- La deformación a compresión arriba de la capa subrasante asociada a la deformación permanente o rodera plástica en la superficie del pavimento. Esta deformación a compresión actuante deberá ser menor a la deformación a compresión admisible con el fin de controlar la deformación de las capas no estabilizadas (capas granulares y suelos) ante las sollicitaciones de ejes de carga. Ver ecuación (28).

$$\epsilon_z < \epsilon_{z \text{ admisible}} \quad (28)$$

Estas dos respuestas se correlacionan directamente con modelos de deterioro o funciones de transferencia (desempeño) que definen la vida útil o remanente del pavimento o nivel de desempeño del mismo. Existen una gran variedad de modelos de deterioro tanto por fatiga como por deformación permanente, elaborados por distintas agencias de transporte y de investigación de carreteras alrededor del mundo. Todos estos modelos de deterioro deben ser calibrados en condiciones reales bajo monitoreo constante de la evolución de su daño.

## 8 Sistemas estructurales de 1 capa (Monocapa)

---

Las primeras soluciones estructurales para sistemas de una capa tuvieron sus primeras aplicaciones en temas de geotecnia aplicados a la ingeniería de cimentaciones. En este apartado la teoría de Boussinesq cobra gran importancia ya que a partir de sus planteamientos teóricos dio lugar a desarrollos posteriores como la teoría elástica multicapa de Burmister y a la teoría de espesores o estructuras equivalentes.

### 8.1 Boussinesq (1885)

Boussinesq desarrolló las primeras expresiones para calcular la distribución de esfuerzos de una carga puntual en medios homogéneos, linealmente elásticos e isotrópicos (ver Figura 8.1). Posteriormente la llevó a cargas de tipo circular. La solución de Boussinesq ha sido comparada en innumerables ocasiones con los resultados dados por la teoría de Burmister con resultados aceptables.

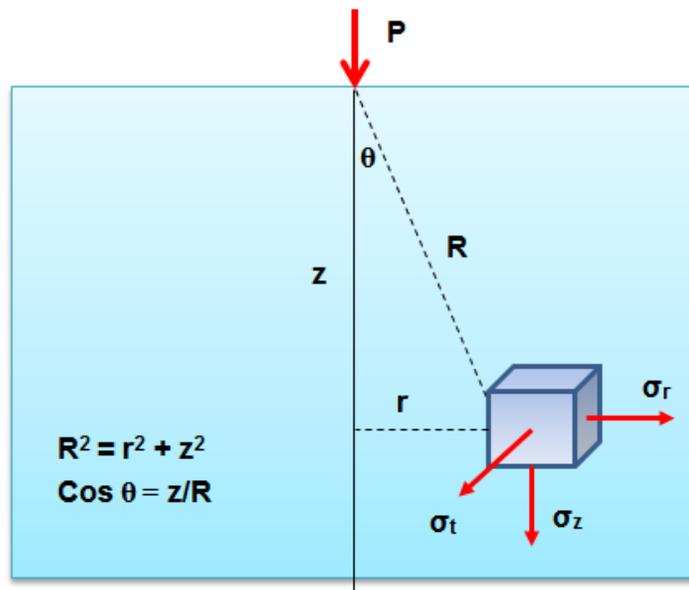


Figura 8.1 Distribución de esfuerzos para cargas puntuales según Boussinesq.

Fuente: Elaboración propia.

Las soluciones propuestas por Boussinesq para el campo de esfuerzos y deformaciones generados por una carga puntual, se observan en las ecuaciones (29), (30), (31), (32), (33) y (34).

Esfuerzo vertical:

$$\sigma_z = \frac{3 P z^3}{2\pi \sqrt{r^2 + z^2}} \quad (29)$$

Esfuerzo radial:

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{3 r^2 z}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1 - 2\nu}{r^2 + z^2 + z\sqrt{r^2 + z^2}} \right] \quad (30)$$

Esfuerzo tangencial:

$$\sigma_t = -\frac{P}{2\pi} (1 - 2\nu) \left[ \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{r^2 + z^2 + z\sqrt{r^2 + z^2}} \right] \quad (31)$$

Deformación unitaria vertical:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_t)] \quad (32)$$

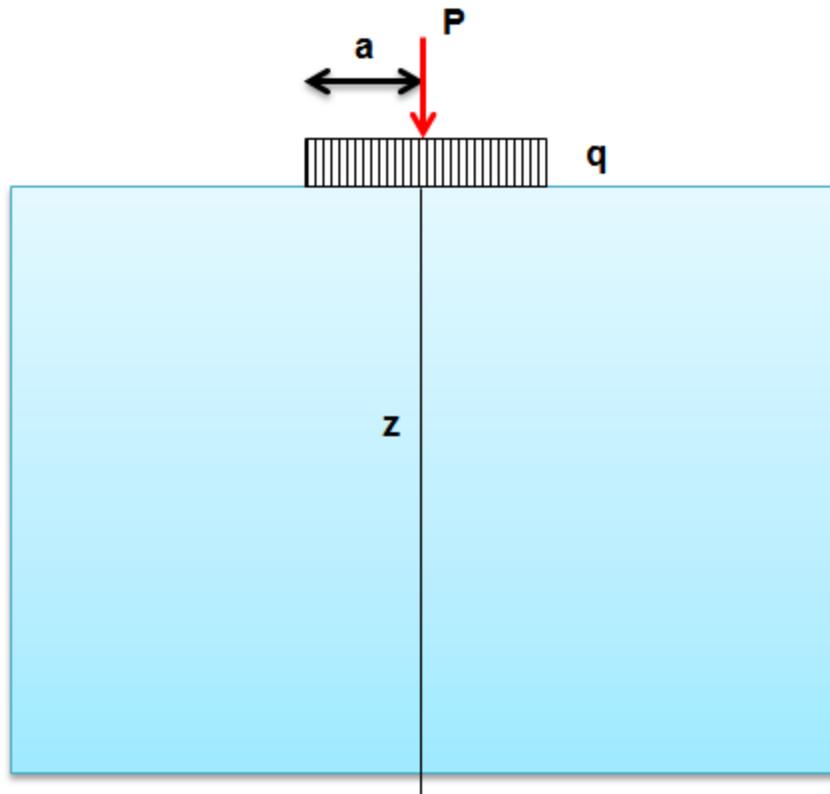
Deformación unitaria radial:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_z)] \quad (33)$$

Deformación unitaria tangencial:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} [\sigma_t - \nu(\sigma_z + \sigma_r)] \quad (34)$$

Boussinesq integró las soluciones para cargas puntuales a cargas distribuidas en un área circular (ver Figura 8.2). Las ecuaciones (35), (36), (37), (38), (39), (40) y (41) muestran las expresiones para calcular el campo de esfuerzos, deformaciones y deflexiones generadas por carga circular a lo largo del eje de simetría de la misma.



**Figura 8.2 Distribución de esfuerzos para cargas uniformemente distribuidas según Boussinesq.**

Fuente: Elaboración propia.

Esfuerzo vertical

$$\sigma_z = \sigma_o \left[ 1 - \left( \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)^3 \right] \quad (35)$$

Esfuerzo radial

$$\sigma_r = \frac{\sigma_o}{2} \left[ (1 + 2\nu) - \frac{2z(1 + \nu)}{\sqrt{a^2 + z^2}} + \left( \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)^3 \right] \quad (36)$$

Esfuerzo tangencial

$$\sigma_t = \frac{\sigma_o}{2} \left[ (1 + 2\nu) - \frac{2z(1 + \nu)}{\sqrt{a^2 + z^2}} + \left( \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)^3 \right] \quad (37)$$

Deformación unitaria vertical

$$\varepsilon_z = \frac{(1 + \nu)\sigma_o}{E} \left[ \frac{\frac{z}{a}}{\left( \sqrt{1 + \left( \frac{z}{a} \right)^2} \right)^3} - (1 - 2\nu) \left( \frac{\frac{z}{a}}{\sqrt{1 + \left( \frac{z}{a} \right)^2}} - 1 \right) \right] \quad (38)$$

Deformación unitaria radial

$$\varepsilon_r = \frac{(1 + \nu)\sigma_o}{2E} \left[ \frac{-\frac{z}{a}}{\left( \sqrt{1 + \left( \frac{z}{a} \right)^2} \right)^3} - (1 - 2\nu) \left( \frac{\frac{z}{a}}{\sqrt{1 + \left( \frac{z}{a} \right)^2}} - 1 \right) \right] \quad (39)$$

Deformación unitaria tangencial

$$\varepsilon_t = \frac{(1 + \nu)\sigma_o}{2E} \left[ \frac{-\frac{z}{a}}{\left( \sqrt{1 + \left( \frac{z}{a} \right)^2} \right)^3} - (1 - 2\nu) \left( \frac{\frac{z}{a}}{\sqrt{1 + \left( \frac{z}{a} \right)^2}} - 1 \right) \right] \quad (40)$$

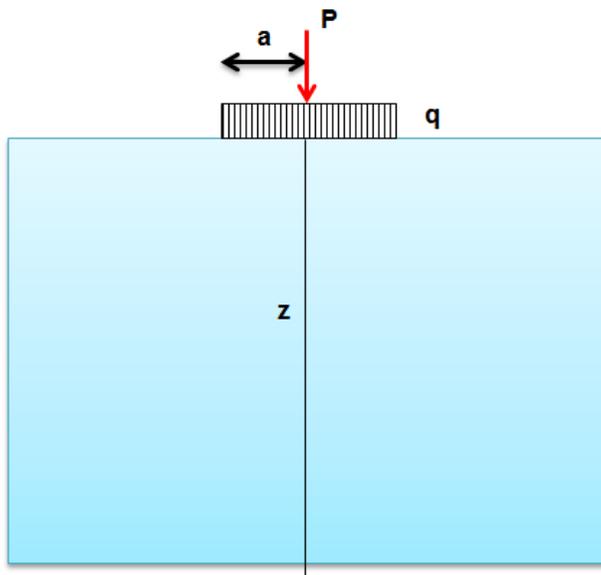
Deflexión o compresión superficial

$$w_o = \frac{(1 + \nu)a\sigma_o}{E} \left[ \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} + \frac{(1 - 2\nu)}{a} (\sqrt{a^2 + z^2} - z) \right] \quad (41)$$

A continuación, se irán presentando ejemplos prácticos resueltos de algunos métodos de análisis para sistemas de pavimentos de varias capas. Al final del documento se presentarán ejercicios para su resolución.

### Ejemplo 1.- Boussinesq

Utilizando las fórmulas para cargas uniformemente distribuidas de Boussinesq, encontrar los esfuerzos y deformaciones normales y radiales del siguiente sistema homogéneo representado por un terraplén de baja capacidad de carga.



$z = 0, 5, 10, 15, 20, 25,$   
 $30, 40, 50, 55, 60, 70,$   
 $80, 90, 100 \text{ cm}$

$a = 15 \text{ cm}$

$E_1 = 150 \text{ MPa}$

$\nu_1 = 0.40$

$q = 0.60 \text{ MPa}$

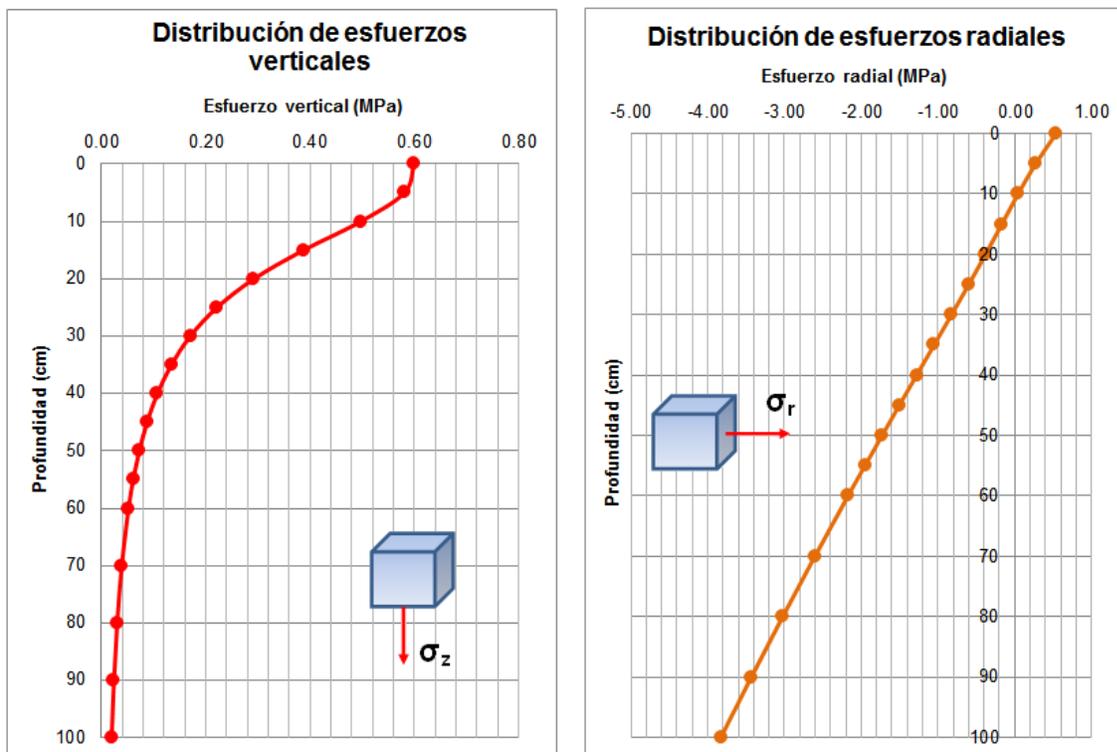
#### Solución:

Utilizando las ecuaciones (35), (36), (38) y (39) y sustituyendo los valores del esquema anterior, obtenemos los resultados mostrados en la

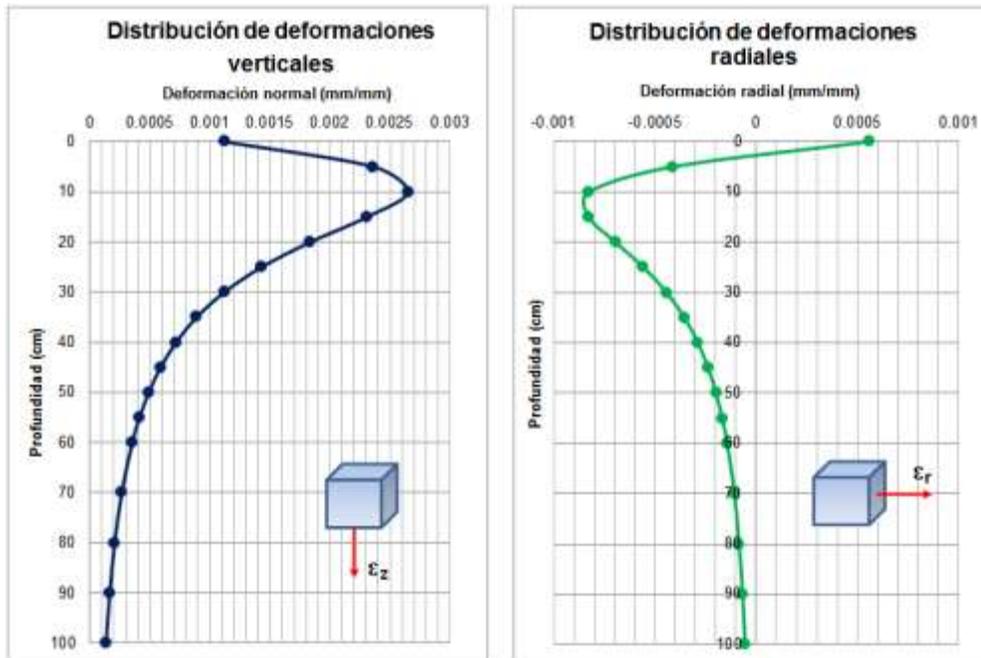
Tabla 8.1 mismos que se observan de forma gráfica (ver Figura 8.3 y Figura 8.4).

**Tabla 8.1 Obtención del campo de esfuerzos y deformaciones verticales y radiales.**

Prof. (cm)	$\sigma_z$	$\sigma_r$	$\epsilon_z$	$\epsilon_r$
0	0.60	0.54	0.00112	0.00056
5	0.58	0.27	0.00236	-0.0004
10	0.50	0.04	0.00265	-0.0008
15	0.39	-0.17	0.00231	-0.0008
20	0.29	-0.38	0.00184	-0.0007
25	0.22	-0.60	0.00143	-0.0006
30	0.17	-0.82	0.00112	-0.0004
40	0.11	-1.28	0.00072	-0.0003
50	0.07	-1.73	0.00049	-0.0002
55	0.06	-1.95	0.00041	-0.0002
60	0.05	-2.17	0.00035	-0.0001
70	0.04	-2.60	0.00027	-0.0001
80	0.03	-3.02	0.00021	-8E-05
90	0.02	-3.43	0.00016	-7E-05
100	0.02	-3.83	0.00013	-5E-05



**Figura 8.3 Distribución de esfuerzos verticales y radiales para el ejemplo 1.**



**Figura 8.4 Distribución de deformaciones verticales y radiales para el ejemplo 1.**

Los primeros métodos de diseño de espesores de pavimentos flexibles, fueron de tipo empírico. En ellos se tomaban en cuenta las observaciones en campo obtenidas de pruebas de resistencia del terreno de cimentación del pavimento (ver Figura 8.5). En muchos de estos métodos se establecieron condiciones de diseño y análisis de la estructura del pavimento mediante las ecuaciones de Boussinesq.

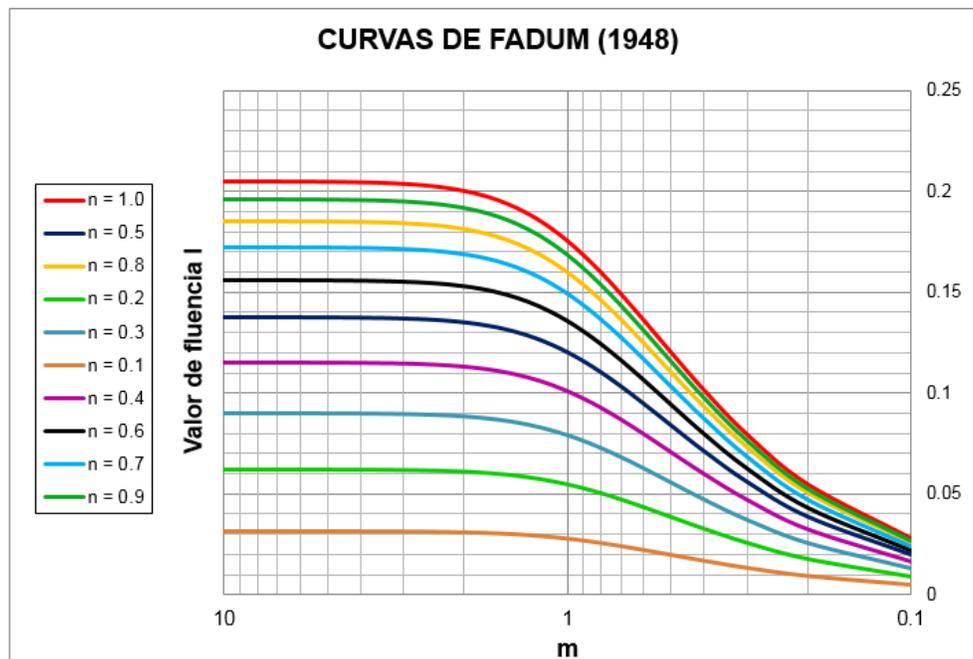


**Figura 8.5 Problemática de un pavimento a nivel cimentación a mediados del siglo XX.**

- Keith Boyd del Departamento de Carreteras de North Dakota de los Estados Unidos (citado por Valle, 1958), presentó un método para el cálculo de espesores de pavimentos flexibles basándose en la resistencia a la penetración que presenta el terreno. Dicha medida de resistencia se obtiene mediante el cono de North Dakota (muy similar al método del CBR). A partir de esos resultados y mediante la aplicación de los postulados de Boussinesq se obtienen los espesores totales de los pavimentos.
- William Housel de la Universidad de Michigan de los Estados Unidos (citado por Valle, 1958) presenta un método análogo al de Boyd, en el cual correlaciona la resistencia del terreno con el número de golpes que es necesario dar a un tubo metálico de 1.5" de diámetro para que penetre 6".

## 8.2 Fadum (1948)

La solución de Fadum (1948) se usa generalmente para estimar los incrementos de esfuerzos que producen áreas cargadas de sección rectangular en ingeniería de cimentaciones como losas de cimentación, zapatas aisladas, etc. (ver Figura 8.6). El uso en cálculo de esfuerzos en pavimentos flexibles se encuentra totalmente limitado ya que la suposición del área o huella del neumático con el pavimento es de tipo circular.

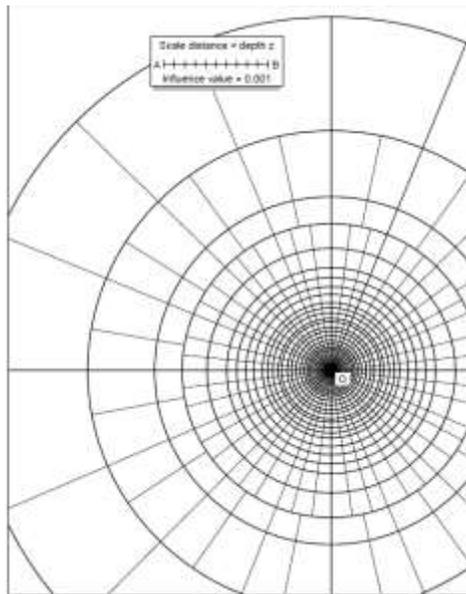


**Figura 8.6 Curva de Fadum para distribución de esfuerzos en áreas rectangulares.**

Fuente: Elaboración propia.

### **8.3 Newmark (1942)**

Newmark desarrolló una forma de calcular esfuerzos para cualquier tipo de carga (incluyendo la circular usada en pavimentos) a cualquier profundidad a través de gráficos circulares o curvas de influencia. Estos trabajos se desarrollaron siguiendo los postulados originales de Boussinesq y han sido de gran utilización en ingeniería de cimentaciones aunque en pavimentos se ha utilizado de manera limitada debido a la enorme discrepancia de resultados al contar los cuadrilongos (recuadros) de su metodología. Ver Figura 8.7.



**Figura 8.7 Curvas de influencia de Newmark.**

### **8.4 Damy y Casales (1985)**

Existen soluciones exactas para la esquina de áreas rectangulares y soluciones aproximadas para áreas de cualquier forma que utiliza el llamado método del sector o las cartas de Newmark (Poulos, 1974). No obstante, no existe una solución exacta para un polígono de forma cualquiera, con carga uniforme vertical. Damy y Casales (1985) durante la Conferencia Internacional de Mecánica de Suelos y Cimentaciones en San Francisco California en el año 1985, presentaron un método sencillo para obtener la distribución de esfuerzos verticales de cualquier polígono dado. Ver Figura 8.8 y Figura 8.9.

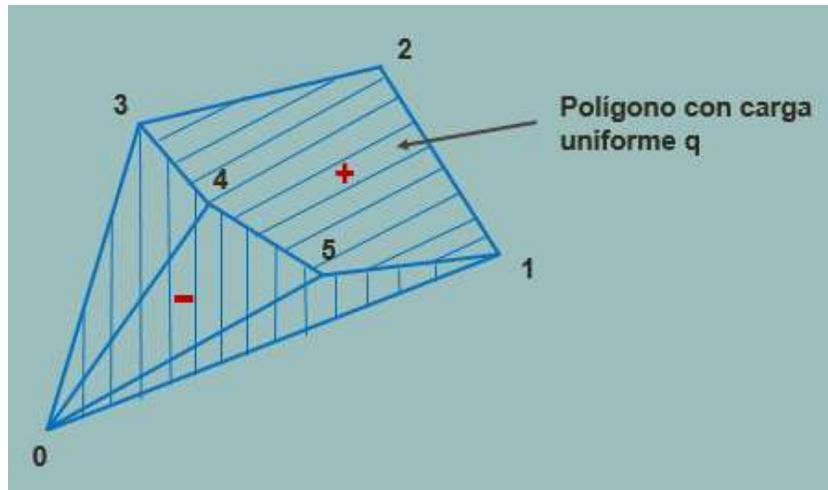


Figura 8.8 Polígono teórico de la solución de Damy-Casales.

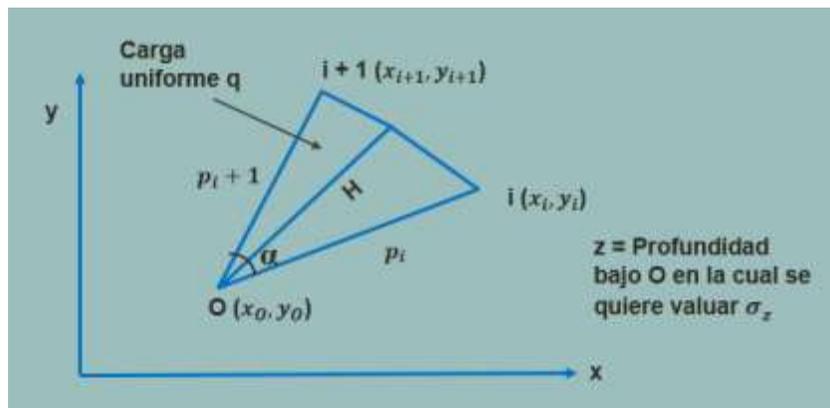


Figura 8.9 Polígono teórico de la solución de Damy-Casales (Continuación).

La Tabla 8.2 y la Figura 8.10 muestran una comparativa entre los métodos de Damy-Casales y de Boussinesq. Puede advertirse que los resultados son muy similares entre sí. Por ejemplo para una profundidad "z" de 5 cm existe una diferencia de 0.21 %; para una profundidad "z" de 20 cm existe una diferencia de 2.61%; para una profundidad "z" de 50 cm se tiene una diferencia de 4.07% y para una profundidad "z" de 100 cm (1 metro) se tiene una diferencia de 4.37%. Por lo anterior se concluye que los valores suelen dispersarse a medida que se incrementa la profundidad de análisis. No obstante dicho porcentaje sigue siendo muy bajo.

Tabla 8.2 Comparativa entre método de Boussinesq y método de Damy-Casales.

z (cm)	Boussinesq	Damy
5	774.70	773.06

10	663.46	656.76
15	517.16	507.26
20	390.40	380.18
25	295.59	286.40
30	227.57	219.72
35	178.78	172.20
40	143.29	137.77
50	97.01	93.06
60	69.54	66.62
70	52.10	49.87
80	40.41	38.66
100	26.26	25.11

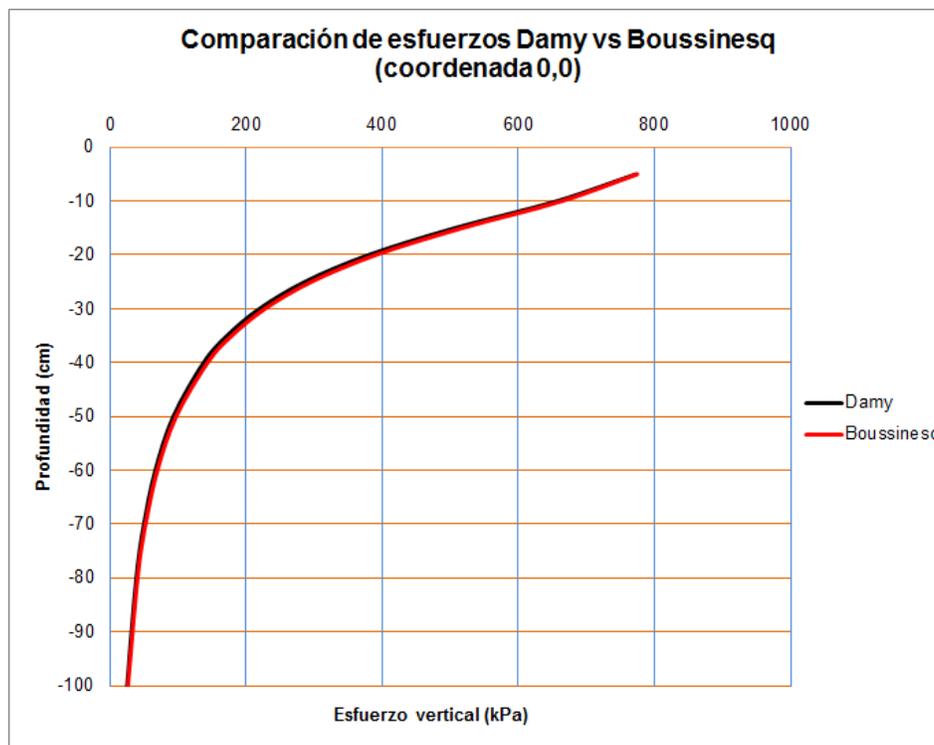


Figura 8.10 Comparativa entre método de Boussinesq y método de Damy-Casales (continuación).

## 8.5 Foster y Ahlvin (1954)

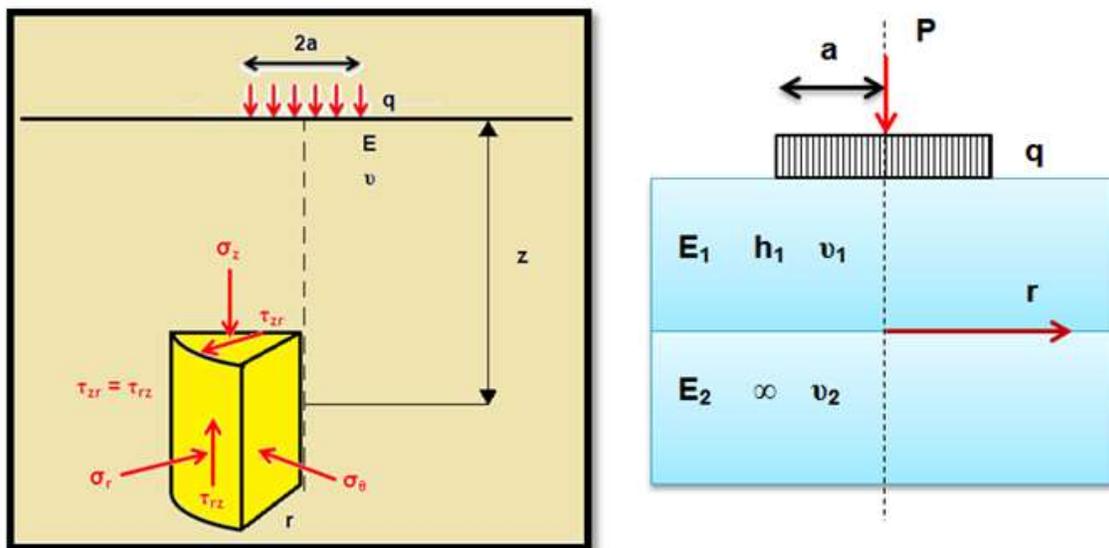
Derivados de los trabajos e investigaciones en la Waterways Experiment Station (WES) en Vicksburg, Mississippi, Foster y Ahlvin (1954) desarrollaron gráficos o familias de curvas para calcular los esfuerzos normales, radiales, tangenciales y

cortantes en un sistema de pavimento monocapa linealmente elástico y con relación de Poisson de 0.5. Ver **Figura 8.11**.

Estas soluciones gráficas permiten calcular dicha respuesta en el pavimento fuera del eje de simetría del área circular cargada ( $r/a$  diferente de cero).

Posteriormente Ahlvin y Ullery (1962) refinarían este trabajo presentando estas soluciones en forma tabular y con el empleo de “funciones” para calcular la respuesta del pavimento y para cualquier relación de Poisson.

Yoder y Witzak (1975) recomiendan su uso para suelos más o menos homogéneos como lo son las subrasantes de apoyo donde las relaciones modulares sean igual a uno (condición de Boussinesq). Esta condición se justifica en el hecho de que el pavimento flexible no puede considerarse como un cuerpo totalmente homogéneo e isotrópico, condición idealizada del método que se está presentando.



**Figura 8.11 Respuesta de un pavimento monocapa (Huang, 1993).**

Fuente: Elaboración propia.

A continuación se muestran las soluciones gráficas de Foster y Ahlvin para esfuerzos normales, esfuerzos radiales, esfuerzos cortantes y factores de deflexión para el sistema monocapa descrito con anterioridad. Ver **Figura 8.12**, **Figura 8.13**, **Figura 8.14** y **Figura 8.15**.

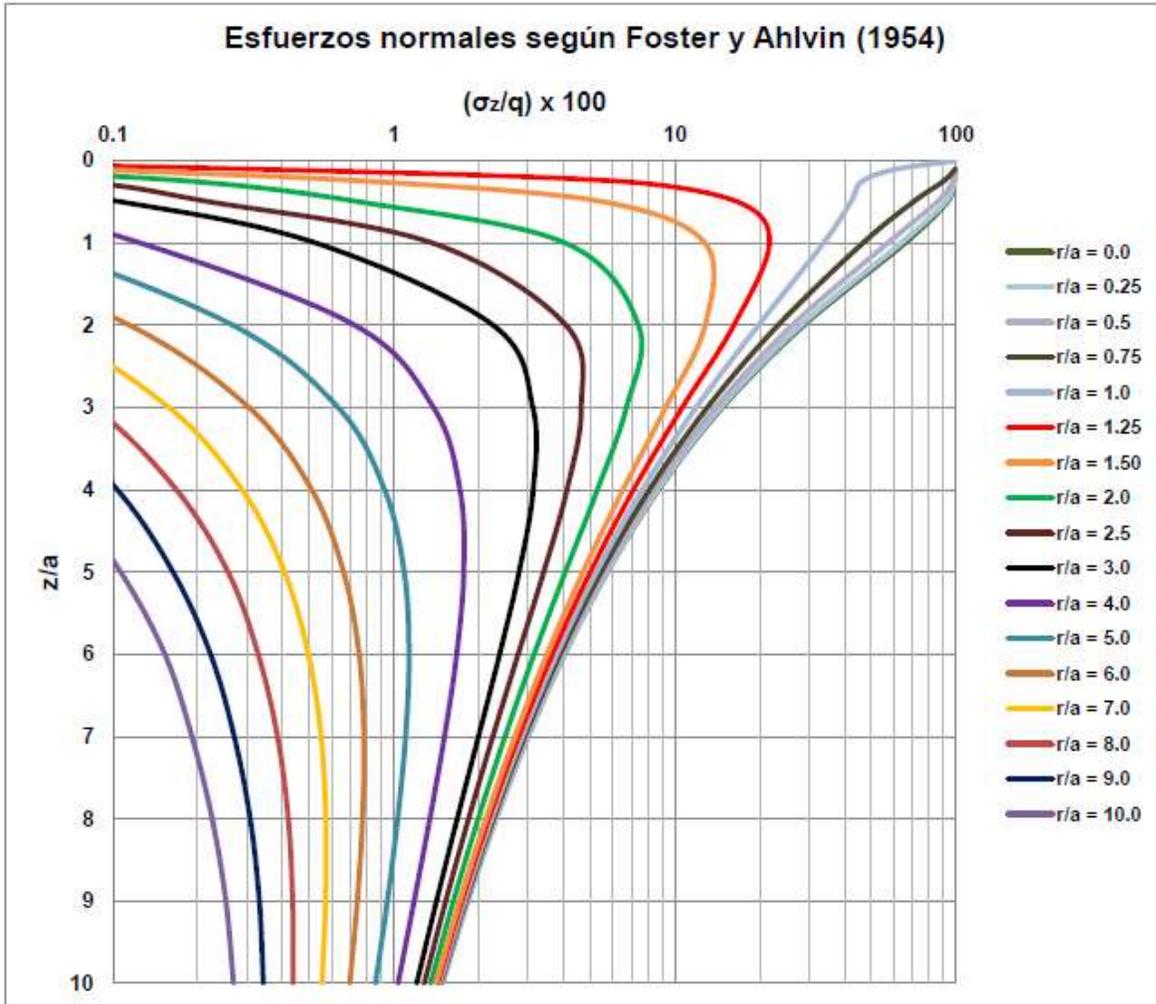
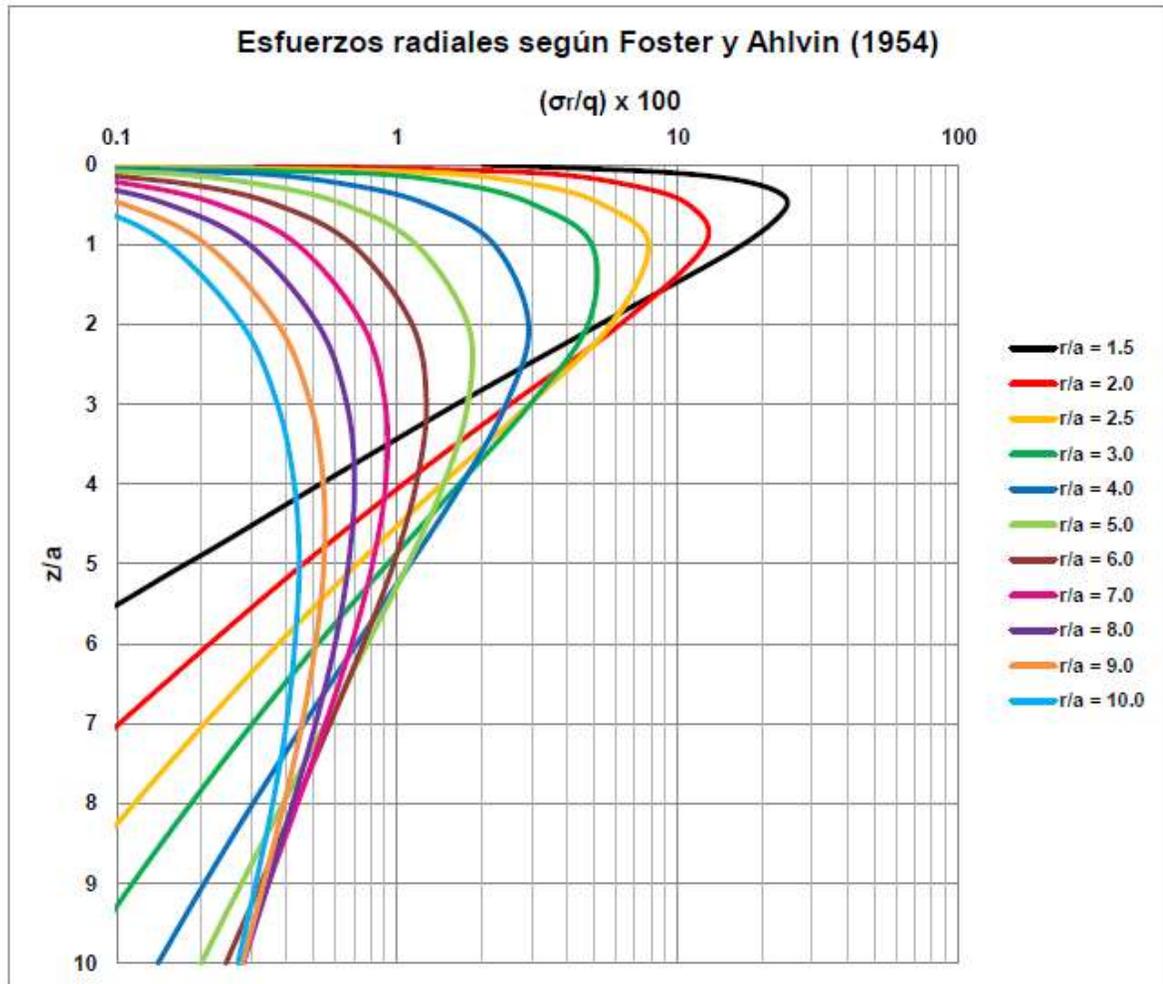


Figura 8.12 Esfuerzos normales según Foster y Ahlvin (1954).

Fuente: Elaboración propia.



**Figura 8.13 Esfuerzos radiales según Foster y Ahlvin (1954).**

Fuente: Elaboración propia.

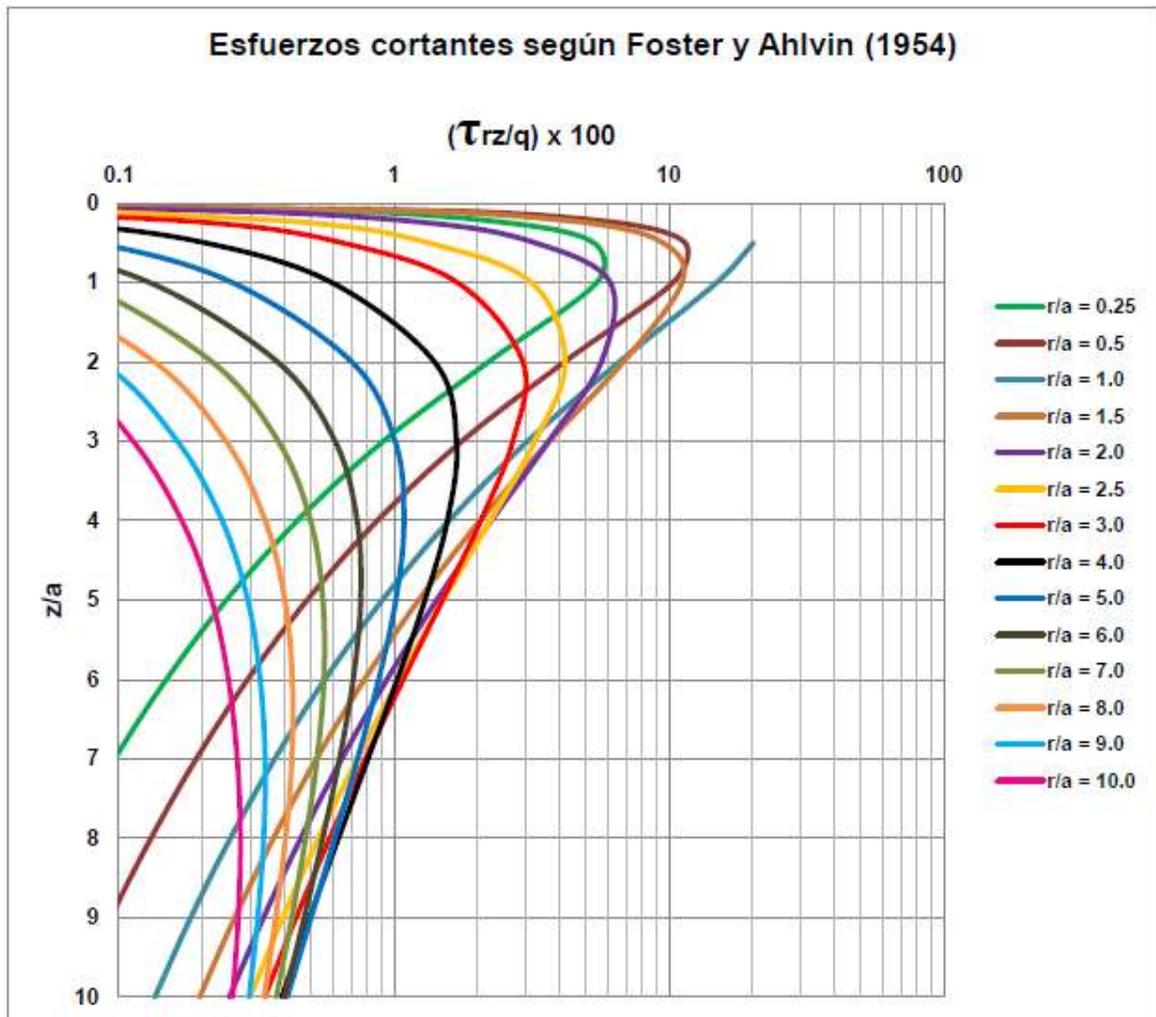
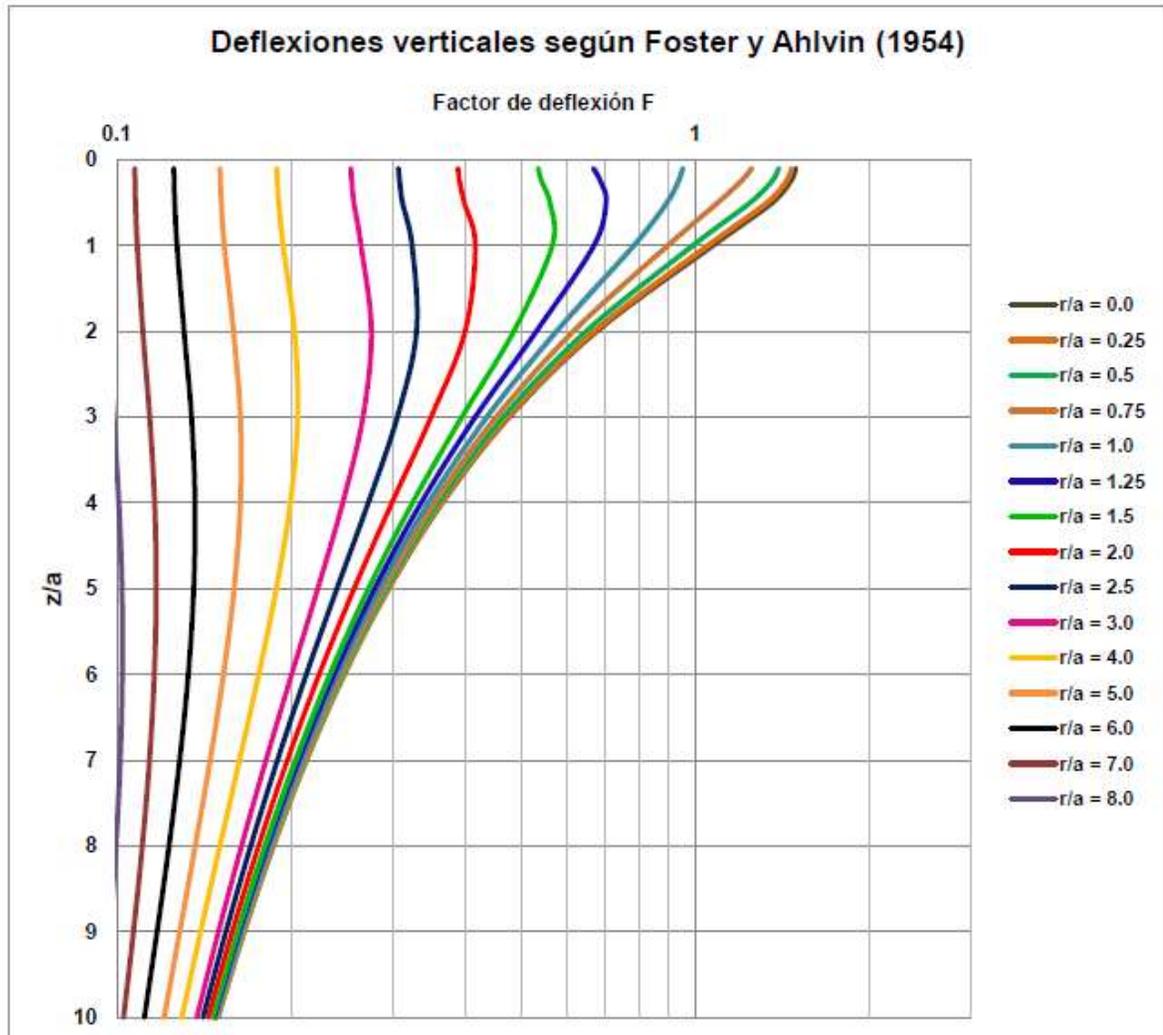


Figura 8.14 Esfuerzos cortantes según Foster y Ahlvin (1954).

Fuente: Elaboración propia.



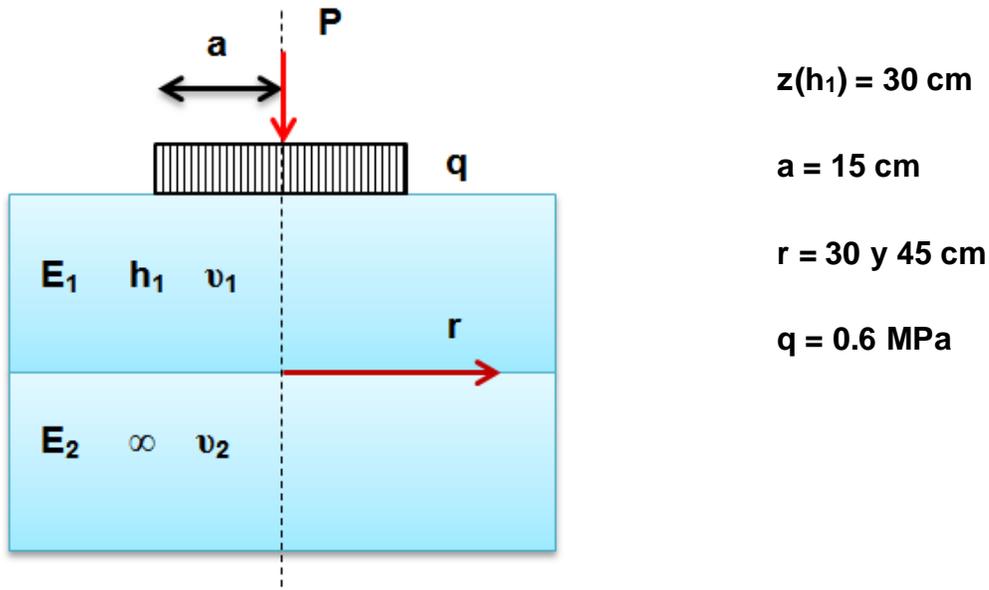
**Figura 8.15 Factores de deflexión según Foster y Ahlvin (1954).**

Fuente: Elaboración propia.

Una vez encontrados los esfuerzos se obtienen las deformaciones unitarias mediante las ecuaciones (32), (33) y (34), mostradas con anterioridad.

## Ejemplo 2.- Foster y Ahlvin

Utilizando las soluciones de Foster y Ahlvin (1954) encontrar el esfuerzo normal, el esfuerzo radial y el esfuerzo cortante del siguiente sistema homogéneo analizado en dos capas.



### Solución:

Se calcula inicialmente la relación  $z/a = 30/15 = 2.0$

- Para  $r = 30 \text{ cm}$  se tiene:

$$z/a = 30/15 = 2.0$$

De la Figura 8.12 se intercepta la parte superior ( $\sigma_z/q \times 100$ ) dando un valor de 7.5.

Por lo tanto el esfuerzo normal vale:

$$\sigma_z = (0.6 \text{ MPa}/100) (7.5) = 0.045 \text{ MPa.}$$

De la **Figura 8.13** se intercepta la parte superior ( $\sigma_r/q \times 100$ ) dando un valor de 6.5.

Por lo tanto el esfuerzo radial vale:

$$\sigma_r = (0.6 \text{ MPa}/100) (6.5) = 0.039 \text{ MPa.}$$

De la Figura 8.14 se intercepta la parte superior ( $\tau_{rz}/q \times 100$ ) dando un valor de 5.9.

Por lo tanto el esfuerzo cortante vale:

$$\tau_{rz}=(0.6 \text{ MPa}/100) (5.9) = 0.035 \text{ MPa.}$$

- Para  $r = 45 \text{ cm}$  se tiene:

$$z/a = 45/15 = 3.0$$

De la Figura 8.12 se intercepta la parte superior ( $\sigma_z/q \times 100$ ) dando un valor de 2.4.

Por lo tanto el esfuerzo normal vale:

$$\sigma_z=(0.6 \text{ MPa}/100) (2.4) = 0.014 \text{ MPa.}$$

De la **Figura 8.13** se intercepta la parte superior ( $\sigma_r/q \times 100$ ) dando un valor de 4.8.

Por lo tanto el esfuerzo radial vale:

$$\sigma_r=(0.6 \text{ MPa}/100) (4.8) = 0.028 \text{ MPa.}$$

De la Figura 8.14 se intercepta la parte superior ( $\tau_{rz}/q \times 100$ ) dando un valor de 3.0.

Por lo tanto el esfuerzo cortante vale:

$$\tau_{rz}=(0.6 \text{ MPa}/100) (3.0) = 0.018 \text{ MPa.}$$

## 8.6 Ahlvin y Ulery (1962)

Foster y Ahlvin (1954) desarrollaron gráficos o familias de curvas para calcular los esfuerzos normales, radiales, tangenciales y cortantes en un sistema de pavimento monocapa linealmente elástico y con relación de Poisson de 0.5. Esta última característica limita el empleo de dichos gráficos.

Ahlvin y Ulery (1962) refinaron este trabajo presentando estas soluciones en forma tabular y con el empleo de "funciones" para calcular la respuesta del pavimento con diferentes relaciones de Poisson. Esta fue sin duda, la gran aportación de este método. Ver Figura 8.16.

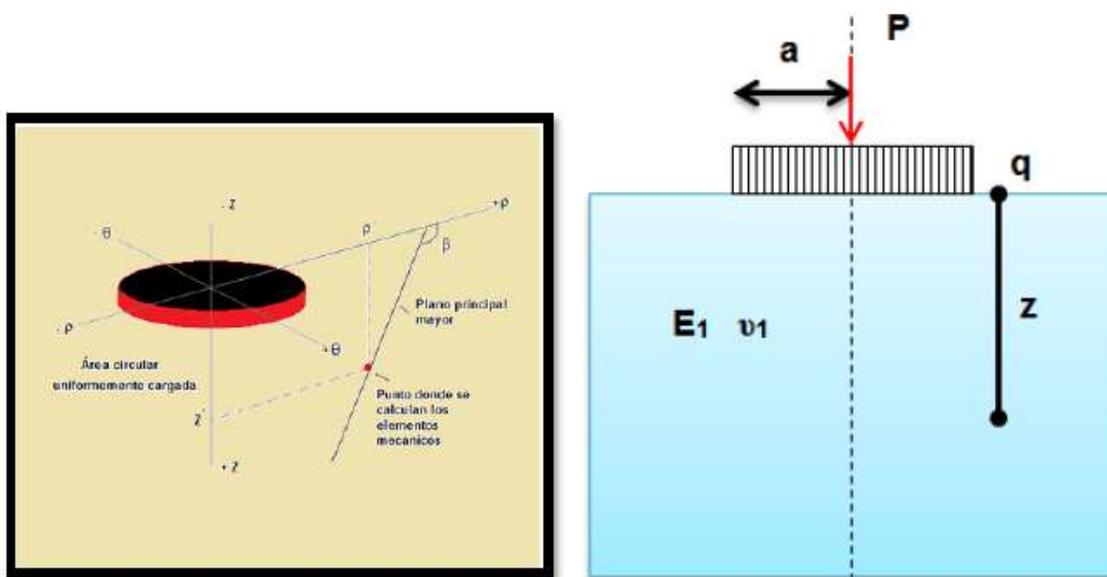


Figura 8.16 Respuesta de un pavimento monocapa (Ahlin-Ullery 1962).

Fuente: Elaboración propia.

Las tablas mostradas fueron desarrolladas para valores de  $z/a$  de 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 1.2, 1.5, 2, 2.5, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10, y para valores de  $r/a$  de 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.5, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12 y 14.

Para calcular la respuesta se tienen 8 funciones combinadas mismas que se definen a continuación. Ver ecuaciones (42), (43), (44), (45), (46), (47), (48), (49), (50), (51), (52), (53) y (54).

$$\theta = 2p(1 + \nu)A = \sigma_z + \sigma_p + \sigma_\theta = e \frac{E_m}{(1 - 2\nu)} \quad (42)$$

$$\sigma_z = p[A + B] \quad (43)$$

$$\sigma_p = p[2\nu A + C + (1 - 2\nu)F] \quad (44)$$

$$\sigma_\theta = p[2\nu A - D + (1 - 2\nu)E] \quad (45)$$

$$\tau_{\rho z} = \tau_{z\rho} = pG \quad (46)$$

$$e = p \frac{2(1+v)}{E_m} (1-2v)A = \varepsilon_z + \varepsilon_p + \varepsilon_\theta = \theta \frac{(1-2v)}{E_m} \quad (47)$$

$$\varepsilon_z = p \frac{(1+v)}{E_m} [(1-2v)A + B] \quad (48)$$

$$\varepsilon_p = p \frac{(1+v)}{E_m} [(1-2v)F + C] \quad (49)$$

$$\varepsilon_\theta = p \frac{(1+v)}{E_m} [(1-2v)E - D] \quad (50)$$

$$\gamma_{\rho z} = \gamma_{z\rho} = p \frac{2(1+v)}{E_m} G = \frac{2(1+v)}{E_m} \tau_{\rho z} \quad (51)$$

$$\omega_z = p \frac{(1+v)}{E_m} r[zA + (1-v)H] \quad (52)$$

$$\omega_p = p \frac{(1+v)}{E_m} (-\rho r)[(1-2v)E - D] = -\rho r \varepsilon_\theta \quad (53)$$

$$\omega_\theta = 0 \quad (54)$$

Donde:

$\theta$  = *Esfuerzo volumétrico*

$\sigma_z$  = *Esfuerzo vertical*

$\sigma_p$  = *Esfuerzo horizontal radial*

$\sigma_\theta$  = *Esfuerzo horizontal tangencial*

$\tau_{pz}$  = *Esfuerzo cortante*

$e$  = *Deformación volumétrica*

$\varepsilon_z$  = *Deformación vertical*

$\varepsilon_p$  = *Deformación horizontal radial*

$\varepsilon_\theta$  = *Deformación horizontal tangencial*

$\gamma_{pz}$  = *Deformación cortante*

$\omega_z$  = *Deflexión vertical*

$\omega_p$  = *Deflexión horizontal radial*

$\omega_\theta$  = *Deflexión horizontal tangencial*

$p$  = *Presión de contacto*

$\nu$  = *Relación de poisson*

$E_m$  = *Módulo de elasticidad*

De las fórmulas anteriores puede concluirse respecto a las soluciones de Foster y Ahlvin (1954):

- a) Las deformaciones disminuyen al momento de aumentar el módulo elástico del medio considerado, y aumentan al disminuir el mismo módulo elástico.
- b) Las deformaciones son proporcionales a las presiones de inflado consideradas.
- c) Solamente los esfuerzos normales ( $\sigma_z$ ) y los esfuerzos cortantes ( $\tau_{rz}$ ) son totalmente independientes de las relaciones de Poisson. Por tal motivo dichas respuestas pueden ser obtenidas por cualquiera de los dos métodos (Foster y Ahlvin o Ahlvin-Ulery).
- d) Las fórmulas para calcular las deformaciones unitarias y las deflexiones, parten de las fórmulas de la teoría de la elasticidad, solo que “transformadas” a los valores de las funciones expresadas en este método.

La desventaja notoria de este método es el caso de tener que interpolar valores que no se encuentran en las tablas. Por ejemplo  $r/a = 1.25$  no se encuentra en las tablas por lo que hay que interpolar valores entre  $r/a = 1.25$  y  $r/a = 1.5$ , lo cual se vuelve impráctico.

**En la**



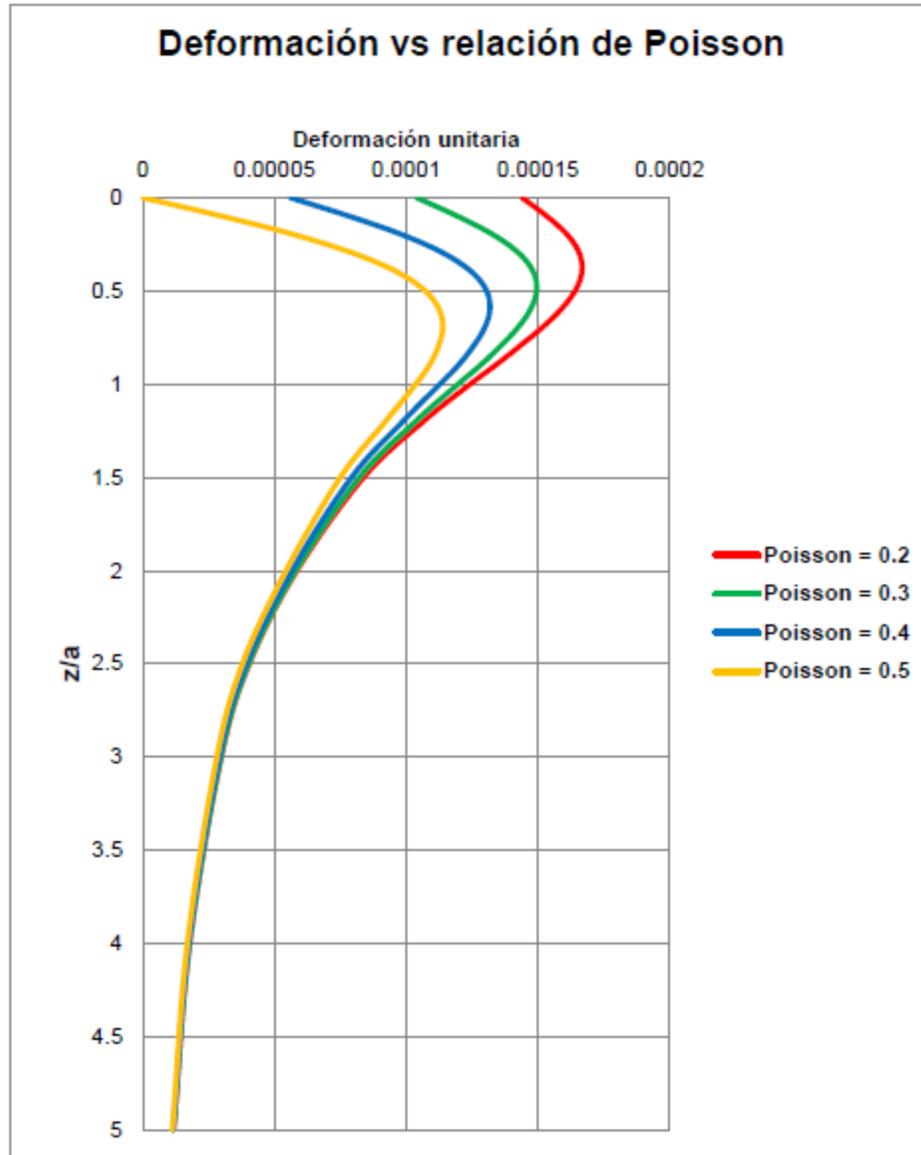
**Anexo 2.** Tablas de Ahlvin y Ulery

**Tabla 0.1,**

**Tabla 0.2,** ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia., ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia., ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia., ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia., ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia. **y ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia. de los anexos de este documento se encuentran los valores recomendados por Ahlvin y Ulery.**

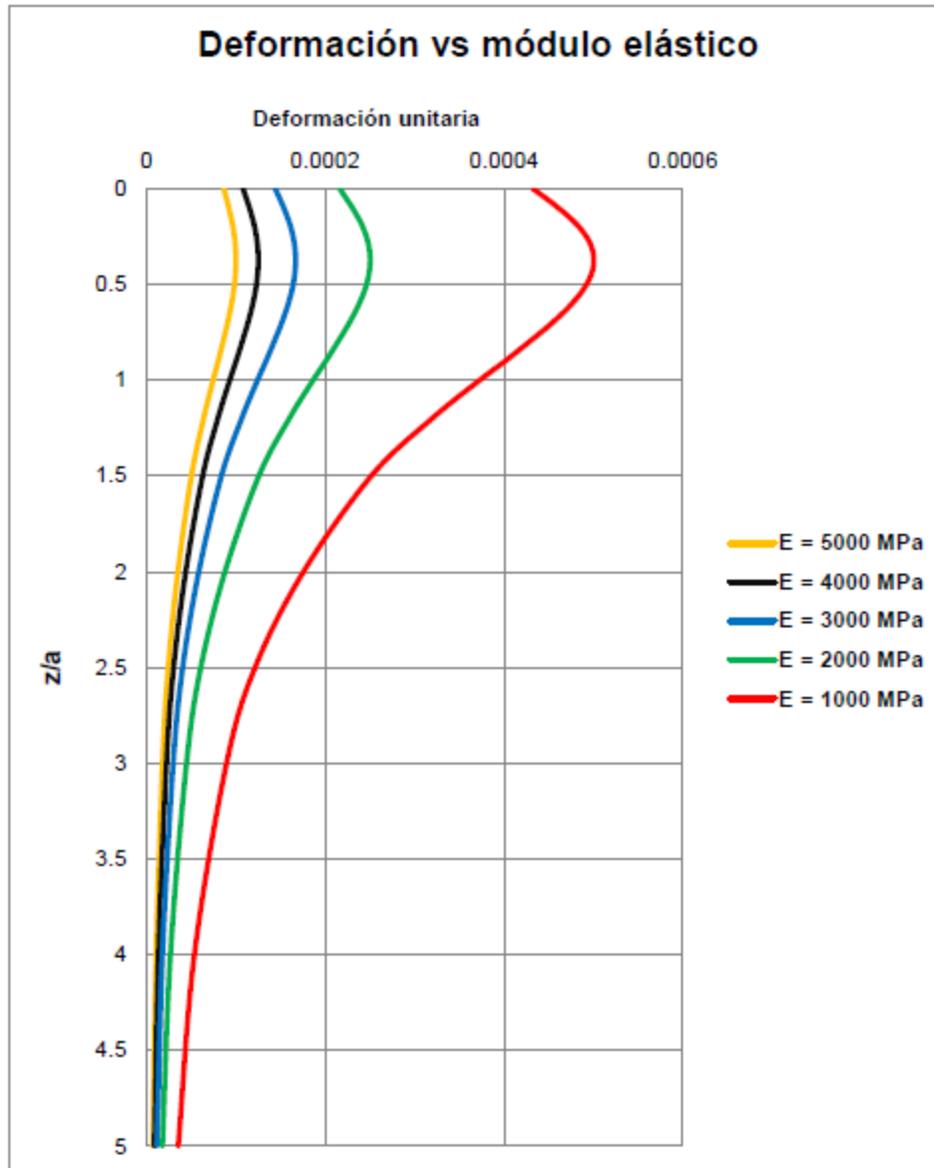
Haciendo un ejercicio práctico de las soluciones por medio de las funciones de Ahlvin y Ulery (ver

Figura 8.17, Figura 8.18 y Figura 8.19) se pueden apreciar gráficos como los desarrollados por Foster y Ahlvin en 1954. Como se ha comentado, las soluciones de este método se emplean para medios homogéneos para cualquier relación de Poisson, relación que en el método de 1954 se limitaba a solamente un valor de 0.5.



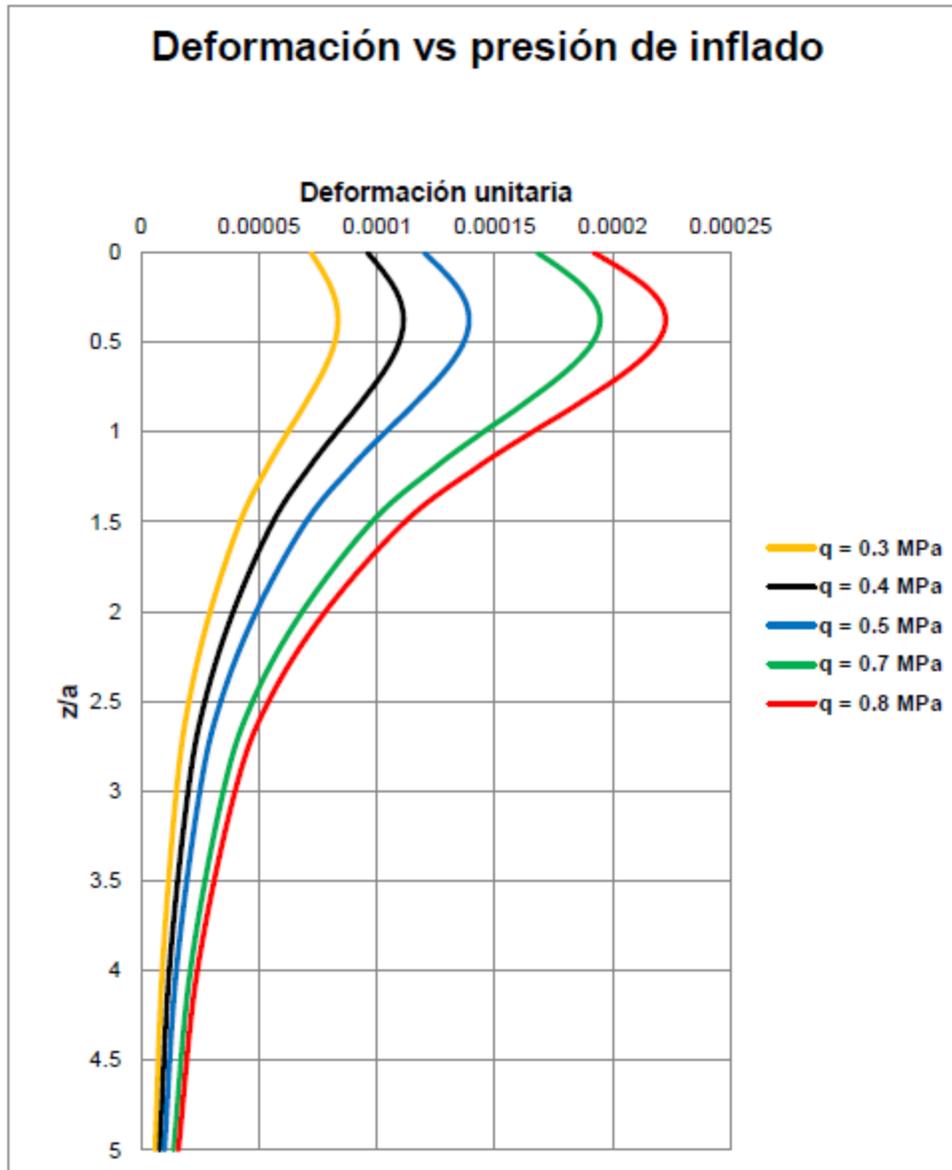
**Figura 8.17 Deformación unitaria vs relación de Poisson mediante las funciones de Ahlvin y Ulery (1962).**

Fuente: Elaboración propia.



**Figura 8.18 Deformación unitaria vs módulo elástico mediante las funciones de Ahlvin y Ulery (1962).**

Fuente: Elaboración propia.

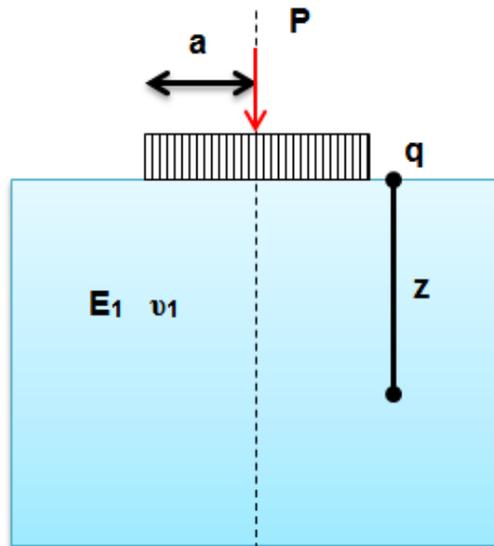


**Figura 8.19 Deformación unitaria vs presión de inflado mediante las funciones de Ahlvin y Ulery (1962).**

Fuente: Elaboración propia.

### Ejemplo 3.- Ahlvin y Ulery

Utilizando las soluciones tabulares (funciones) de Ahlvin y Ulery (1962) encontrar el esfuerzo normal, el esfuerzo radial, el esfuerzo tangencial, la deformación vertical, la deformación radial, la deformación tangencial y el esfuerzo cortante máximo del siguiente sistema homogéneo.



$$z = 30 \text{ cm}$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$r = 0 \text{ cm (eje de simetría)}$$

$$E_1 = 50 \text{ MPa}$$

$$\nu_1 = 0.50$$

$$q = 0.60 \text{ MPa}$$

#### Solución:

$$r/a = 0/15 = 0$$

$$z/a = 30/15 = 2$$

De la

## Anexo 2. Tablas de Ahlvin y Ulery

Tabla 0.1 a la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** de los anexos de este documento se obtienen los valores de las funciones A, B, C, D, E, F, G y H.

$$\text{Función A} = 0.10557$$

$$\text{Función B} = 0.17880$$

$$\text{Función C} = -0.08944$$

$$\text{Función D} = 0.08944$$

$$\text{Función E} = 0.05279$$

$$\text{Función F} = 0.05279$$

$$\text{Función G} = 0.00000$$

$$\text{Función H} = 0.47214$$

Sustituyendo los valores de las funciones en las ecuaciones respectivas del método, tenemos lo siguiente:

$$\theta = 2p(1 + \nu)A = 2(0.6)(1 + 0.5)(0.10557) = \mathbf{0.190 MPa}$$

$$\sigma_x = p[A + B] = (0.6)(0.10557 + 0.1788) = \mathbf{0.170 MPa}$$

$$\begin{aligned}\sigma_p &= p[2\nu A + C + (1 - 2\nu)F] \\ &= 0.6[(2)(0.5)(0.10557) - 0.08944 + (1 - 2(0.5))(0.05279)]\end{aligned}$$

$$\sigma_p = 0.6[0.10557 - 0.08944] = \mathbf{0.0096 MPa}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= p[2\nu A - D + (1 - 2\nu)E] \\ &= (0.6)[2(0.5)(0.10557) - 0.08944 + (1 - 2(0.5))(0.05279)]\end{aligned}$$

$$\sigma_\theta = (0.6)[0.10557 - 0.08944] = \mathbf{0.0096 MPa}$$

$$\tau_{\rho z} = \tau_{z\rho} = pG = 0.6(0.00000) = \mathbf{0.0 MPa}$$

$$e = p \frac{2(1 + \nu)}{E_m} (1 - 2\nu)A = (0.6) \frac{2(1 + 0.5)}{(50)} (1 - 2(0.5))0.10557 = \mathbf{0.0}$$

$$\varepsilon_z = p \frac{(1 + \nu)}{E_m} [(1 - 2\nu)A + B] = (0.6) \frac{(1 + 0.5)}{50} [(1 - 2(0.5))0.10557 + 0.17880]$$

$$\varepsilon_z = (0.6) \frac{(1 + 0.5)}{50} [0.17880] = 0.00321 = \mathbf{321 \text{ micras}}$$

$$\varepsilon_\rho = p \frac{(1 + \nu)}{E_m} [(1 - 2\nu)F + C] = (0.6) \frac{(1 + 0.5)}{50} [(1 - 2(0.5))0.05279 - 0.08944]$$

$$\varepsilon_\rho = (0.6) \frac{(1 + 0.5)}{50} [-0.08944] = 0.00160 = \mathbf{160 \text{ micras}}$$

$$\varepsilon_\theta = p \frac{(1 + \nu)}{E_m} [(1 - 2\nu)E - D] = (0.6) \frac{(1 + 0.5)}{50} [(1 - 2(0.5))0.05279 - 0.08944]$$

$$\varepsilon_\theta = (0.6) \frac{(1 + 0.5)}{50} [-0.08944] = 0.00160 = \mathbf{160 \text{ micras}}$$

$$\gamma_{\rho z} = \gamma_{z\rho} = p \frac{2(1 + \nu)}{E_m} G = (0.6) \frac{2(1 + 0.5)}{50} (0.0) = \mathbf{0.0}$$

$$\begin{aligned} \omega_z &= p \frac{(1 + \nu)}{E_m} r[zA + (1 - \nu)H] \\ &= 0.6 \frac{(1 + 0.5)}{50} (0.0)[(30) 0.10557 + (1 - 0.5)0.47214] \end{aligned}$$

$$\omega_z = 0.6 \frac{(1 + 0.5)}{50} (0.0)[(30)0.10557 + (1 - 0.5)0.47214] = \mathbf{0.0}$$

$$\omega_\rho = -\rho r \varepsilon_\theta = -(0.6)(0)(0.00160) = \mathbf{0.0}$$

$$\omega_\theta = \mathbf{0.0}$$

## 9 Sistemas estructurales de 2 capas (Bicapa)

Las hipótesis de cálculo para sistemas de dos capas son las siguientes:

- El material de cada capa es homogéneo, isotrópico y linealmente elástico.
- La primera capa tiene un espesor finito.
- Las capas se entienden infinitamente en dirección horizontal.
- Las capas se caracterizan por el módulo de elasticidad y la relación de Poisson.
- Se desarrolla fricción en la interface de las capas.

### 9.1 Burmister (1943)

Burmister estudió el problema de la distribución de esfuerzos y desplazamientos en un sistema de dos capas donde cada capa tiene un comportamiento homogéneo, isótropo y linealmente elástico (ver Figura 9.1). La primera capa es infinita horizontalmente, pero tiene espesor finito  $h$ . La segunda capa, subyacente a la anterior es infinita. Se supone que entre las dos capas existe un contacto continuo, siendo la frontera plana entre ellas perfectamente rugosa.  $E_1$  y  $E_2$  son los módulos de elasticidad de las dos capas; se estudió el caso de interés práctico, con aplicación al diseño de pavimentos, en el cual  $E_1 > E_2$ .

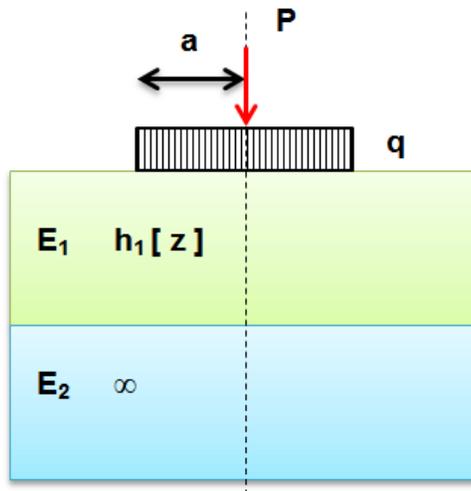
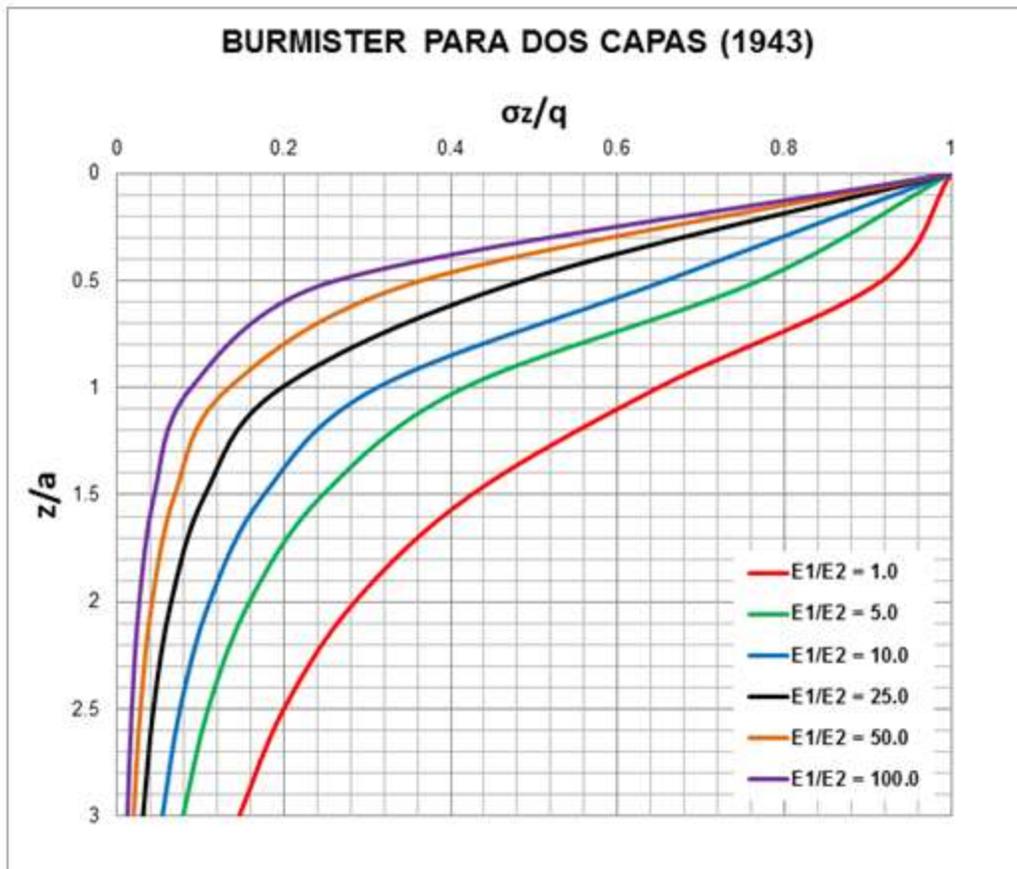


Figura 9.1 Esquema bicapa para las soluciones numéricas de Burmister.

En la Figura 9.2 se muestran las curvas de influencia de la carga superficial, supuesta circular y uniformemente distribuida, en lo referente a los esfuerzos

verticales bajo el centro del área cargada, suponiendo que el radio del círculo de carga es igual al espesor de la primera capa. Las curvas mostradas se refieren a distintas relaciones  $E_1/E_2$  en materiales cuya relación de Poisson se fijó en el valor de 0.5 para ambas capas.

Puede notarse que en la frontera y para el caso  $E_1/E_2=1$ , que corresponde al problema de Boussinesq ya tratado, el esfuerzo vertical es el 70% de la presión aplicada en la superficie en tanto que si  $E_1/E_2$  se considera de 100, dicho valor se reduce a sólo un 10% de la presión superficial.

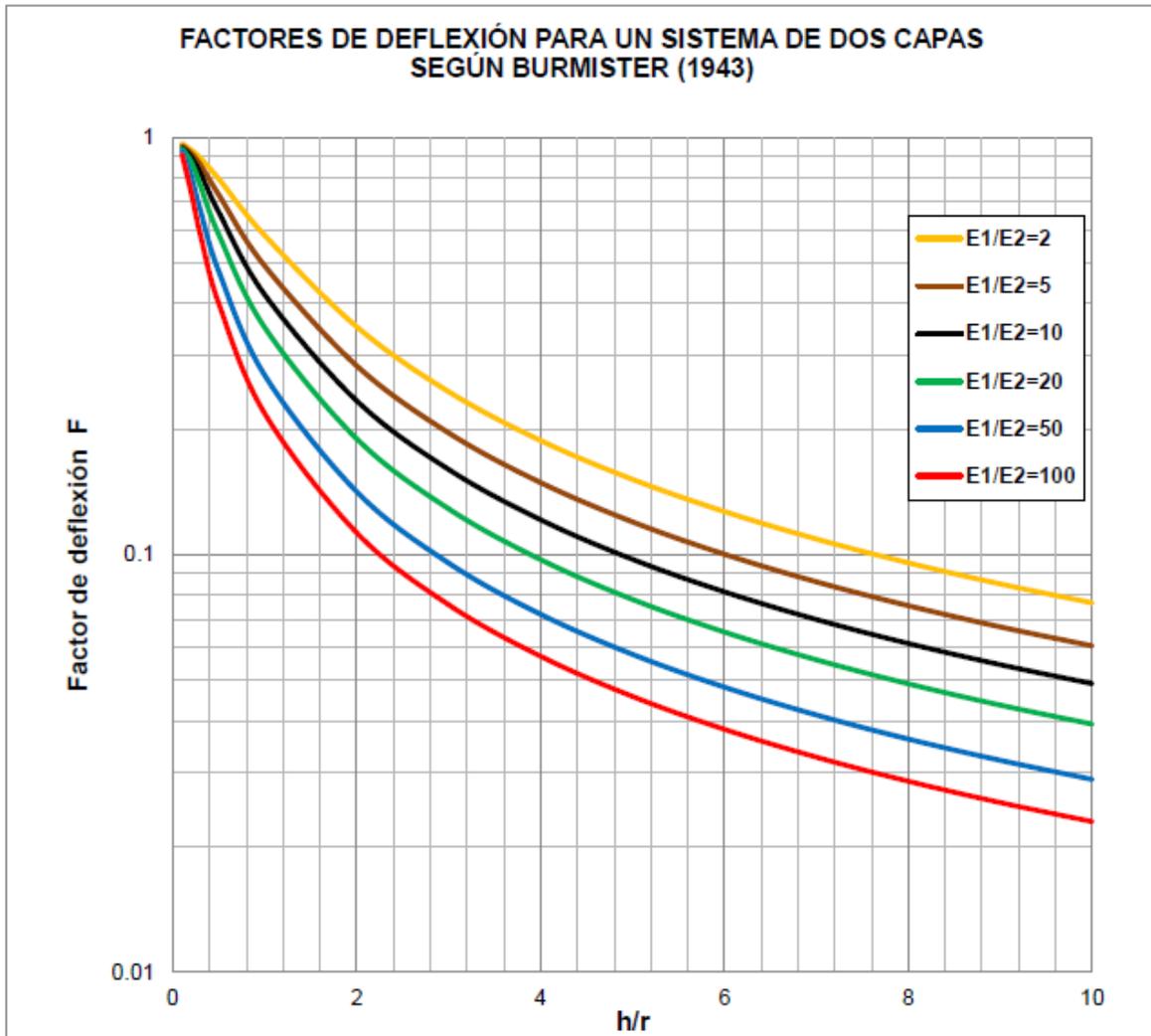


**Figura 9.2 Distribución de esfuerzos para un sistema de dos capas según Burmister (1943).**

Fuente: Elaboración propia.

En los anexos de este documento se encuentra la resolución matemática de la ecuación diferencial para sistemas multicapa analizada y resuelta por Burmister en 1943.

La Figura 9.3 muestra los factores de deflexión recomendados por Burmister para sistemas de dos capas y para diferentes relaciones modulares  $E_1/E_2$  y  $h/r$ .

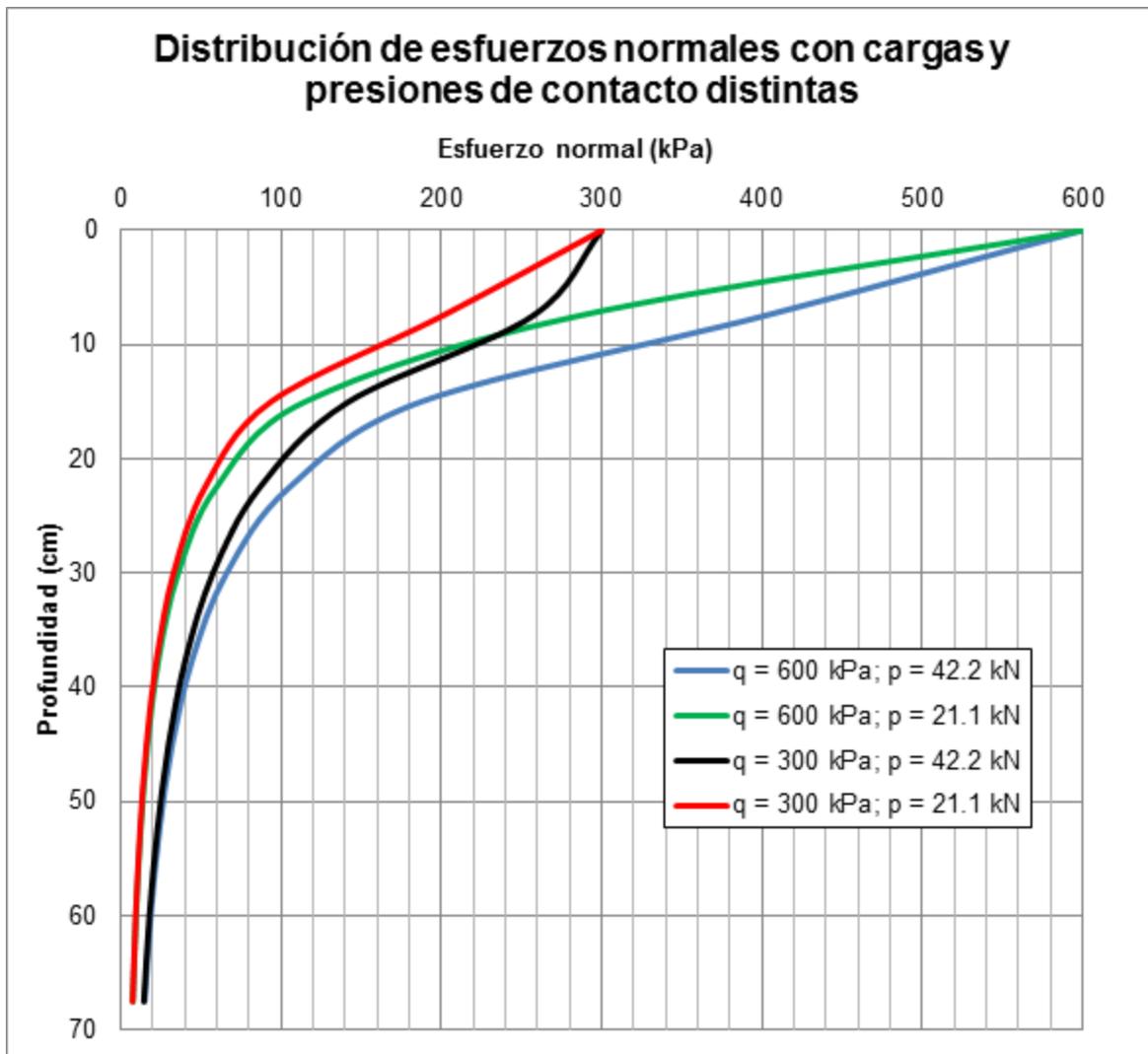


**Figura 9.3 Factores de deflexión para un sistema de dos capas según Burmister (1943).**

Fuente: Elaboración propia.

Los factores de deflexión para pavimentos bicapa fueron utilizados en la década de los 60's por el Cuerpo de Ingenieros del Ejército de los Estados Unidos (USACE) para encontrar las cargas equivalentes de tránsito.

En la Figura 9.4 se muestra la distribución de esfuerzos normales para distintos pesos y presiones de inflado. Para las cuatro condiciones de esfuerzo, puede apreciarse una variación a nivel superficial derivado de las áreas efectivas de distribución de esfuerzos. Por ejemplo para una profundidad "z" de 10 cm, la línea roja tiene un esfuerzo normal de 160 kPa, la línea azul de 320 kPa y las líneas negra y verde que se interceptan tienen un valor de 220 kPa. A medida que se incrementa la profundidad la variación de distribución entre ellas disminuye, tendiendo todas a cero.

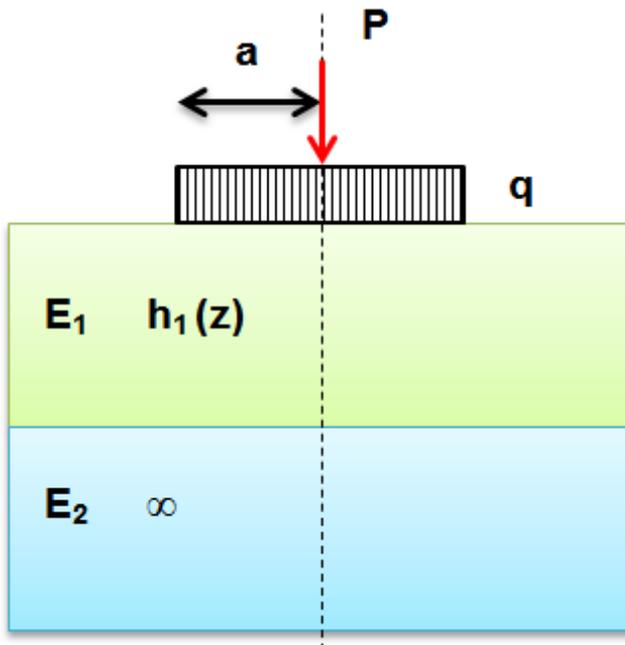


**Figura 9.4 Distribución de esfuerzos normales con distintas presiones de inflado y pesos de ejes.**

Fuente: Elaboración propia.

## Ejemplo 4.- Burmister

Determinar los esfuerzos normales en la interface de las dos capas para el siguiente sistema mediante la solución gráfica de Burmister (1943), tomando el siguiente esquema



$$E_1 = 2,500 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 500 \text{ MPa}$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$h_1(z) = 30 \text{ cm}$$

$$q = 0.6 \text{ MPa}$$

**Solución:**

Se calcula la relación modular de las dos capas.  $E_1/E_2 = 2,500 \text{ MPa}/500 \text{ MPa} = 5.0$ . Ahora se calcula la relación  $z/a$ , obteniendo  $30/15 = 2.0$ . De la Figura 9.3 se tiene:

$$\sigma_z/q = \text{Intercepción}$$

Esta intercepción se obtiene utilizando la línea correspondiente a la relación modular y a la relación  $z/a$ . Se obtiene entonces 0.16.

$$\text{Así el esfuerzo normal valdrá } (0.6 \text{ MPa}) (0.16) = 0.096 \text{ MPa}$$

Dado que la adherencia entre las diferentes capas que constituyen un firme es uno de los factores que más influye en su respuesta ante la aplicación de las cargas, deberá garantizarse, tomando las medidas que se consideren necesarias durante la fase de proyecto y en la obra, que se produce en todos los casos el mayor

grado posible de adherencia entre todas las capas. A efectos de cálculo, se consideran tres situaciones posibles para cada interfaz:

- Adherencia total.- No hay deslizamiento relativo entre ambas capas, de modo que los desplazamientos y deformaciones en la interfaz son iguales en ambas capas, apareciendo los correspondientes esfuerzos tangenciales.
- Adherencia parcial.- Hay un deslizamiento relativo limitado entre ambas capas, de modo que los desplazamientos y deformaciones en la interfaz no son iguales en ambas capas, pero existen esfuerzos tangenciales.
- Adherencia nula.- Hay un deslizamiento relativo total entre ambas capas, de modo que los desplazamientos y deformaciones en la interfaz no son iguales en ambas capas y no existen esfuerzos tangenciales.

## 9.2 Fox (1948)

Fox (1948) desarrolló soluciones tabulares y gráficas para obtener la respuesta mecánica en pavimentos flexibles de dos capas (ver Figura 9.5), tomando como punto de partida los trabajos desarrollados por Burmister (1943). Los trabajos de Fox se centraron en encontrar los esfuerzos normales y radiales en el eje de simetría y fuera de él por debajo del área circular cargada, justo en la interface de las dos capas, considerando adherencia y no adherencia total entre ellas.

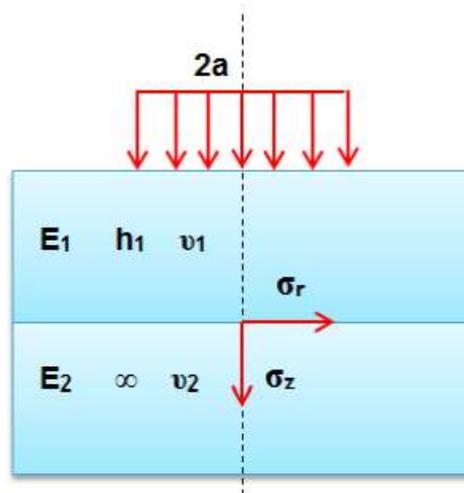


Figura 9.5 Modelo bicapa de Fox (1948).

Fuente: Elaboración propia.

A través de las soluciones de las ecuaciones diferenciales de Burmister, Fox obtuvo los valores para relaciones modulares  $E_1/E_2$  de valores de 1 (condición de Boussinesq) hasta 1000 y de relaciones  $a/h$  de 0.5 a 4. Cabe decir que para ambas capas tomó un mismo valor de relación de Poisson de 0.5. Después de los

análisis numéricos respectivos, Fox obtiene los siguientes valores tabulares para condiciones de interface con adherencia y sin adherencia. Ver Tabla 9.1 y Tabla 9.2.

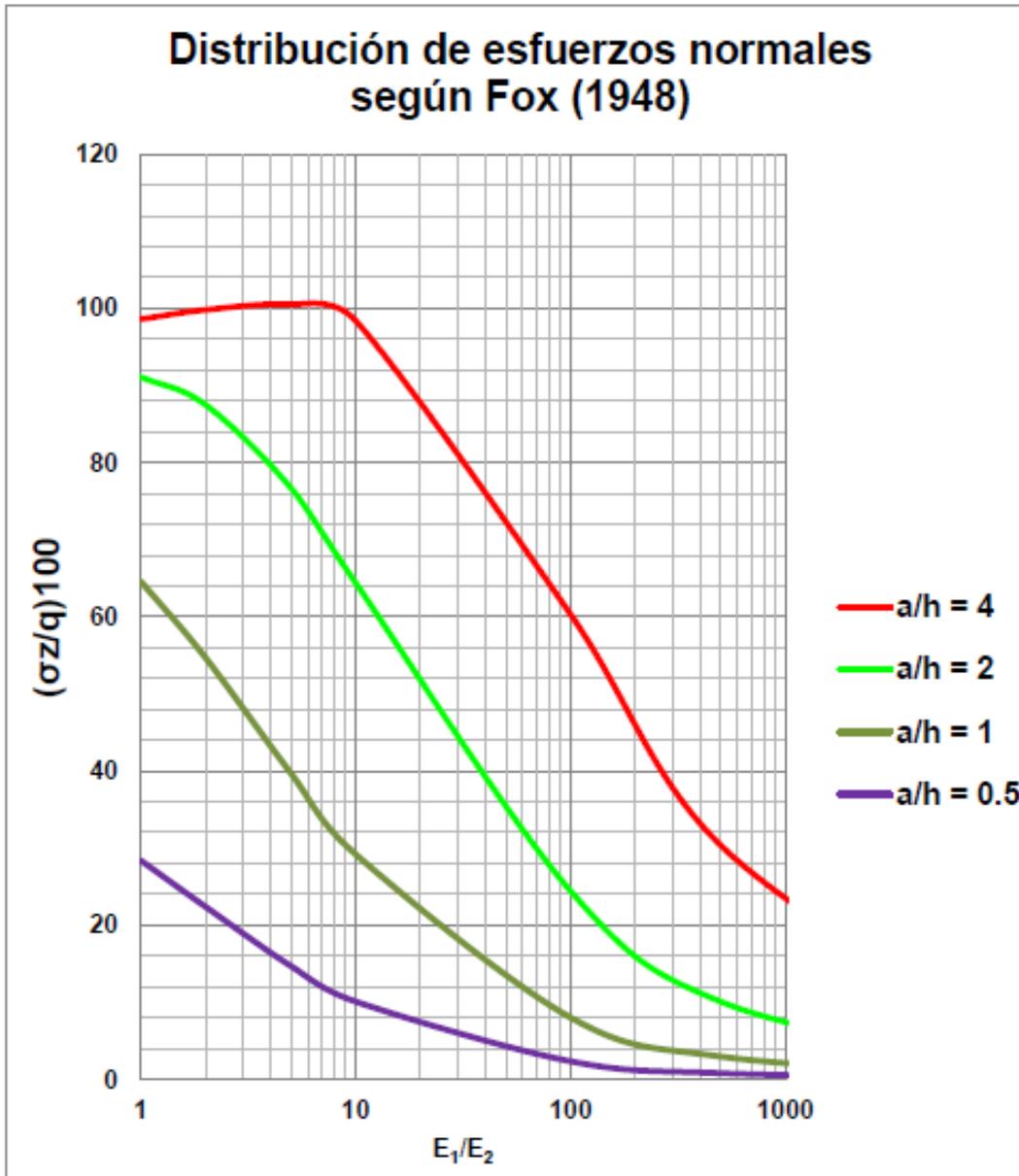
**Tabla 9.1 Valores de esfuerzos para capas adheridas según Fox (1948).**

$E_1/E_2$	$\frac{\sigma_z}{100}$				$\frac{\sigma_z - \sigma_r}{100}$			
	1	10	100	1000	1	10	100	1000
<b>Profundidad debajo de la interface <math>a/h = 1/2</math></b>								
0	28.400	10.100	2.380	0.510	26.800	7.600	1.260	0.160
h	8.700	4.700	1.580	0.420	8.600	3.930	1.020	0.185
2h	4.030	2.780	1.170	0.350	4.000	2.480	0.850	0.195
3h	2.300	1.840	0.910	0.310	2.290	1.700	0.710	0.190
4h	1.480	1.290	0.740	0.280	1.480	1.230	0.610	0.185
<b><math>a/h = 1</math></b>								
0	64.600	29.200	8.100	1.850	53.000	18.800	3.600	0.540
h	28.400	16.800	6.000	1.620	26.800	13.500	3.800	0.710
2h	14.500	10.500	4.600	1.430	14.100	9.200	3.300	0.790
3h	8.700	7.000	3.600	1.240	8.600	6.400	2.800	0.760
4h	5.700	5.000	2.900	1.100	5.600	4.700	2.400	0.730
<b><math>a/h = 2</math></b>								
0	91.100	64.400	24.600	7.100	53.700	30.400	8.400	1.500
h	64.600	48.000	20.500	6.060	53.000	34.600	11.800	2.520
2h	42.400	34.000	16.500	5.420	38.400	28.200	11.400	2.900
3h	28.400	24.400	13.300	4.800	26.800	21.500	10.200	2.920
4h	20.000	18.100	10.800	4.280	19.200	16.600	8.800	2.820

**Tabla 9.2 Valores de esfuerzos para capas no adheridas según Fox (1948).**

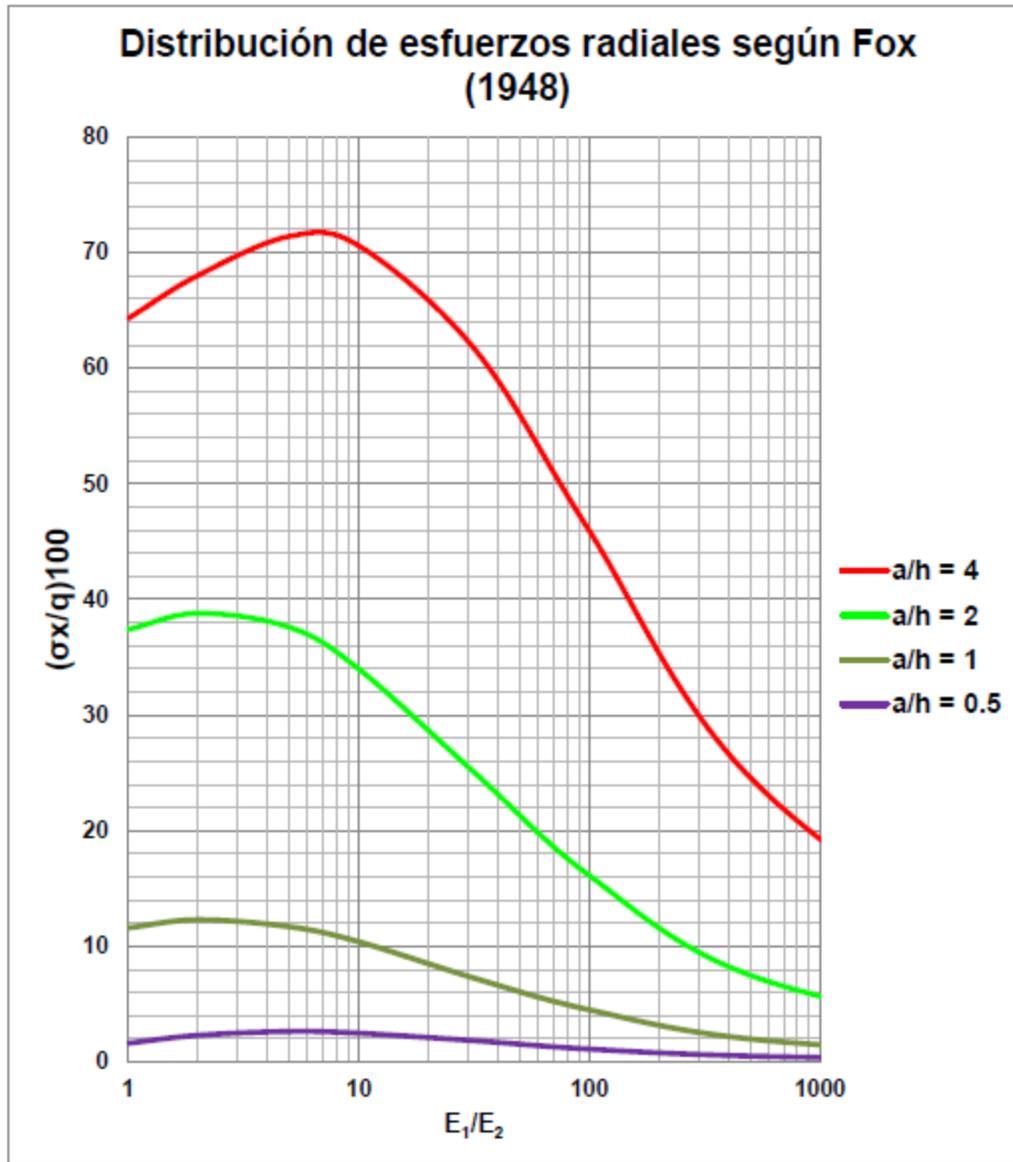
$E_1/E_2$	$\frac{\sigma_z}{100}$				$\frac{\sigma_z - \sigma_r}{100}$			
	1	10	100	1000	1	10	100	1000
<b>Profundidad debajo de la interface</b>								
<b>a/h = 1/2</b>								
0	31.000	10.500	2.410	0.510	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5 h					14.500	4.490		
h	14.100	6.300	1.830	0.450	11.500	4.320	0.960	0.160
2h	6.400	3.670	1.360	0.380	5.900	3.030	0.910	0.180
3h	3.460	2.350	1.050	0.330	3.320	2.080	0.790	0.190
4h	2.120	1.610	0.830	0.290	2.070	1.370	0.660	0.180
<b>a/h = 1</b>								
0	72.200	30.500	8.200	1.900	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5 h					34.200	12.700		
h	43.700	21.700	6.800	1.720	33.100	14.200	3.410	0.590
2h	22.500	13.600	5.250	1.510	20.200	11.000	3.470	0.740
3h	12.800	8.900	4.090	1.330	12.100	7.800	3.050	0.770
4h	8.100	6.200	3.260	1.170	7.800	5.700	2.610	0.750
<b>a/h = 2</b>								
0	102.500	67.700	24.900	6.700	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5 h					37.800	23.100		
h	86.900	57.600	22.500	6.300	52.600	32.000	9.900	1.960
2h	59.600	42.100	18.600	5.700	48.300	31.700	11.600	2.680
3h	39.600	30.200	15.000	5.100	35.300	25.400	10.900	2.860
4h	27.100	22.000	12.200	4.540	25.700	19.600	9.600	2.860

Algunos de los valores expuestos en estas tablas pueden llevarse a forma gráfica. Para muestra se desarrollan la distribución de esfuerzos normales y radiales para distintas condiciones de a/h cuando existe adherencia total entre capas. Ver Figura 9.6 y Figura 9.7 respectivamente.



**Figura 9.6 Distribución de esfuerzos normales para distintas condiciones de  $a/h$  (Fox, 1948).**

Fuente: Elaboración propia.



**Figura 9.7 Distribución de esfuerzos radiales para distintas condiciones de  $a/h$  (Fox, 1948).**

Fuente: Elaboración propia.

Los valores de Fox evidentemente responden a los resultados de los programas elásticos multicapas actuales como el BISAR, WINJULEA, KENPAVE, WESLEA, etc., que tienen incorporado las soluciones multicapa de Burmister que más adelante se comentarán en este documento.

Para mostrar lo anterior se llevaron a cabo corridas para corroborar algunos de los resultados tabulares de Fox y verificar porcentajes de variación. Para ello se utilizó el programa WESLEA y a continuación se muestran los resultados. Ver Tabla 9.3.

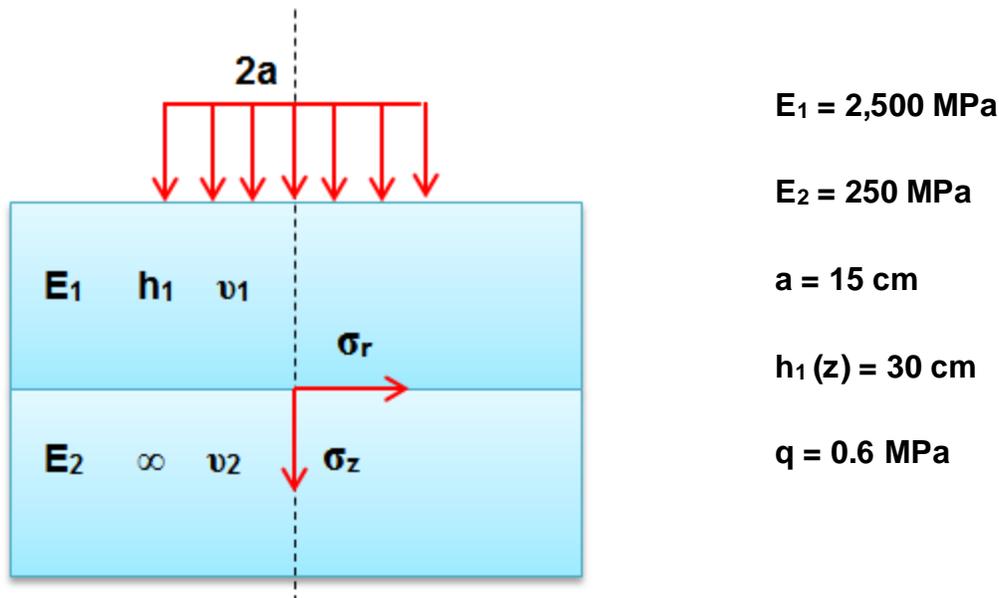
En la misma se puede observar la variación que existe entre los resultados tabulares y gráficos propuestos por Fox y los dados por el programa WESLEA, donde se concluye que los valores de Fox están ligeramente sobrecalculados en un porcentaje de variación del 0.1 al 6.32 % respecto a los que da WESLEA, la cual es una gran aproximación y por tanto aceptables los resultados.

**Tabla 9.3 Comparación de resultados Fox vs Burmister (WESLEA).**

$E_1/E_2$	$a/h = 0.5$	$a/h = 1$	$a/h = 2$	$a/h = 4$	Método
1	28.4	64.6	91.1	98.6	Fox
	27.2	63.0	90.4	98.4	Burmister (WESLEA)
	4.4	2.5	0.7	0.2	% variación
2	22.4	54.7	87.5	99.8	Fox
	21.4	53.1	86.5	99.7	Burmister (WESLEA)
	4.7	3.1	1.2	0.1	% variación
5	14.7	39.7	76.7	100.5	Fox
	14.0	38.28	75.12	100.37	Burmister (WESLEA)
	4.9	3.7	2.1	0.1	% variación
10	10.1	29.2	64.4	98.4	Fox
	9.6	28.0	62.7	97.4	Burmister (WESLEA)
	5.5	4.4	2.7	1.0	% variación
100	2.38	8.1	24.6	60.5	Fox
	2.2	7.7	23.5	58.2	Burmister (WESLEA)
	6.1	5.3	4.8	3.9	% variación
500	0.81	2.97	10.1	30.4	Fox
	0.8	2.80	9.59	28.94	Burmister (WESLEA)
	5.7	6.1	5.4	5.0	% variación
10000	0.104	0.41	1.58	5.75	Fox
	0.1	0.4	1.5	5.4	Burmister (WESLEA)
	0.65	3.36	5.22	6.32	% variación

### Ejemplo 5.- Fox

Determinar el esfuerzo normal y radial del siguiente sistema bicapa con los datos indicados, considerando las soluciones tabulares de Fox (1948). Las capas no están adheridas.



#### Solución:

Se calculan los parámetros de relación:

$$E_1/E_2 = 2500/250 = 10$$

$$a/h = 15/30 = 0.5$$

Lectura obtenida de la Figura 9.6 para esfuerzo normal = 10.0

Lectura obtenida de la Figura 9.7 para esfuerzo radial = 3.5

Por lo tanto para el esfuerzo normal se tiene:

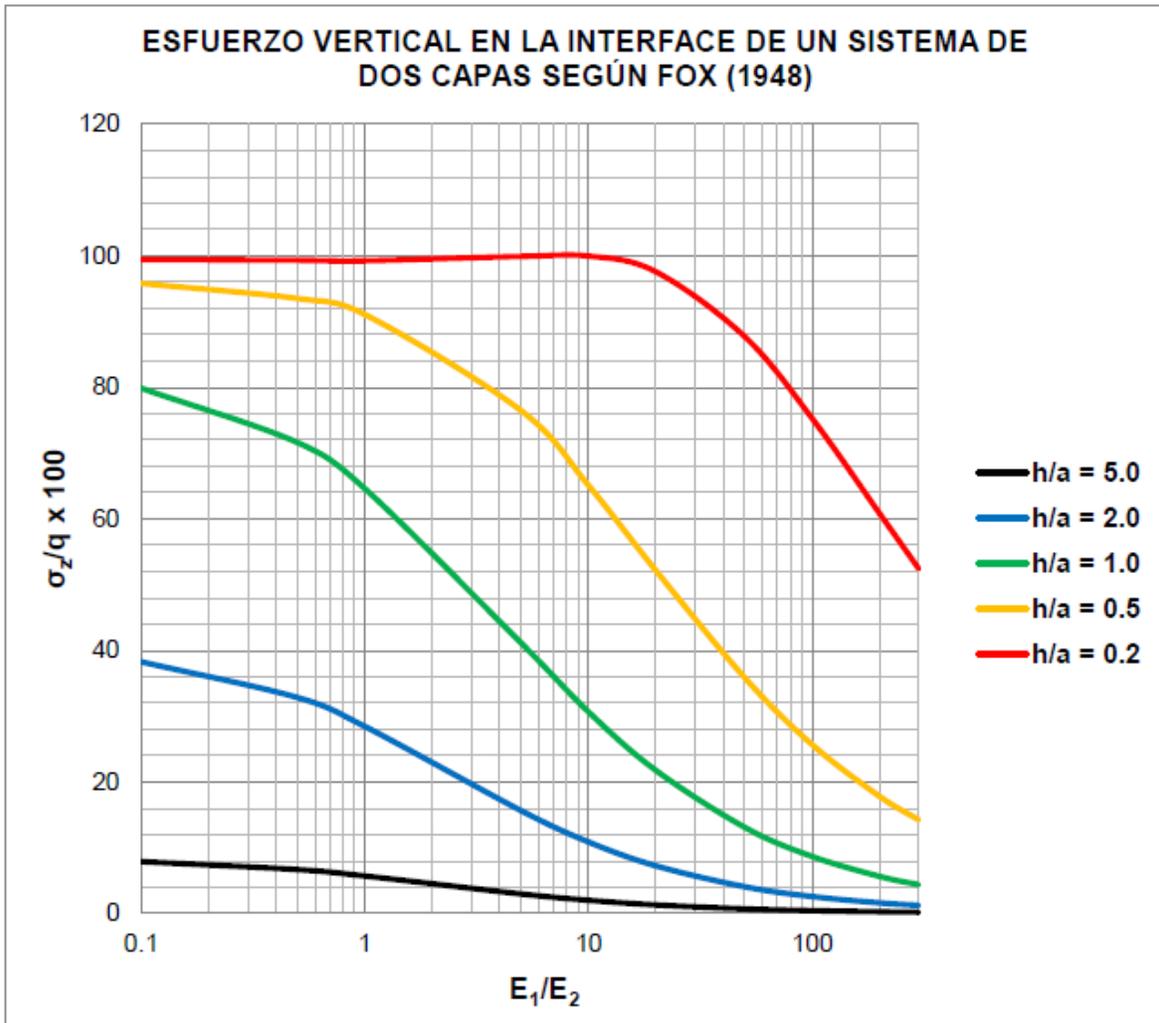
$$\sigma_z = (0.6) (10)/100 = 0.06 \text{ MPa (Solución).}$$

Para el esfuerzo radial se tiene:

$$\sigma_x = (0.6) (3.5)/100 = 0.021 \text{ MPa (Solución).}$$

La Figura 9.8 muestra la distribución de esfuerzos verticales en la interface de las dos capas que componen el pavimento. Se observa que dichos esfuerzos

normales disminuyen al momento de rigidizar la capa superior (aumentar relación  $E_1/E_2$ ) así como al aumentar la relación  $h/a$  que significa incrementar el espesor de la primer capa.



**Figura 9.8 Esfuerzo vertical en la interfase de un sistema de dos capas (Fox, 1948).**

Fuente: Elaboración propia.

La Figura 9.9 muestra la distribución de esfuerzos normales bajo la condición de  $h/a = 1$ . Se observa que dicha respuesta mecánica disminuye cuando aumenta la relación  $r/a$ , es decir que mientras más nos alejamos del eje de simetría el esfuerzo disminuye rápidamente hasta volverse prácticamente nulo (ver  $r/a = 5$ )

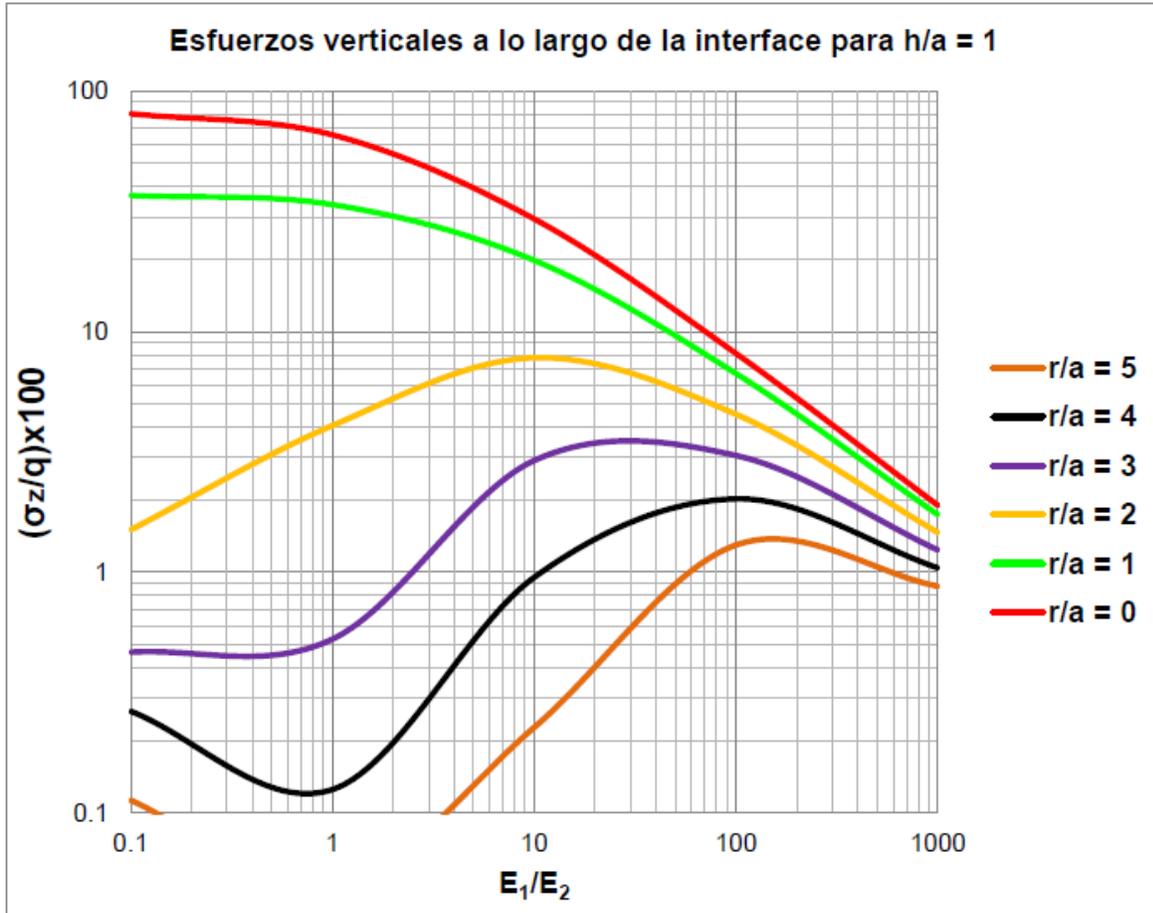


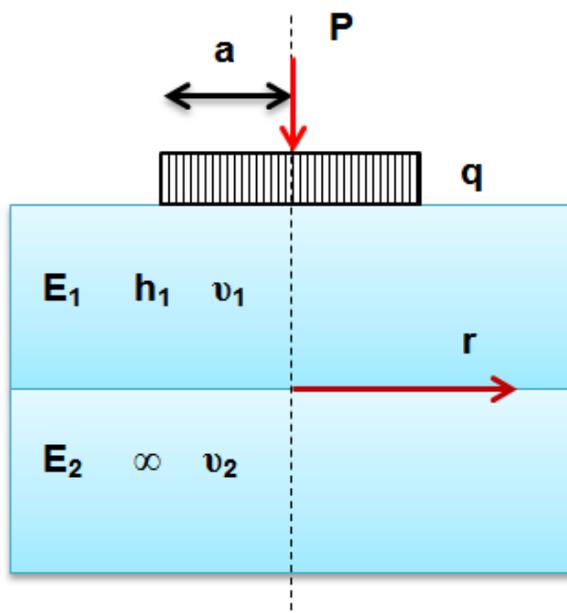
Figura 9.9 Esfuerzos verticales a lo largo de la interface para  $h/a = 1$  (Fox, 1948).

Fuente: Elaboración propia.

Puede concluirse que el método de Fox fue uno de los primeros trabajos más completos que existieron en su momento, dado que da mucho más valores tabulados y graficados que los dados originalmente por Burmister. Sin embargo sus soluciones se limitaron a sistemas de dos capas lo que permitió posteriormente el desarrollo de sistemas de 3 capas y después sistemas de  $n$ -capas o multicapas.

## Ejemplo 6.- Fox (2)

Encontrar el esfuerzo normal en la interfaz del siguiente sistema bicapa considerando una distancia "r" fuera del eje de simetría (60 cm) y dentro de él, considerando las soluciones gráficas de Fox.



$$E_1 = 2,500 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 250 \text{ MPa}$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$r = 60 \text{ cm}$$

$$r = 0 \text{ cm}$$

$$h_1(z) = 15 \text{ cm}$$

$$q = 0.6 \text{ MPa}$$

**Solución:**

Se calculan los parámetros de relación:

$$E_1/E_2 = 2500/250 = 10$$

$$h/a = 15/15 = 1.0$$

$$r/a = 60/15 = 4.0$$

$$r/a = 0/15 = 0.0$$

Lectura obtenida del Gráfico 15 para esfuerzo normal con r igual a 60 cm= 0.9

Lectura obtenida del Gráfico 15 para esfuerzo normal con r igual a 0 cm= 30.0

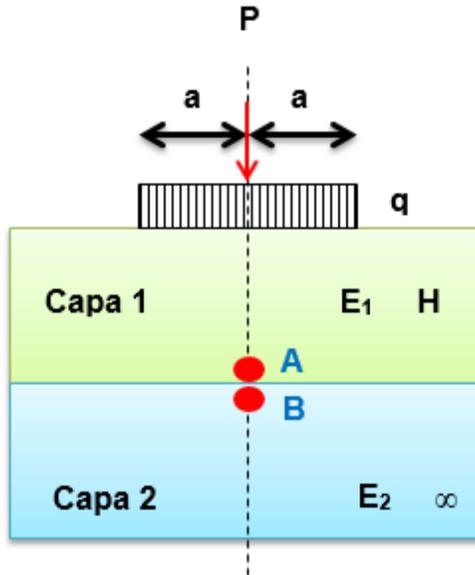
Por lo tanto para el esfuerzo normal se tiene:

$$\sigma_z = (0.6) (0.9)/100 = 0.0054 \text{ MPa (Solución).}$$

$$\sigma_z = (0.6) (30)/100 = 0.18 \text{ MPa (Solución).}$$

### 9.3 Hank y Scrivner (1949)

Hank y Scrivner (1949) del Departamento de Transporte de Texas desarrollaron gráficos para encontrar esfuerzos normales y radiales para sistemas de pavimentos de dos capas. Las soluciones presentadas sólo pueden utilizarse al centro del área cargada. Ver Figura 9.10.



**Figura 9.10 Modelo bicapa de Hank y Scrivner (1949).**

La Figura 9.11 y Figura 9.12 muestran las gráficas desarrolladas por Hank-Scrivner para esfuerzos normales y radiales respectivamente. Puede observarse que para ambos casos, los autores consideraron cinco relaciones modulares (2, 5, 10, 20 y 100). Los análisis se hicieron para la relación radio del neumático y espesor de la capa 1 ( $a/h$ ) con valores de 0.1 a 1.0.

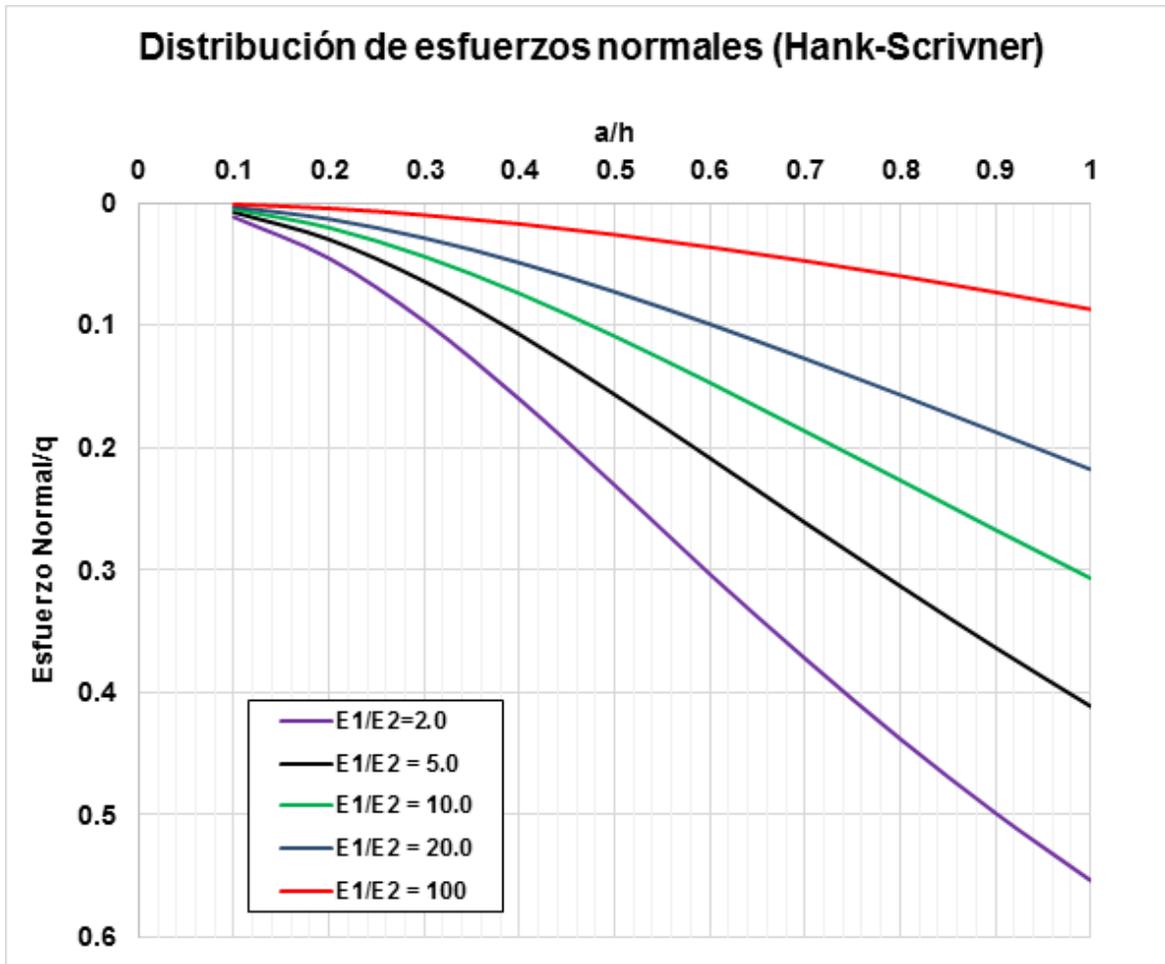


Figura 9.11 Gráficas para determinar esfuerzos normales (Hank-Scriver, 1948).

Fuente: Elaboración propia.

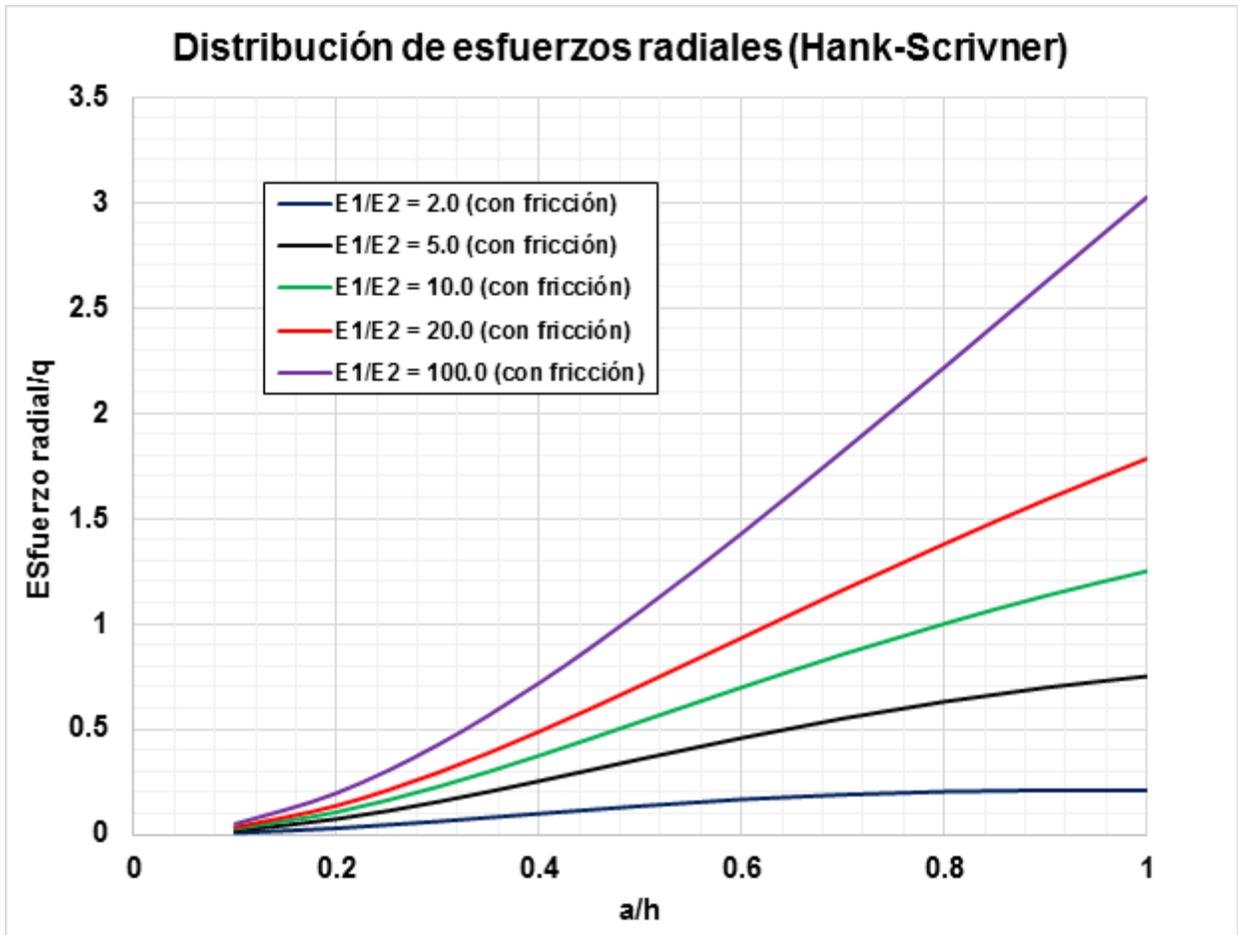
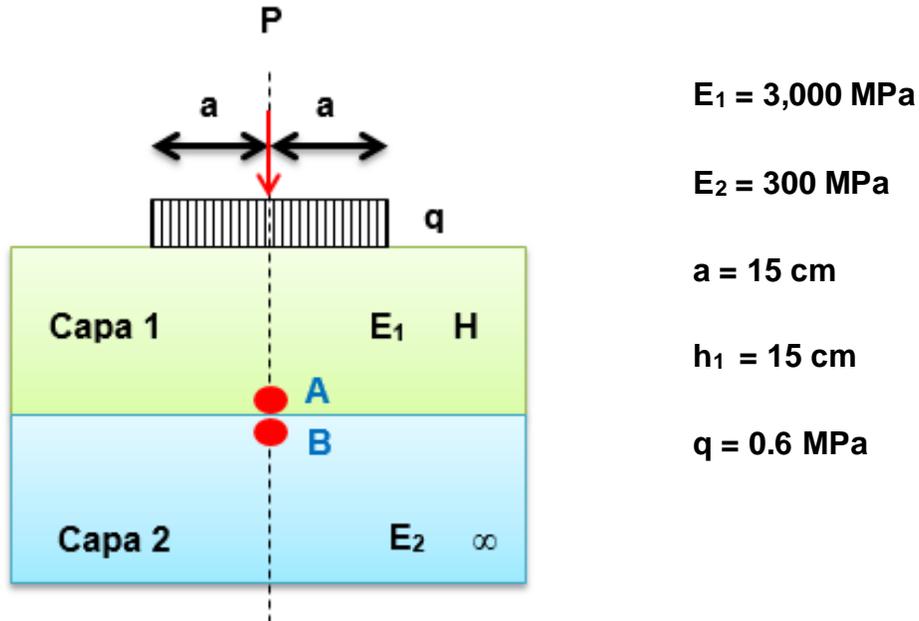


Figura 9.12 Gráficas para determinar esfuerzos radiales (Hank-Scriver, 1948).

Fuente: Elaboración propia.

## Ejemplo 7.- Hank-Scriver

Encontrar el esfuerzo normal y radial del siguiente sistema bicapa en el eje de simetría considerando las soluciones gráficas de Hank-Scriver.

**Solución:**

Primeramente se calcula la relación  $a/h$ . Para ello se tiene  $15/15 = 1.0$

A continuación se calcula la relación modular entre las dos capas. Para ello se tiene  $3,000/300 = 10.0$ .

- Para el esfuerzo normal:

$\sigma_z/q =$  Intercepción

De la Figura 9.11, se selecciona la línea correspondiente con el valor de la relación modular y la relación  $a/h$  interceptando el eje izquierdo. Dicho valor es 0.31.

Por lo tanto se tiene para el esfuerzo normal  $\sigma_z = (0.31) (0.6 \text{ MPa}) = 0.186 \text{ MPa}$

- Para el esfuerzo radial:

$\sigma_r/q =$  Intercepción

De la Figura 9.12, se selecciona la línea correspondiente con el valor de la relación modular y la relación  $a/h$  interceptando el eje izquierdo. Dicho valor es 1.25.

Por lo tanto se tiene para el esfuerzo radial  $\sigma_r = (1.25) (0.6 \text{ MPa}) = 0.75 \text{ MPa}$

## 9.4 Huang (1969)

Huang (1969) de la Universidad de Kentucky, propuso factores de deflexión en la interface de la primera y segunda capa de un pavimento bicapa. Dichas deflexiones fueron obtenidas dentro del eje de simetría ( $r/a = 0$ ) y fuera del eje de simetría ( $r/a$  diferente de cero). Ver Figura 9.13. Para ello se emplearon distintas relaciones modulares ( $E_1/E_2$ ) de 1, 2.5, 5, 10, 25, 50, 100.

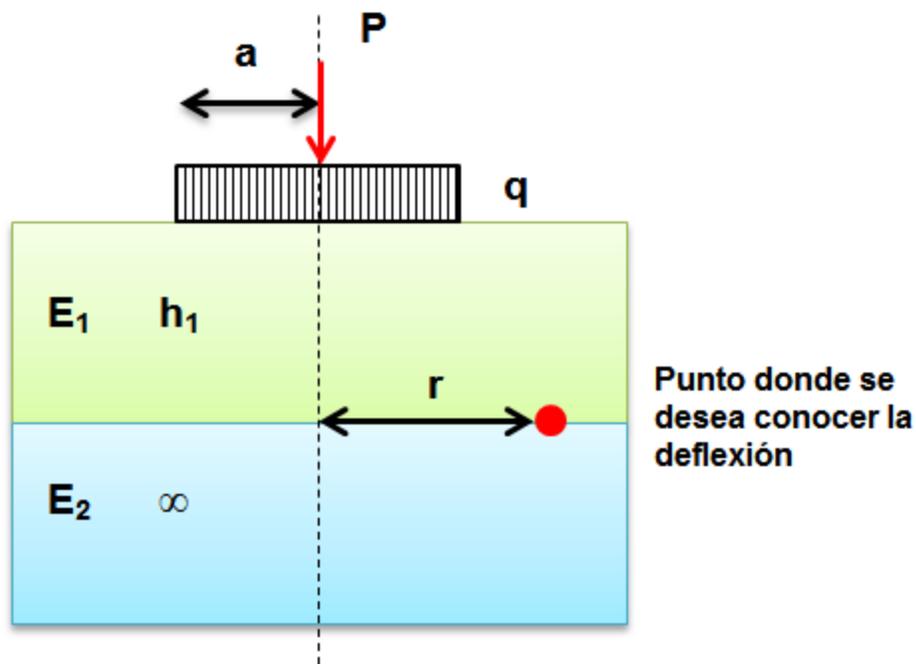


Figura 9.13 Modelo de deflexión propuesto por Huang (1969).

La fórmula fundamental de análisis fue la siguiente (ver ecuación (55)):

$$W = \frac{q a}{E_2} F \quad (55)$$

Donde:

$W =$  Deflexión (cm o in)

$q =$  Presión de contacto (MPa ó psi)

$a =$  Radio del neumático (cm o in)

$E_2 =$  Módulo elástico de la capa 2 (MPa o psi)

$F =$  Factor de deflexión del sistema bicapa (adimensional)

Con esto se obtuvieron 7 cartas con factores de deflexión. Ver Figura 9.14, Figura 9.15, Figura 9.16, Figura 9.17, Figura 9.18, Figura 9.19 y Figura 9.20.

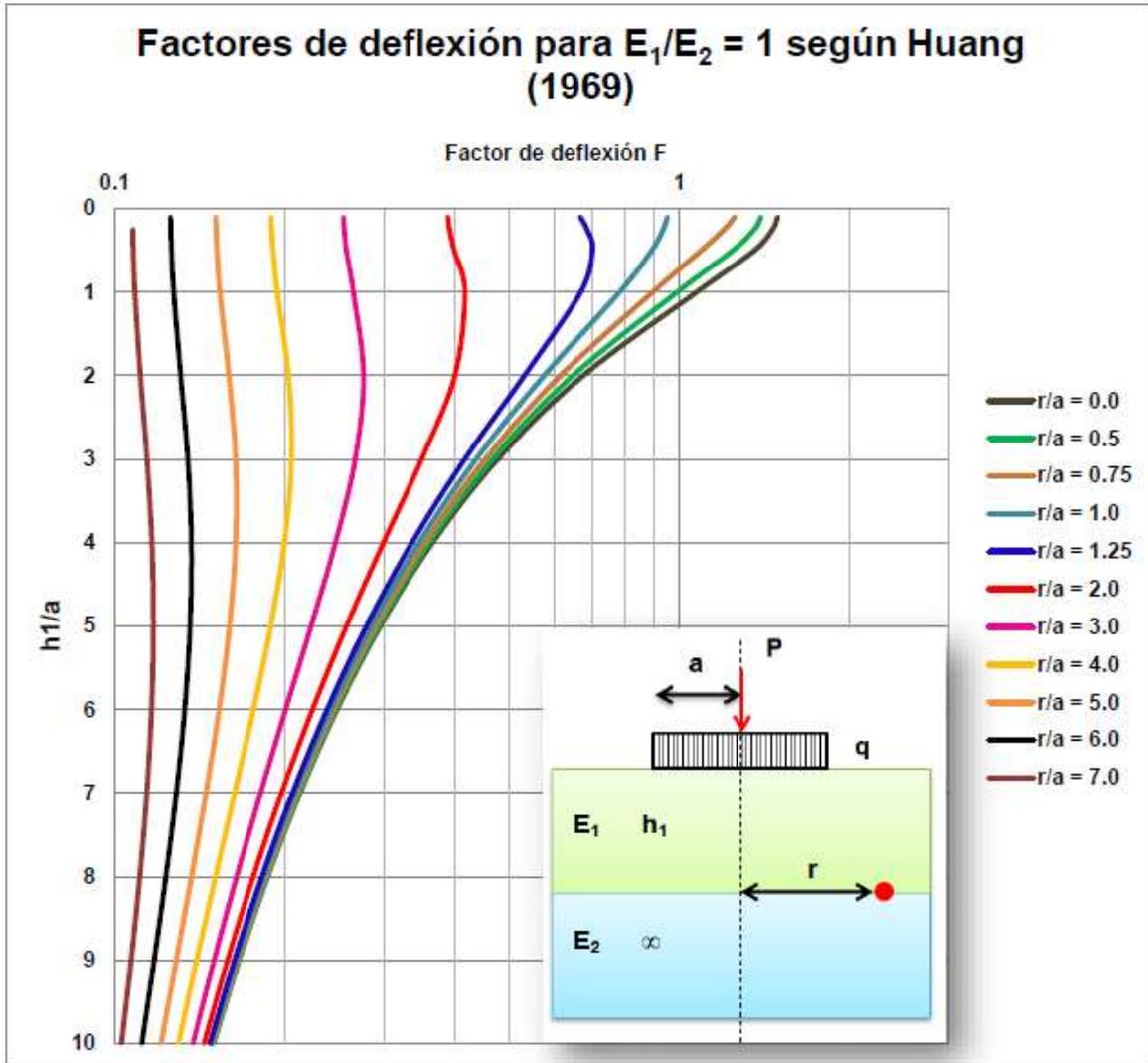
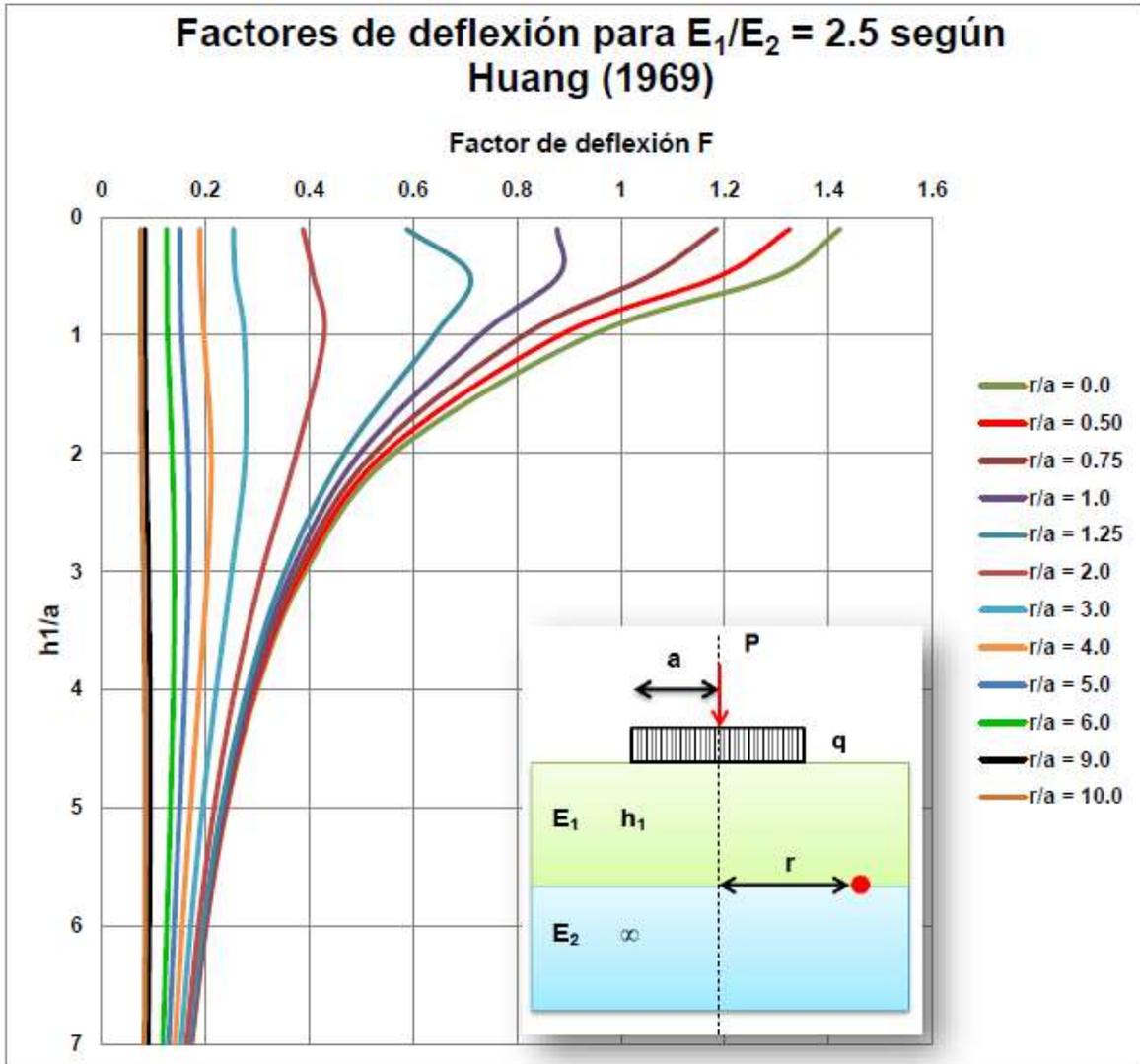


Figura 9.14 Factores de deflexión para  $E_1/E_2=1.0$  según Huang (1969).

Fuente: Elaboración propia.



**Figura 9.15 Factores de deflexión para  $E_1/E_2=2.5$  según Huang (1969).**

Fuente: Elaboración propia.

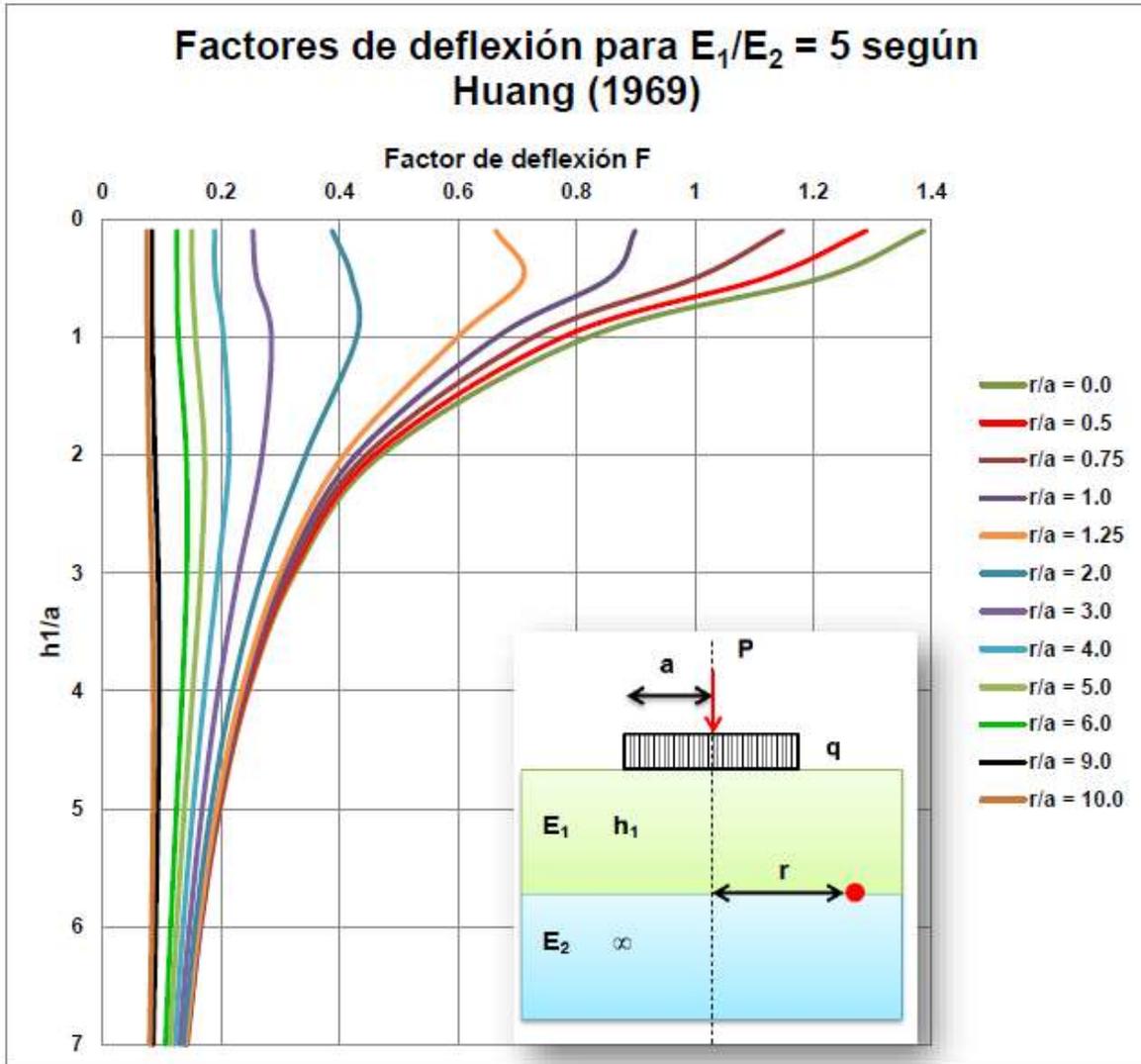
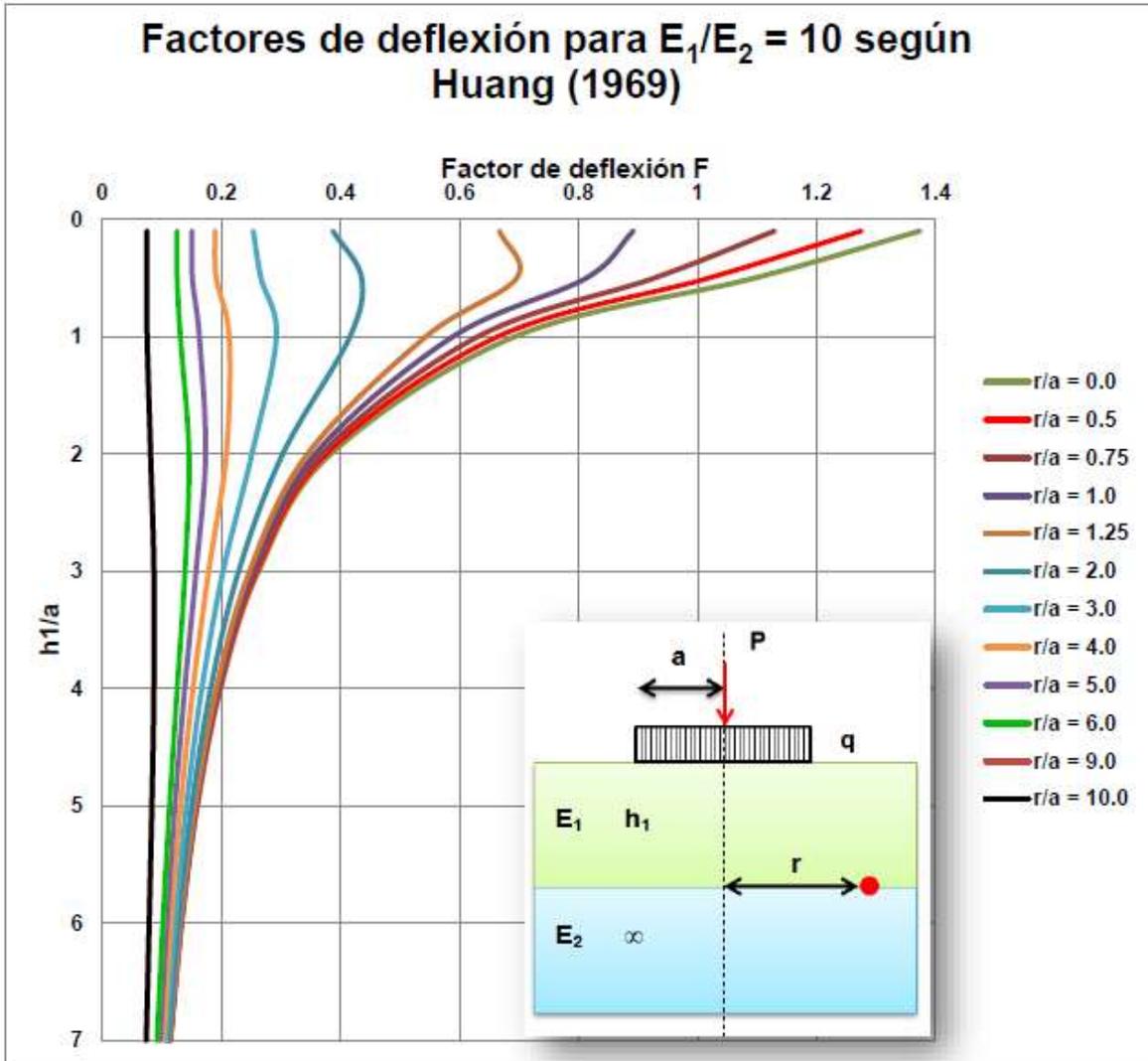


Figura 9.16 Factores de deflexión para  $E_1/E_2=5$  según Huang (1969).

Fuente: Elaboración propia.



**Figura 9.17 Factores de deflexión para  $E_1/E_2=10$  según Huang (1969).**

Fuente: Elaboración propia.

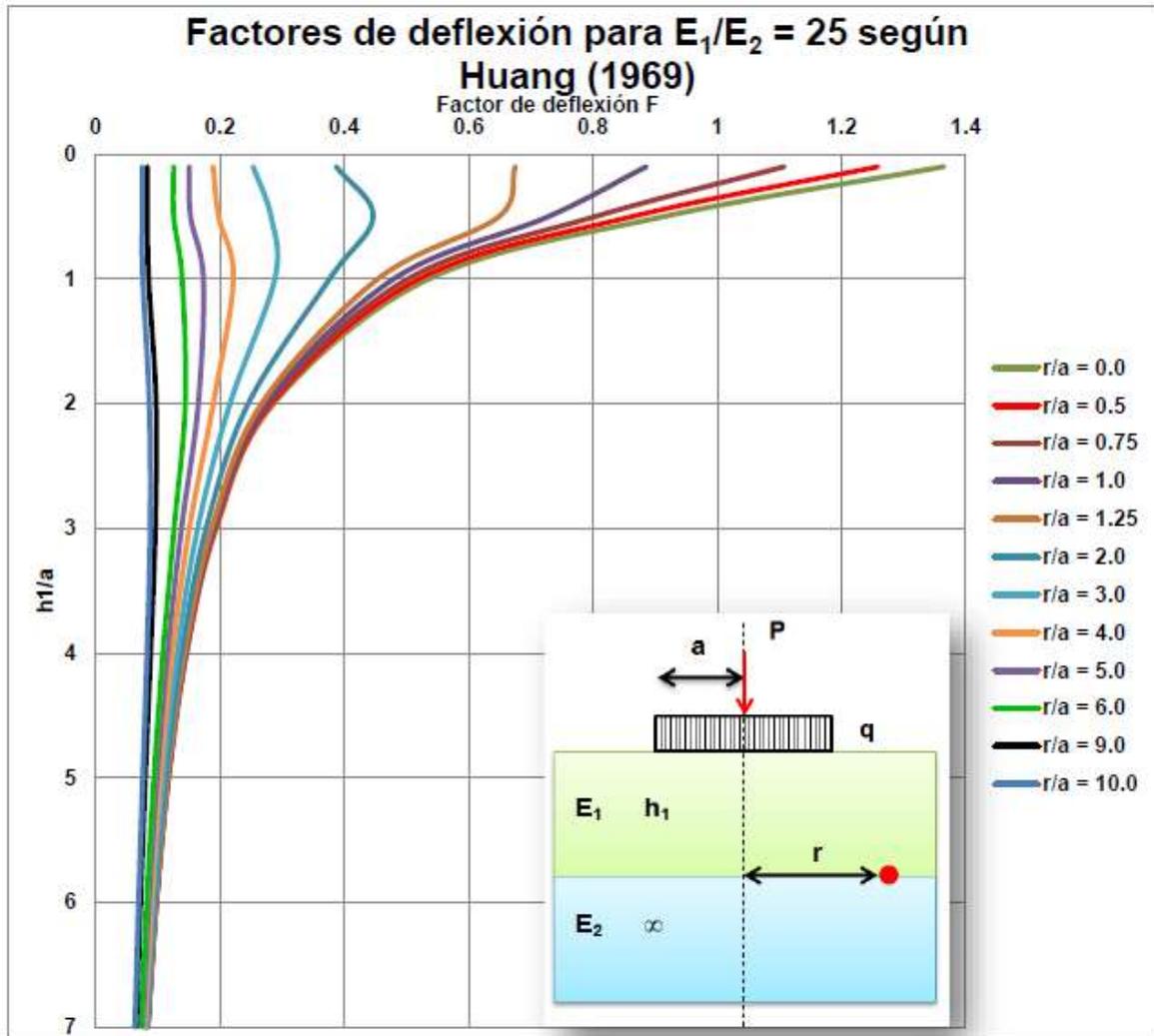
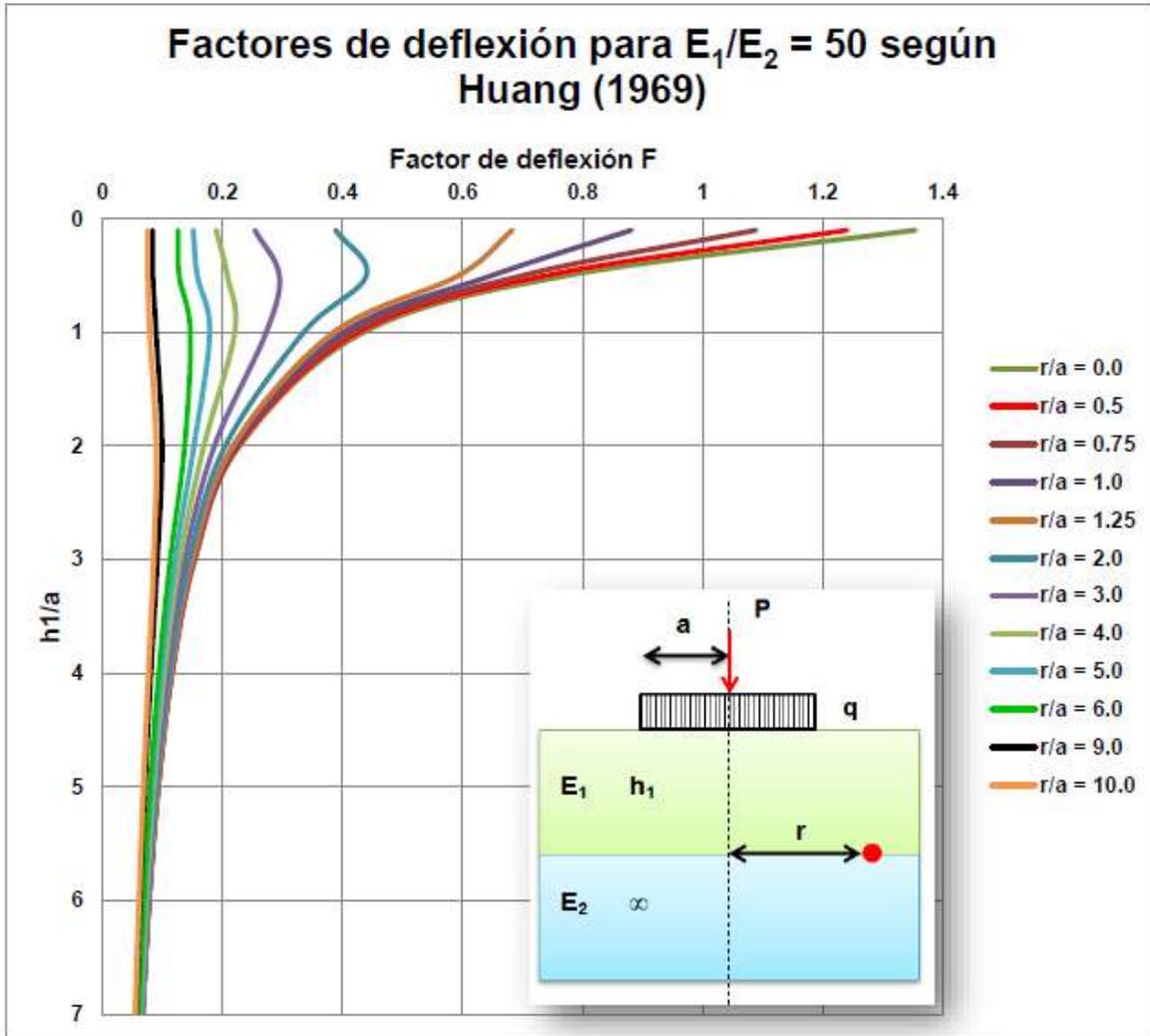


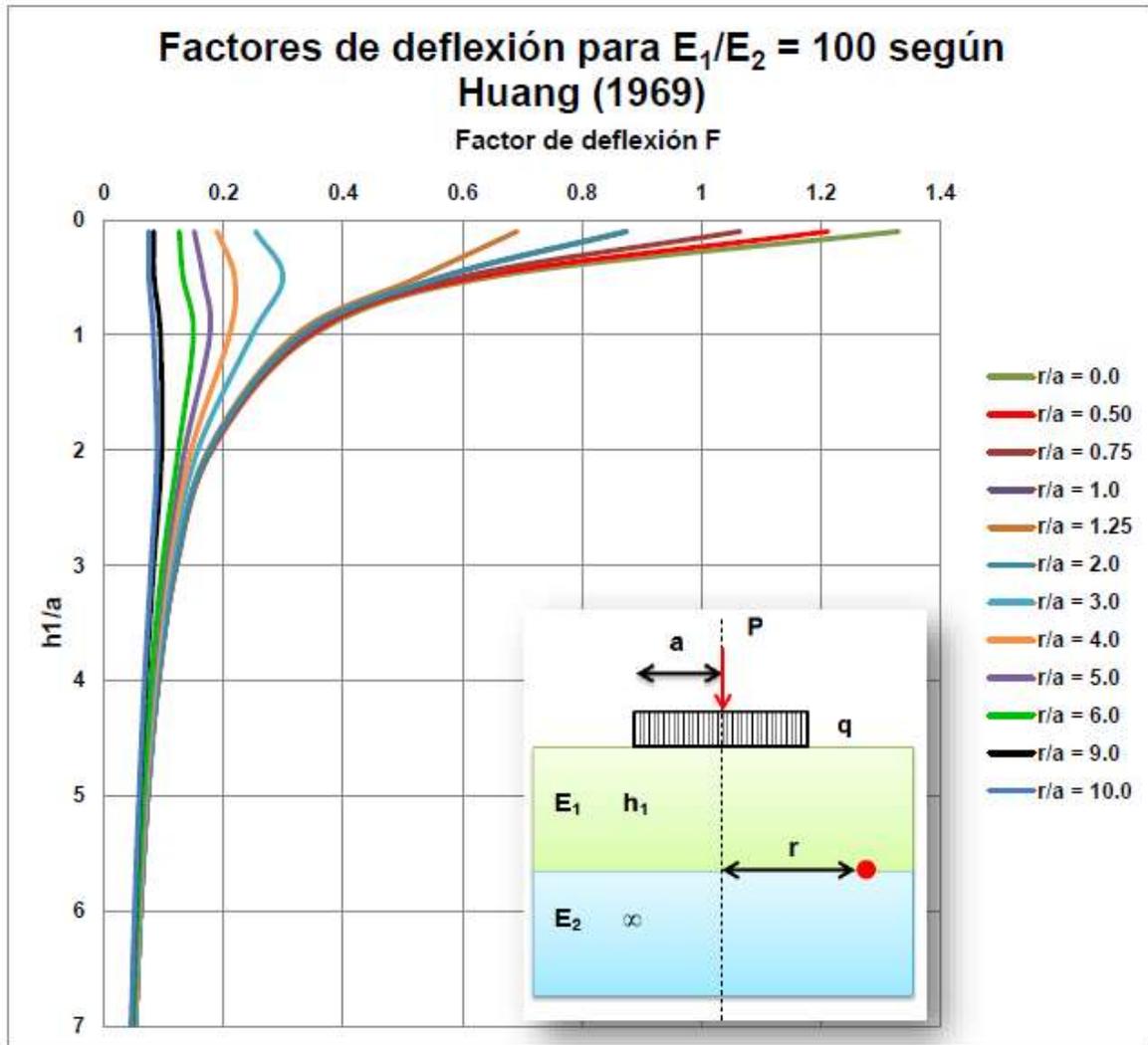
Figura 9.18 Factores de deflexión para  $E_1/E_2=25$  según Huang (1969).

Fuente: Elaboración propia.



**Figura 9.19 Factores de deflexión para  $E_1/E_2=50$  según Huang (1969).**

Fuente: Elaboración propia.



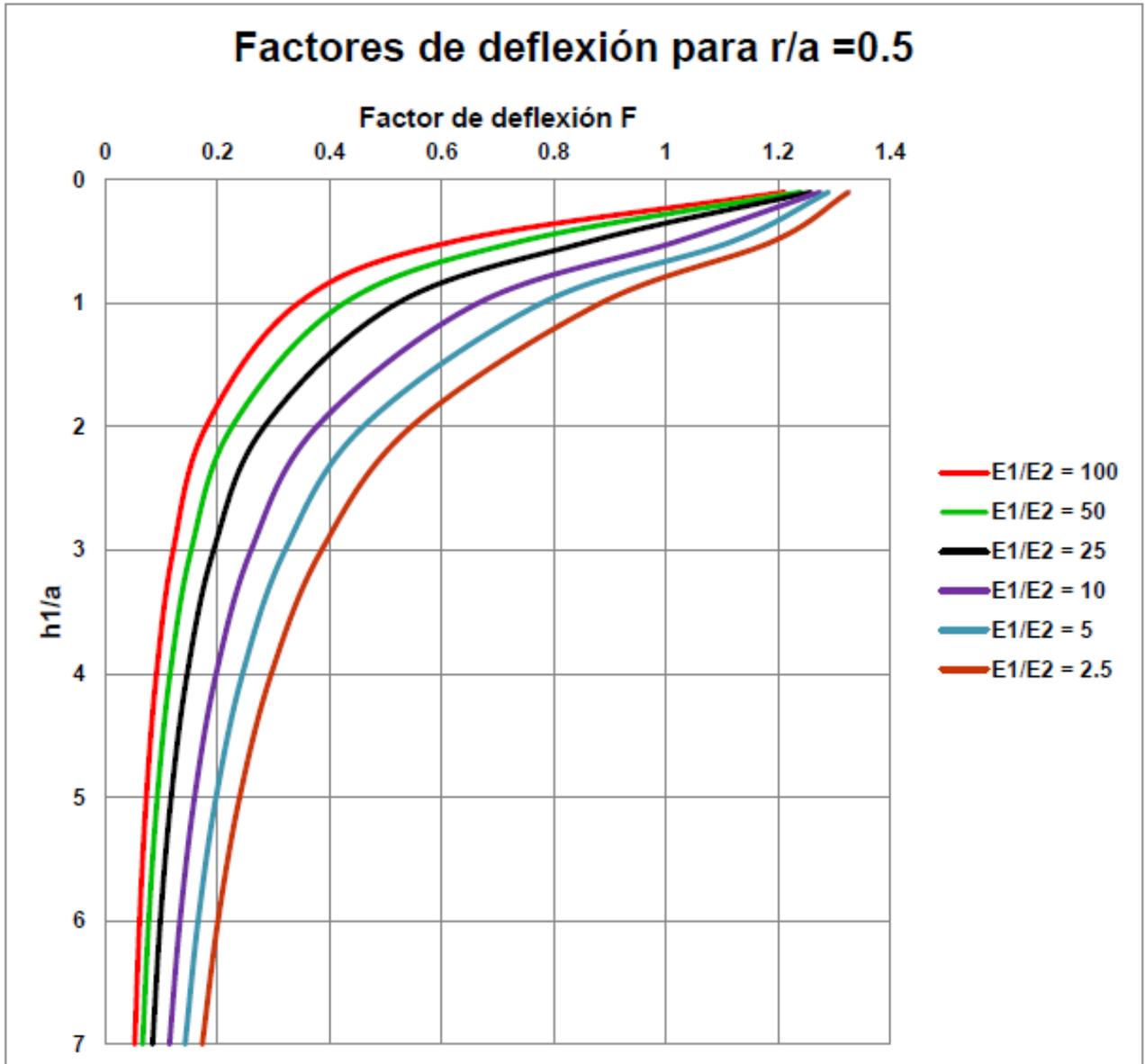
Fuente: Elaboración propia.

De los gráficos anteriores pueden concluirse los siguientes aspectos:

- Para la carta o gráfico  $E_1/E_2 = 1.0$  (ver Figura 9.14) se obtienen valores muy aproximados sino que iguales a los presentados por Foster y Ahlvin (1954).
- Para todos casos a medida que aumenta la relación  $r/a$ , los factores de deflexión suelen ser muy pequeños, esto debido a que las deformaciones disminuyen conforme se alejan más del eje de simetría del área circular cargada.
- La máxima deflexión ocurre en el eje de simetría del área circular cargada.
- Para relaciones modulares  $E_1/E_2$  muy bajas se obtienen los mayores factores de deflexión y por lo tanto las mayores deflexiones.
- Para relaciones modulares  $E_1/E_2$  muy grandes se obtienen bajos factores de deflexión y por lo tanto bajas deflexiones.

Además hay que precisar que estas cartas fueron obtenidas para relaciones de Poisson de 0.5 por lo que se espera que la cantidad de gráficas de Huang crezcan de manera exponencial bajo varias combinaciones de relaciones de Poisson en las dos capas que conforman este pavimento bicapa.

Paralelamente el autor considera que los gráficos anteriores pueden representarse también agrupándolos en gráficos de  $r/a$ . Para muestra un ejemplo se muestra la Figura 9.21, Figura 9.22, Figura 9.23, Figura 9.24 y Figura 9.25.



**Figura 9.21 Factores de deflexión para  $r/a=0.5$ .**

Fuente: Elaboración propia.

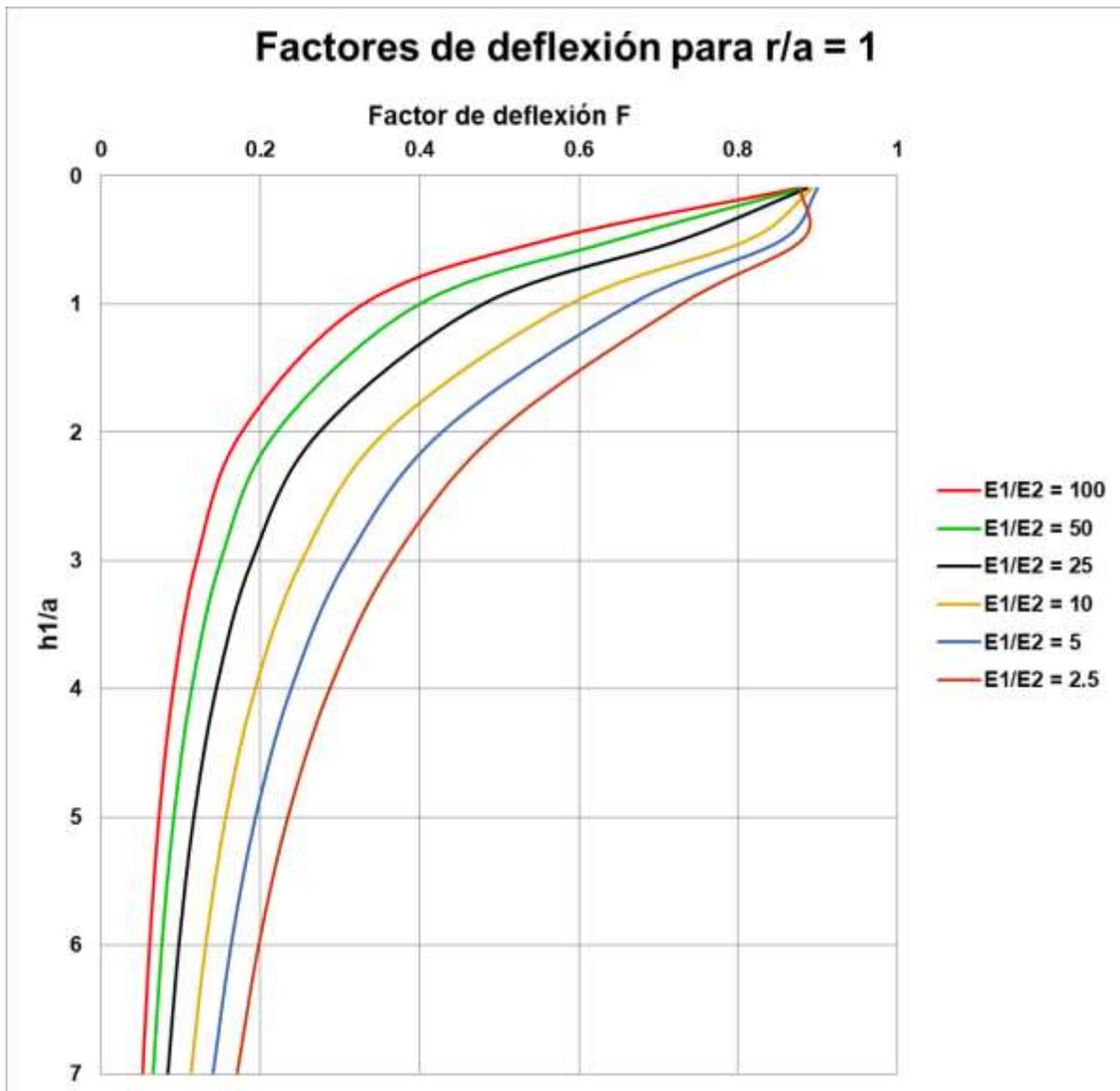
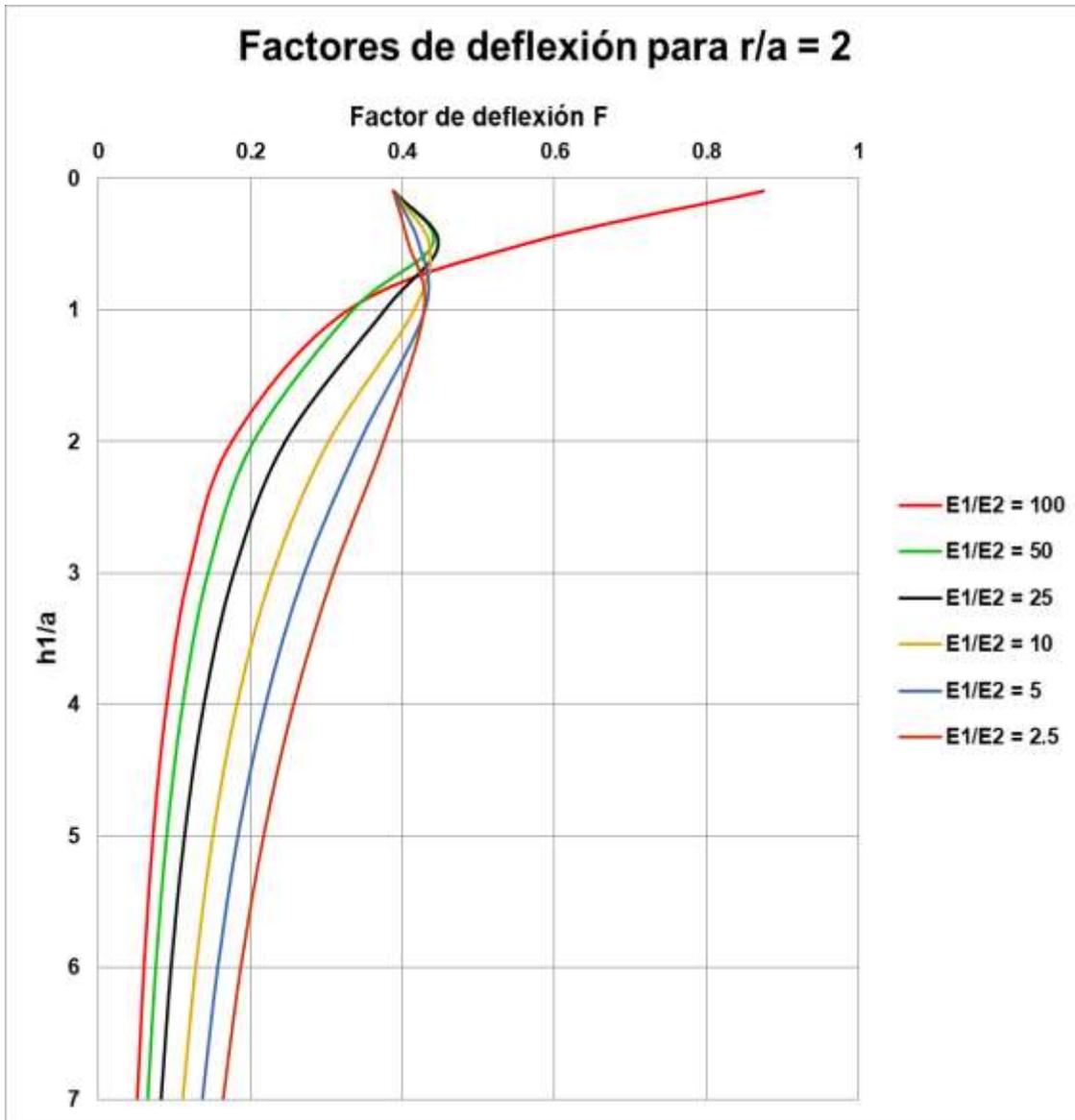


Figura 9.22 Factores de deflexión para  $r/a=1$ .

Fuente: Elaboración propia.



**Figura 9.23 Factores de deflexión para  $r/a=2$ .**

Fuente: Elaboración propia.

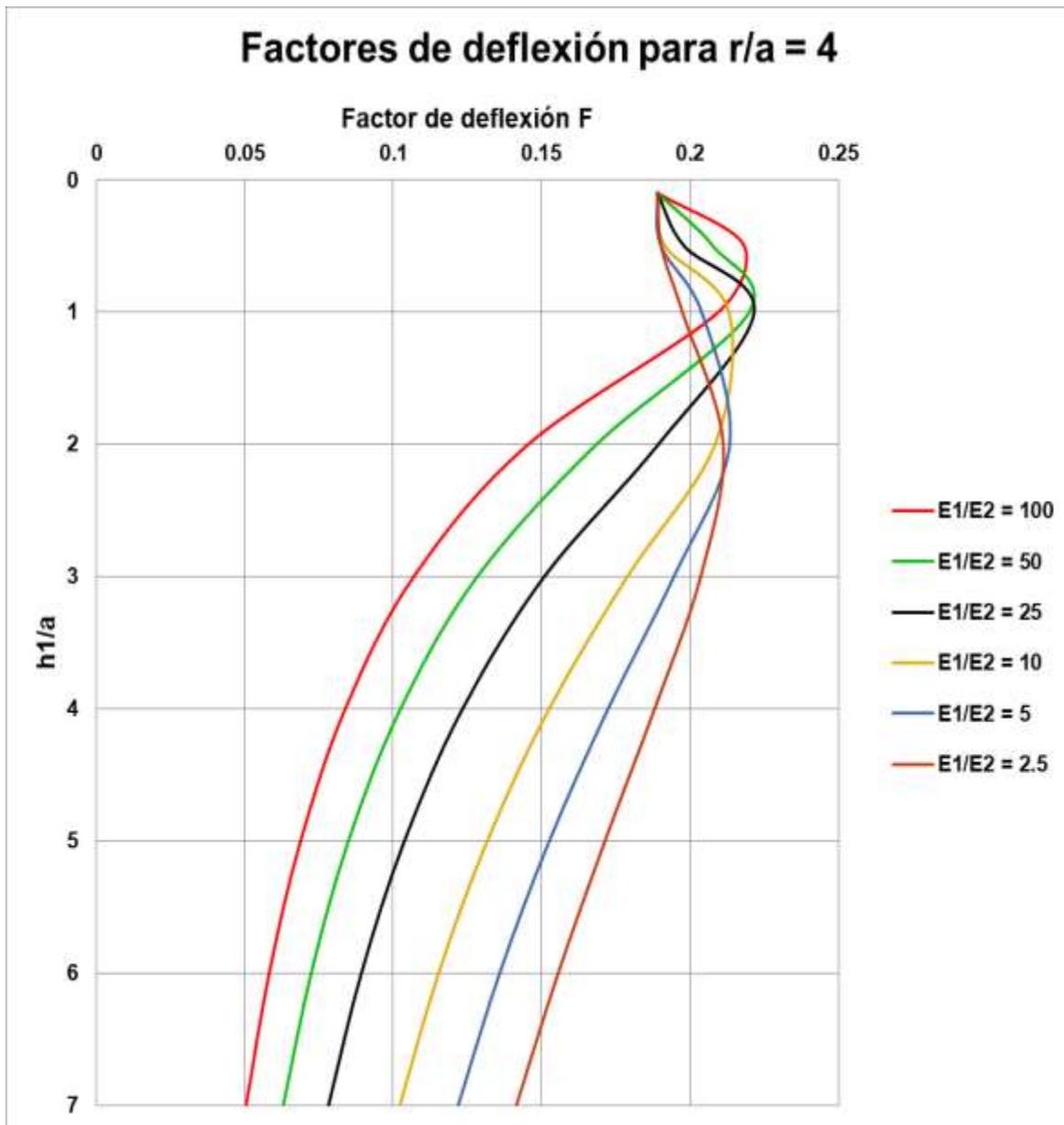


Figura 9.24 Factores de deflexión para  $r/a=4$ .

Fuente: Elaboración propia.

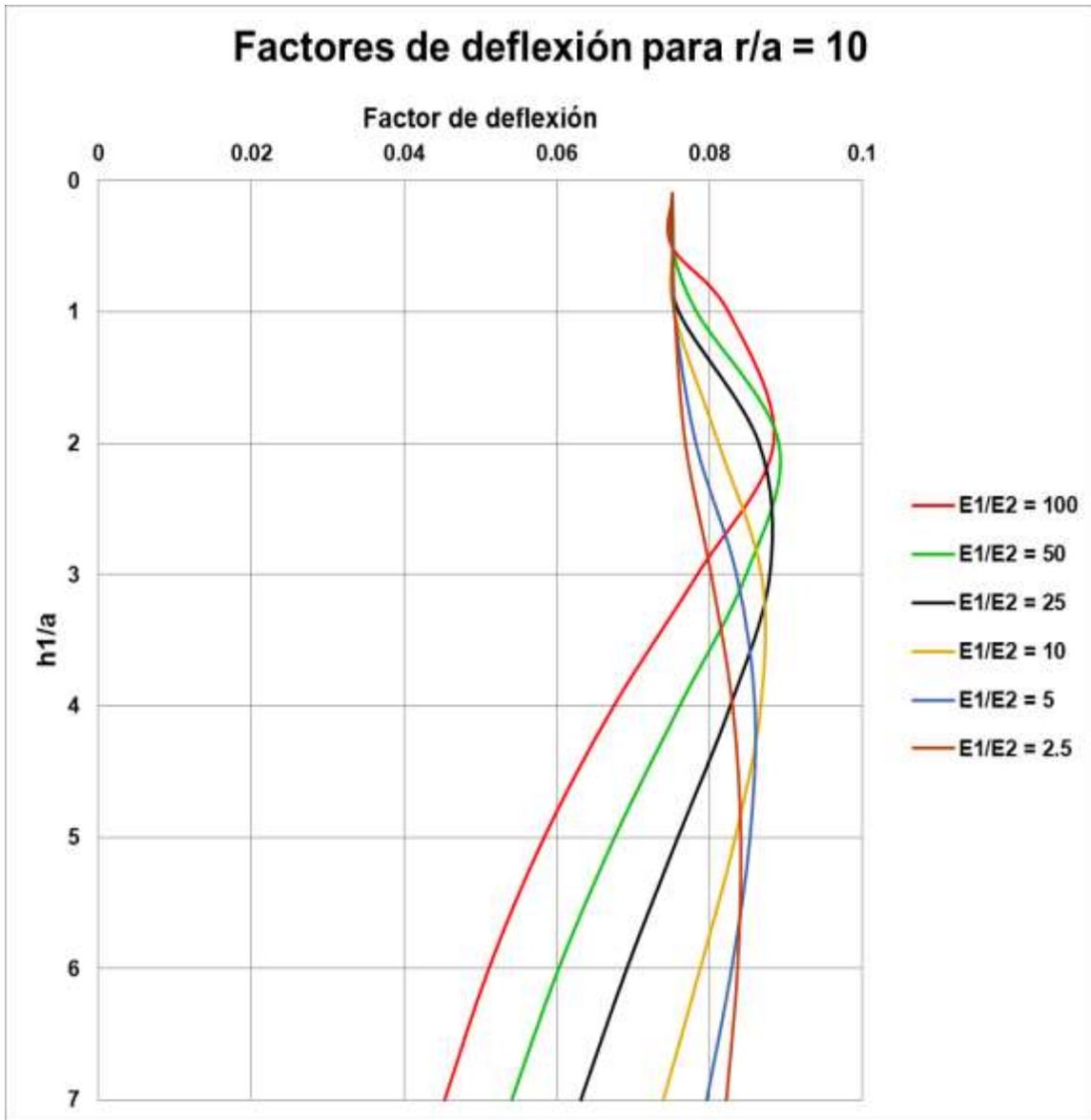
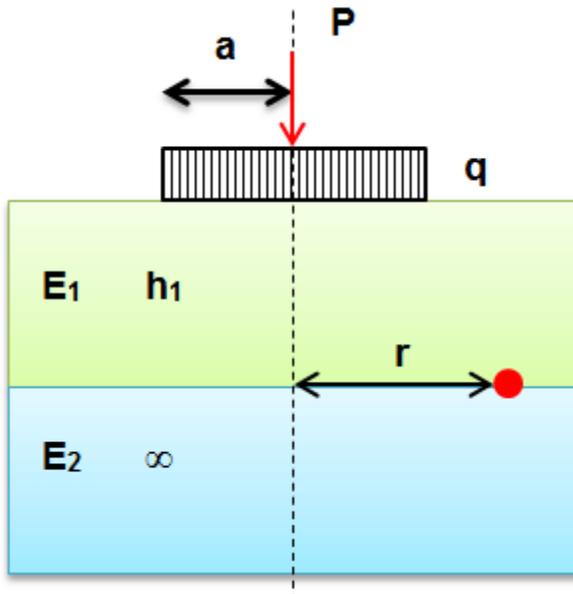


Figura 9.25 Factores de deflexión para  $r/a=10$ .

Fuente: Elaboración propia.

### Ejemplo 8.- Huang

Utilizando las soluciones de Huang (1969) encontrar las deflexiones del sistema bicapa mostrado, bajo las siguientes condiciones.



$$E_1 = 4,000 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 800 \text{ MPa}$$

$$r = 0 \text{ cm y } 15 \text{ cm}$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$h_1 = 15 \text{ cm}$$

$$q = 0.6 \text{ MPa}$$

#### Solución:

De la relación modular  $E_1/E_2 = 4,000/800$  se tiene un valor de 5. Por lo tanto el gráfico de Huang que se utilizará para este ejemplo será el de la Figura 9.16.

- Para el valor de  $r = 0$  se tiene lo siguiente:

$$r/a = 0/15 = 0.0$$

$$h_1/a = 15/15 = 1.0$$

De la Figura 9.16 se tiene un factor de deflexión de 0.83. Aplicando la ecuación (55) se tiene:

$$W = (0.6 \text{ MPa}) (15 \text{ cm}) (0.83)/(800 \text{ MPa}) = 0.00933 \text{ cm}$$

- Para el valor de  $r = 15$  se tiene lo siguiente:

$$r/a = 15/15 = 1.0$$

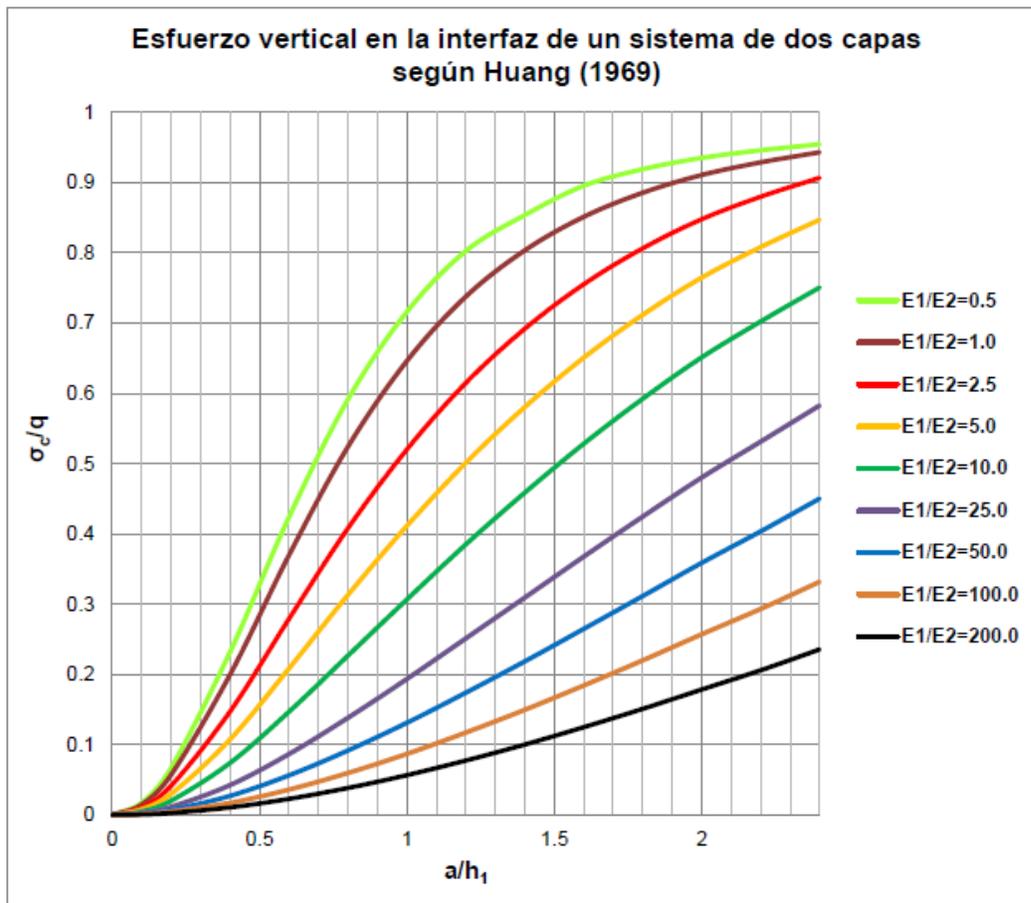
$$h_1/a = 15/15 = 1.0$$

De la Figura 9.16 se tiene un factor de deflexión de 0.65. Aplicando la ecuación (55) se tiene:

$$W = (0.6 \text{ MPa}) (15 \text{ cm}) (0.65)/(800 \text{ MPa}) = 0.00731 \text{ cm}$$

De lo anterior se concluye que la máxima deflexión se va a presentar justo debajo del centro de aplicación de la carga ( $r = 0$ ). Este comportamiento aplica para todo tipo de secciones de pavimento que consideren sólo una carga como el de este ejemplo.

Adicionalmente Huang presenta los esfuerzos verticales en la interfaz del mismo sistema bicapa considerado. Ver Figura 9.26. Dicha respuesta mecánica se asocia directamente con la deformación a compresión arriba de la subrasante la cual define actualmente la vida por deformación permanente de los pavimentos flexibles.

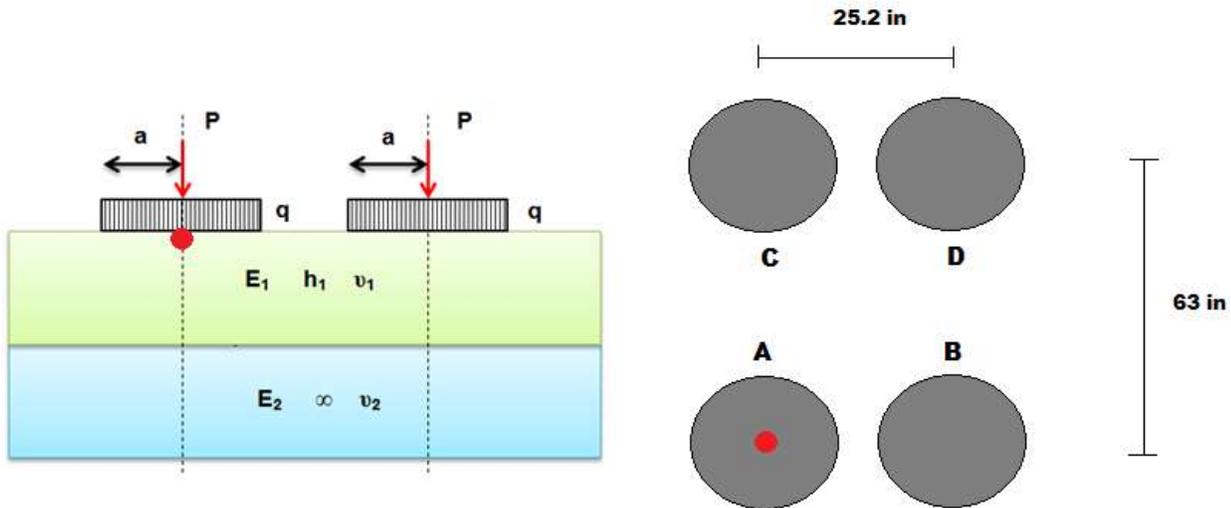


**Figura 9.26 Esfuerzo vertical en la interfaz de un sistema de dos capas (Huang, 1969).**

Fuente: Elaboración propia.

### **Ejemplo 9.- Principio de Superposición para eje tándem.**

Utilizando el principio de superposición encontrar la deflexión total del sistema bicapa mostrado en la figura considerando un eje tándem.



$$h_1 = 25.2 \text{ in}$$

$$a = 12.61 \text{ in}$$

$$E_1 = 1,000,000 \text{ psi}$$

$$E_2 = 20,000 \text{ psi}$$

$$\nu_1 = \nu_2 = 0.50$$

$$P = 50,000 \text{ lb}$$

$$q = 100 \text{ psi}$$

### Solución:

Para aplicar el principio de superposición, se considerarán por separado los efectos que tienen cada uno de los neumáticos sobre el punto rojo. En términos generales la deflexión total de la estructura en el punto A será:

$$\text{Deflexión total} = \text{Deflexión neumático A} + \text{Deflexión neumático B} + \text{Deflexión neumático C} + \text{Deflexión neumático D}$$

Por tratarse de un sistema bicapa, se hará uso de las soluciones gráficas del Dr. Huang (1969) donde se consideran los factores de deflexión.

Para calcular dichos factores de daño, se necesita definir el valor de  $r$  a partir del punto rojo (neumático A).

Para el neumático A,  $r = 0$ .

Para el neumático B,  $r = 25.2$  in

Para el neumático C,  $r = 63$  in

Para el neumático D, mediante el teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos se obtiene  $r = \sqrt{25.2^2 + 63^2} = 67.85$  in

Ahora se obtienen los valores geométricos  $r/a$  y  $h_1/a$ :

Para el neumático A,  $r/a = 0/12.61 = 0$

Para el neumático B,  $r/a = 25.2/12.61 = 2.0$

Para el neumático C,  $r/a = 63/12.61 = 5.0$

Para el neumático D,  $r/a = 67.85/12.61 = 5.38$

$h_1/a = 25.2/12.61 = 2.0$

$E_1/E_2 = 1,000,000/20,000 = 50$ , por lo tanto se utilizará la Figura 9.19.

Por lo tanto los factores de deflexión para cada neumático son los siguientes:

Para el neumático A,  $F = 0.23$

Para el neumático B,  $F = 0.20$

Para el neumático C,  $F = 0.17$

Para el neumático D,  $F = 0.15$

Finalmente se calculan las deflexiones con la ecuación (55):

Para el neumático A,  $W_A = (100 \text{ psi}) (12.61) (0.23) / (20,000 \text{ psi}) = 0.0144$  in

Para el neumático B,  $W_B = (100 \text{ psi}) (12.61) (0.20) / (20,000 \text{ psi}) = 0.0119$  in

Para el neumático C,  $W_C = (100 \text{ psi}) (12.61) (0.17) / (20,000 \text{ psi}) = 0.0107$  in

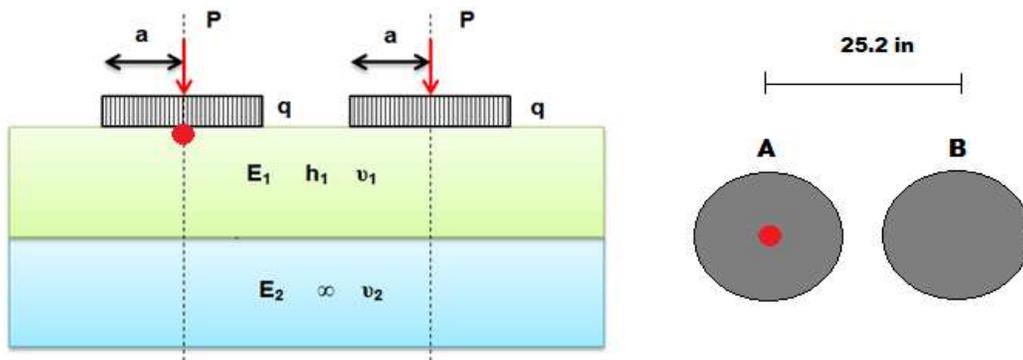
Para el neumático D,  $W_D = (100 \text{ psi}) (12.61) (0.15) / (20,000 \text{ psi}) = 0.00945$  in

Deflexión total =  $0.0144$  in +  $0.0119$  in +  $0.0107$  in +  $0.00945$  in =  $0.04645$  in

Deflexión total =  $0.04645$  in

### Ejemplo 10.- Principio de Superposición para eje dual.

Utilizando el principio de superposición encontrar la deflexión total del sistema bicapa mostrado en la figura considerando un eje dual.



$$h_1 = 25.2 \text{ in}$$

$$a = 12.61 \text{ in}$$

$$E_1 = 100,000 \text{ psi}$$

$$E_2 = 20,000 \text{ psi}$$

$$\nu_1 = \nu_2 = 0.50$$

$$P = 50,000 \text{ lb}$$

$$q = 100 \text{ psi}$$

#### Solución:

Para aplicar el principio de superposición, se considerarán por separado los efectos que tienen cada uno de los neumáticos sobre el punto rojo. En términos generales la deflexión total de la estructura en el punto A será:

$$\text{Deflexión total} = \text{Deflexión neumático A} + \text{Deflexión neumático B}$$

Por tratarse de un sistema bicapa, se hará uso de las soluciones gráficas del Dr. Huang (1969) donde se consideran los factores de deflexión.

Para calcular dichos factores de daño, se necesita definir el valor de  $r$  a partir del punto rojo (neumático A).

Para el neumático A,  $r = 0$ .

Para el neumático B,  $r = 25.2$  in

Ahora se obtienen los valores geométricos  $r/a$  y  $h1/a$ :

Para el neumático A,  $r/a = 0/12.61 = 0$

Para el neumático B,  $r/a = 25.2/12.61 = 2.0$

$h1/a = 25.2/12.61 = 2.0$

$E1/E2 = 100,000/20,000 = 5$ , por lo tanto se utilizará la Figura 9.16.

Por lo tanto los factores de deflexión para cada neumático son los siguientes:

Para el neumático A,  $F = 0.48$

Para el neumático B,  $F = 0.35$

Finalmente se calculan las deflexiones con la ecuación (55):

Para el neumático A,  $W_A = (100 \text{ psi}) (12.61) (0.48) / (20,000 \text{ psi}) = 0.0302$  in

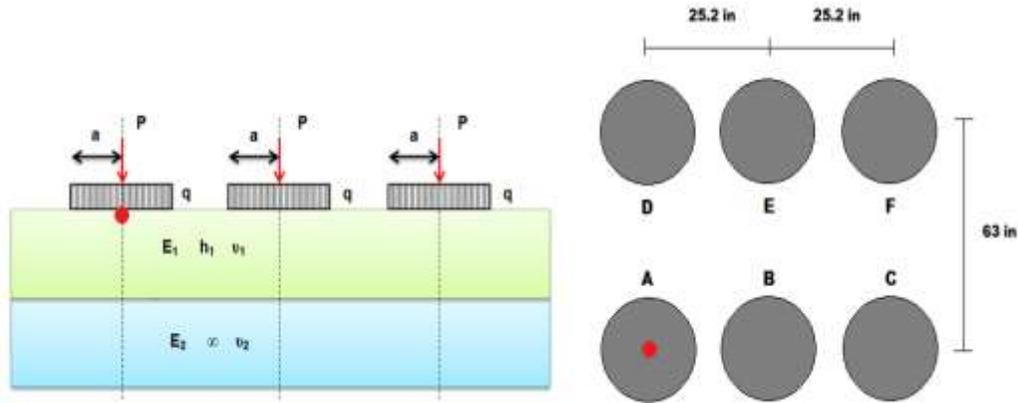
Para el neumático B,  $W_B = (100 \text{ psi}) (12.61) (0.35) / (20,000 \text{ psi}) = 0.0220$  in

Deflexión total =  $0.0302$  in +  $0.0220$  in =  $0.0522$  in

Deflexión total =  $0.0522$  in

### Ejemplo 11.- Superposición eje trídem (deflexión máxima)

Utilizando el principio de superposición encontrar la deflexión total del sistema bicapa mostrado en la figura considerando un eje trídem.



$$h_1 = 25.2 \text{ in}$$

$$a = 12.61 \text{ in}$$

$$E_1 = 500,000 \text{ psi}$$

$$E_2 = 20,000 \text{ psi}$$

$$u_1 = u_2 = 0.50$$

$$P = 50,000 \text{ lb}$$

$$q = 100 \text{ psi}$$

#### Solución:

Para aplicar el principio de superposición, se considerarán por separado los efectos que tienen cada uno de los neumáticos sobre el punto rojo. En términos generales la deflexión total de la estructura en el punto A será:

Deflexión total = Deflexión neumático A + Deflexión neumático B + Deflexión neumático C + Deflexión neumático D + Deflexión neumático E + Deflexión neumático F

Por tratarse de un sistema bicapa, se hará uso de las soluciones gráficas del Dr. Huang (1969) donde se consideran los factores de deflexión.

Para calcular dichos factores de daño, se necesita definir el valor de  $r$  a partir del punto rojo (neumático A).

Para el neumático A,  $r = 0$ .

Para el neumático B,  $r = 25.2$  in

Para el neumático C,  $r = 50.4$  in

Para el neumático D,  $r = 63$  in

Para el neumático E, mediante el teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos se obtiene  $r = 67.85$  in

Para el neumático F, mediante el teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos se obtiene  $r = 80.67$  in

Ahora se obtienen los valores geométricos  $r/a$  y  $h1/a$ :

Para el neumático A,  $r/a = 0/12.61 = 0$

Para el neumático B,  $r/a = 25.2/12.61 = 2.0$

Para el neumático C,  $r/a = 50.4/12.61 = 4.0$

Para el neumático D,  $r/a = 63/12.61 = 5$

Para el neumático E,  $r/a = 67.85/12.61 = 5.38$

Para el neumático F,  $r/a = 80.67/12.61 = 6.39$

$h1/a = 25.2/12.61 = 2.0$

$E1/E2 = 500,000/20,000 = 25$ , por lo tanto se utilizará la Figura 9.18

Por lo tanto los factores de deflexión para cada neumático son los siguientes:

Para el neumático A,  $F = 0.31$

Para el neumático B,  $F = 0.25$

Para el neumático C,  $F = 0.19$

Para el neumático D,  $F = 0.15$

Para el neumático E,  $F = 0.17$

Para el neumático F,  $F = 0.10$

Finalmente se calculan las deflexiones con la ecuación (55):

Para el neumático A,  $WA = (100 \text{ psi}) (12.61) (0.31) / (20,000 \text{ psi}) = 0.0195$  in

Para el neumático B,  $WB = (100 \text{ psi}) (12.61) (0.25) / (20,000 \text{ psi}) = 0.0157 \text{ in}$

Para el neumático C,  $WC = (100 \text{ psi}) (12.61) (0.19) / (20,000 \text{ psi}) = 0.0119 \text{ in}$

Para el neumático D,  $WD = (100 \text{ psi}) (12.61) (0.15) / (20,000 \text{ psi}) = 0.00945 \text{ in}$

Para el neumático E,  $WE = (100 \text{ psi}) (12.61) (0.17) / (20,000 \text{ psi}) = 0.0107 \text{ in}$

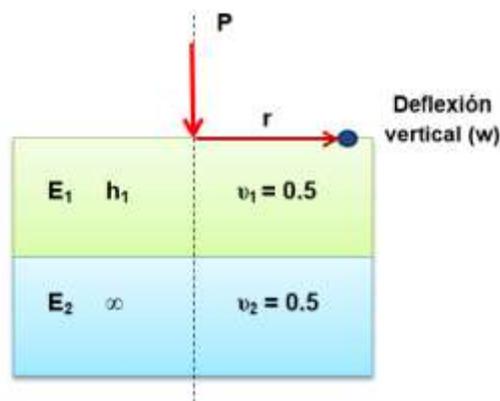
Para el neumático F,  $WF = (100 \text{ psi}) (12.61) (0.10) / (20,000 \text{ psi}) = 0.00630 \text{ in}$

Deflexión total =  $0.0195 \text{ in} + 0.0157 \text{ in} + 0.0119 \text{ in} + 0.00945 \text{ in} + 0.0107 \text{ in} + 0.00630 \text{ in} = 0.07355 \text{ in}$

Deflexión total =  $0.07355 \text{ in}$

## 9.5 Swift (1972)

Swift (1972) del Instituto de Transporte de Texas desarrolló una ecuación muy sencilla para encontrar la deflexión total de una estructura de pavimento bicapa. La expresión que dedujo es aplicable para cargas puntuales (cargas de neumáticos concentrados) no distribuidas como lo manejan otros autores en su mayoría. Una ventaja notable de este método sobre los que consideran cargas distribuidas, es que permite calcular la deflexión fuera del eje de simetría de la carga considerada. Para este sistema, Swift considera relaciones de Poisson de 0.5 para ambas capas y rugosidad total en la interface. Ver Figura 9.27.



**Figura 9.27 Modelo bicapa considerado por Swift (1972) para el cálculo de deflexiones con cargas puntuales.**

Fuente: Elaboración propia.

Las ecuaciones (56), (57) y (58) se aplican para obtener la deflexión del sistema bicapa analizado por Swift (1972).

$$w = \frac{3P}{4\pi} \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{E_1} + \left( \frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \left( \frac{r}{L} + \frac{rx^2}{2L^3} + \frac{3rx^4}{2L^5} \right) \right] \quad (56)$$

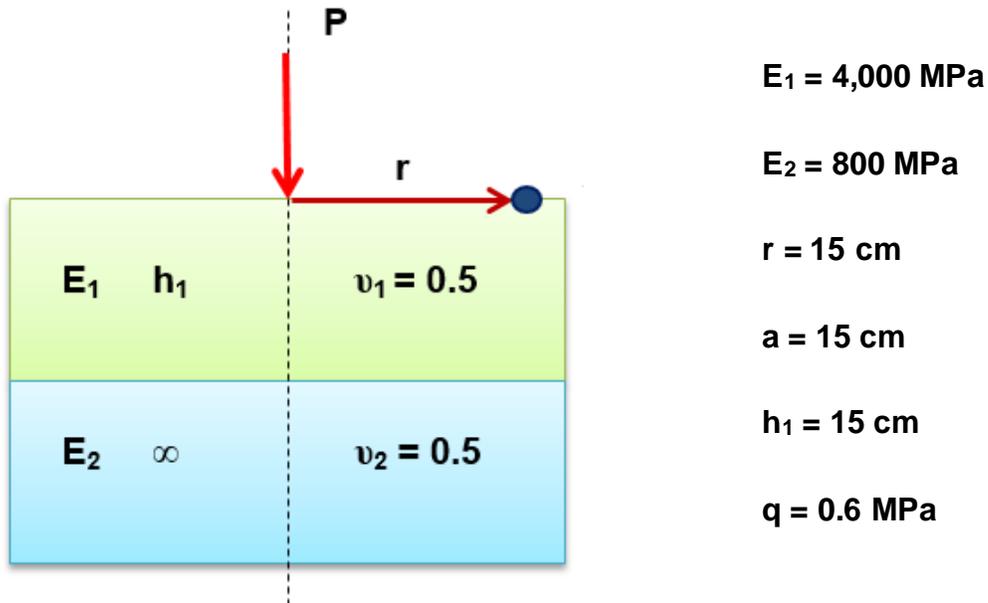
$$L = \sqrt{r^2 + x^2} \quad (57)$$

$$x = 2 h_1 \sqrt[3]{\frac{E_1 + 2E_2}{3E_2}} \quad (58)$$

Puede advertirse en las expresiones de Swift que la solución debajo de la carga está indeterminada con  $1/0$  ( $r/0$ ).

### Ejemplo 11. Swift

Utilizando las soluciones de Swift (1972) encontrar las deflexiones del sistema bicapa mostrado, bajo las siguientes condiciones. Compararlo con el método de Huang (1969) para carga circular distribuida visto en el ejemplo 8.



#### Solución:

Para facilitar los cálculos, se manejarán las unidades en kilogramos y en cm.

$$E_1 = 4,000 \text{ MPa } (40,789 \text{ kg/cm}^2)$$

$$E_2 = 800 \text{ MPa } (8,158 \text{ kg/cm}^2)$$

$$r = 15 \text{ cm}$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$h_1 = 15 \text{ cm}$$

$$q = 0.6 \text{ MPa } (6.12 \text{ kg/cm}^2)$$

$$\text{Área} = \pi (15)^2 = 706.85 \text{ cm}^2$$

$$P \text{ (kg)} = (6.12 \text{ kg/cm}^2) (706.85 \text{ cm}^2) = 4,326 \text{ kg}$$

$$x = 2 h_1 \sqrt[3]{\frac{E_1 + 2E_2}{3E_2}} = 2 (15) \sqrt[3]{\frac{(40,789) + 2(8,158)}{3(8,158)}} = 39.79 \text{ cm}$$

$$L = \sqrt{r^2 + x^2} = \sqrt{15^2 + 39.79^2} = 42.52 \text{ cm}$$

$$w = \frac{3P}{4\pi} \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{E_1} + \left( \frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \left( \frac{r}{L} + \frac{rx^2}{2L^3} + \frac{3rx^4}{2L^5} \right) \right]$$

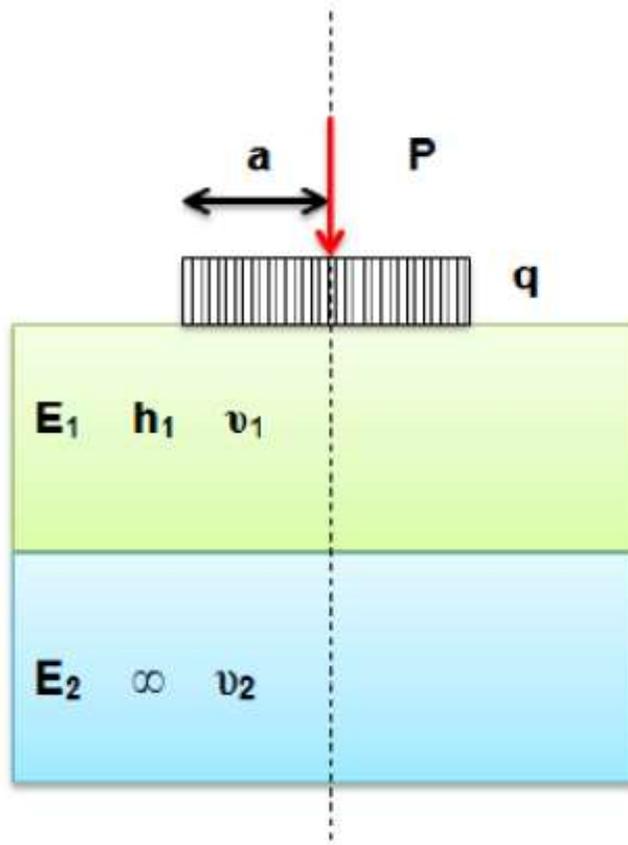
$$w = \frac{3(4,326)}{4\pi} \frac{1}{(15)} \left[ \frac{1}{40,789} + \left( \frac{1}{8,158} - \frac{1}{40,789} \right) \left( \frac{15}{42.52} + \frac{(15)(39.79)^2}{2(42.52)^3} + \frac{3(15)(39.79)^4}{2(42.52)^5} \right) \right]$$

$$w = 0.007851 \text{ cm}$$

El valor obtenido con Huang (1969) es de 0.007538 cm, aproximadamente 4% por abajo del valor de Swift pero muy preciso para cálculos deflectométricos en pavimentos.

## 9.6 Caracterización de materiales)

Raad y Marhamo (1991) desarrollaron una serie de gráficos mediante las soluciones de Burmister (programa CHEV5L) para calcular esfuerzos, deformaciones y deflexiones en un sistema bicapa justo debajo del eje de simetría de la carga circular. Ver Figura 10.28.



**Figura 10.28 Sistema estructural de dos capas considerado por Raad y Marhamo (1991).**

Fuente: Elaboración propia.

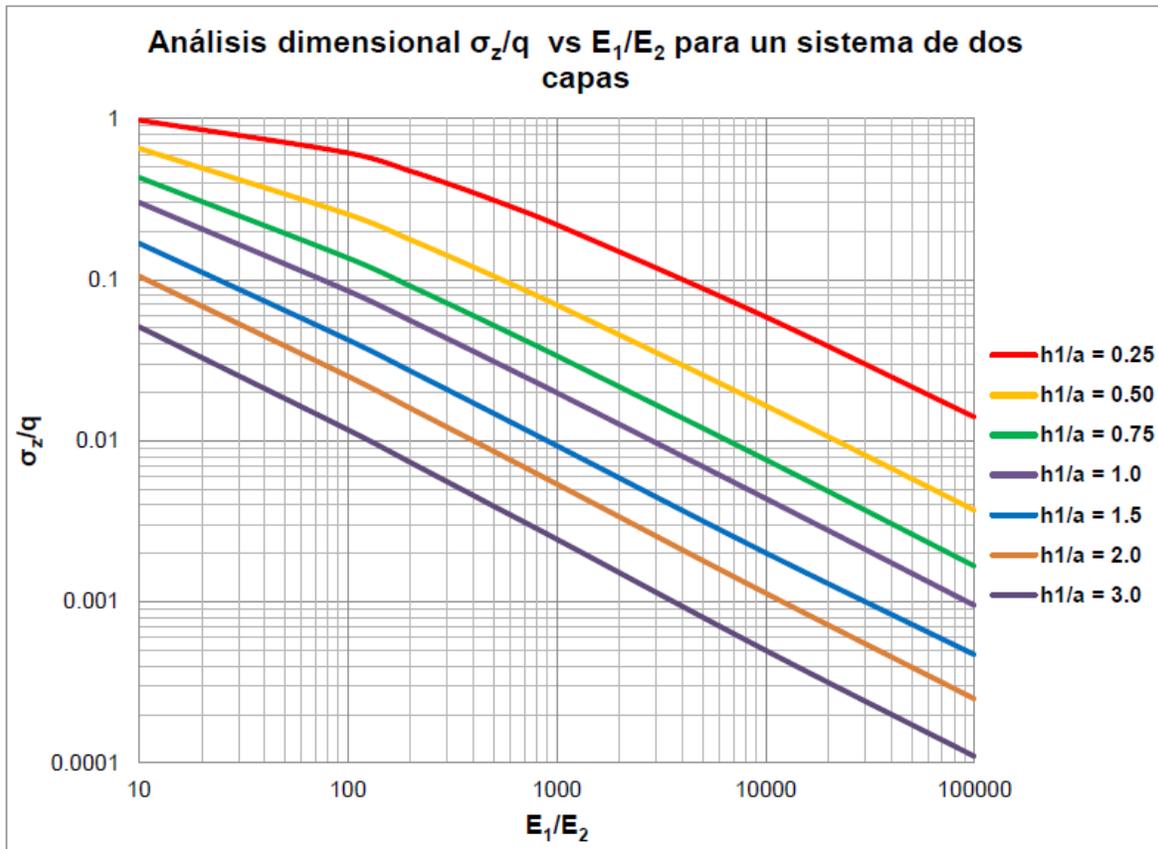
Para estos gráficos se tomaron las siguientes condiciones:

$h_1/a = 0.25, 0.50, 0.75, 1, 3, 4, 5, 5.5, 6$  (características pertenecientes a la geometría del neumático y al espesor de la primera capa).

$E_1/E_2 = 10, 100, 1000, 10000, 100000$  (características pertenecientes a la relación modular de las 2 capas de pavimento consideradas)

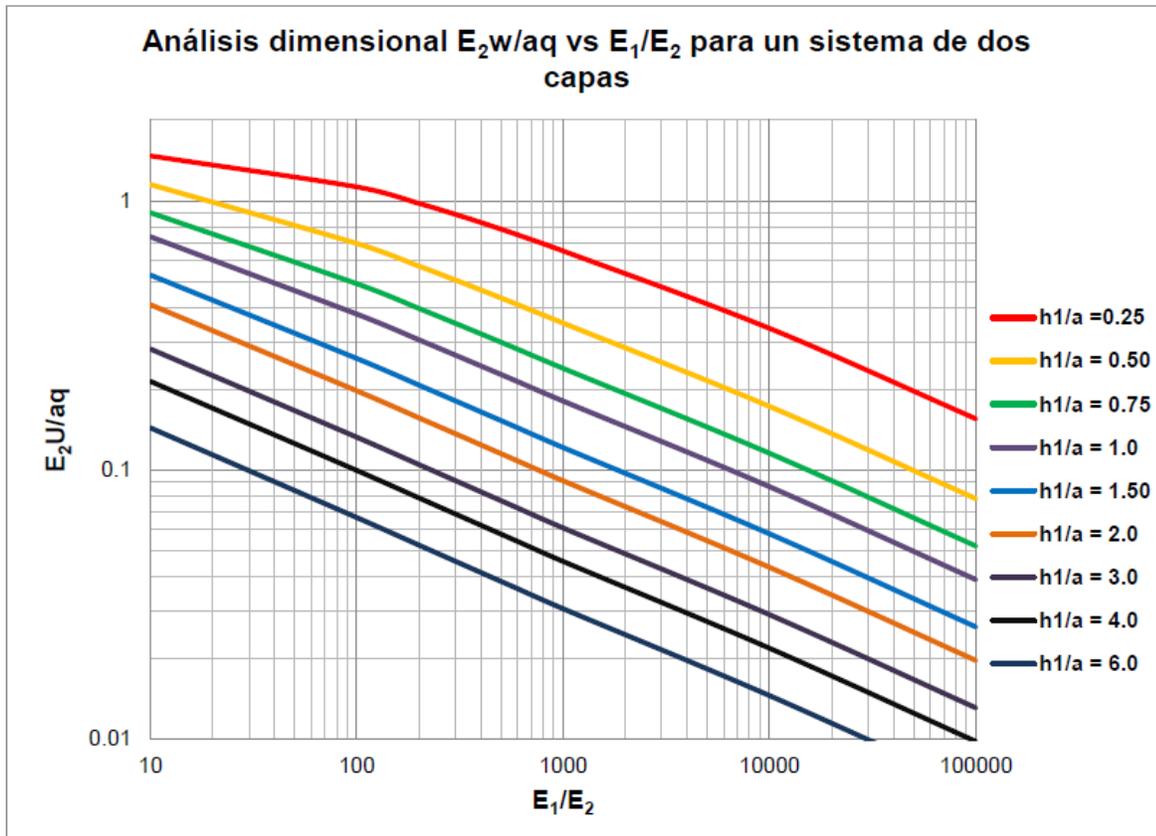
$\nu_1 = 0.30, \nu_2 = 0.45$ . Aquí se consideró conveniente dejar estos dos valores fijos dado su baja sensibilidad en el diseño de pavimento.

Con ello presentaron los gráficos mostrados en la Figura 10.29, Figura 10.30 y Figura 10.31 donde se obtienen los esfuerzos normales, las deflexiones y la deformación radial respectivamente.



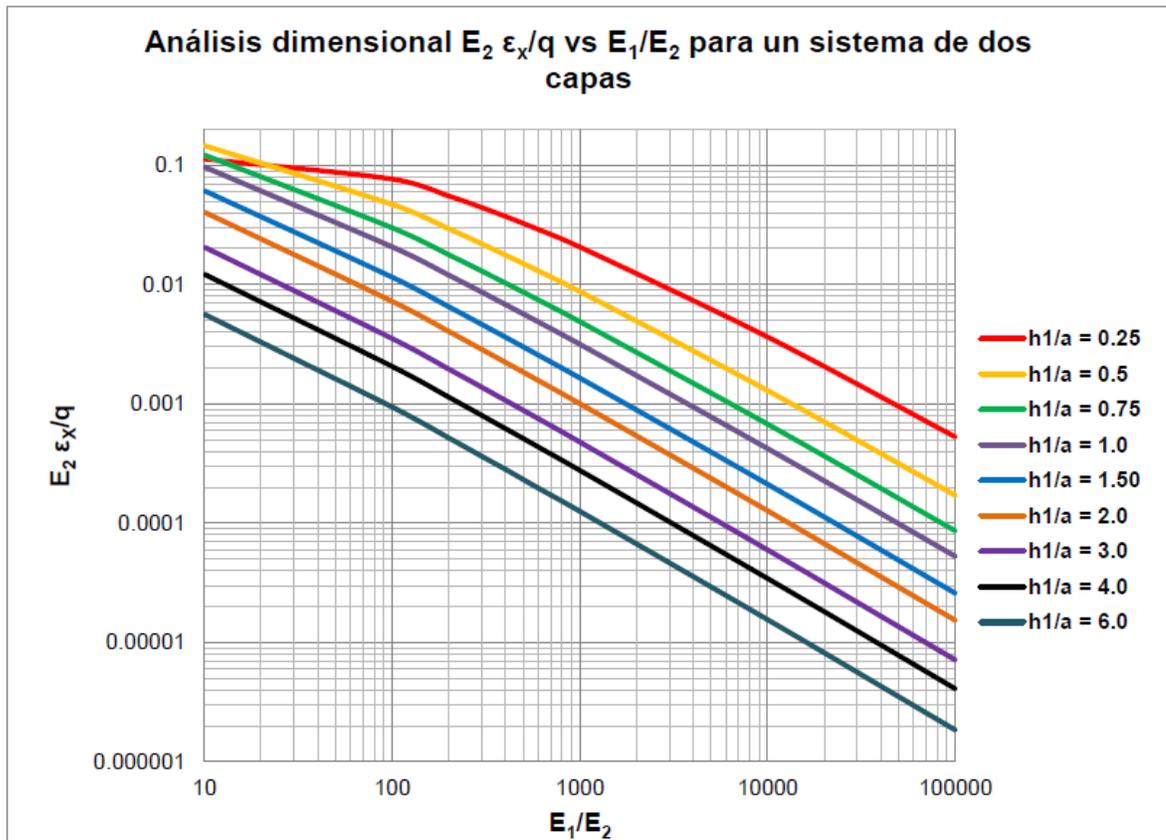
**Figura 9.28 Análisis dimensional para obtención de esfuerzos normales en un sistema de dos capas según Raad y Marhamo (1991).**

Fuente: Elaboración propia.



**Figura 9.29 Análisis dimensional para obtención de deflexiones en un sistema de dos capas según Raad y Marhamo (1991).**

Fuente: Elaboración propia.

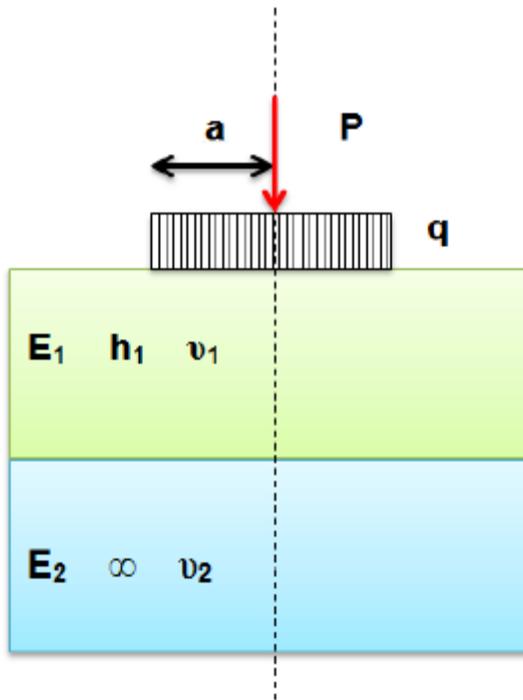


**Figura 9.30 Análisis dimensional para obtención de deformaciones radiales en un sistema de dos capas según Raad y Marhamo (1991).**

Fuente: Elaboración propia.

### Ejemplo 12.- Raad y Marhamo

Utilizando las soluciones de Raad y Marhamo (1991) encontrar el esfuerzo normal, la deflexión y la deformación radial del siguiente sistema bicapa.



$$h_1 = 7.5 \text{ cm}$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$q = 0.6 \text{ MPa}$$

$$E_1 = 4,000 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 400 \text{ MPa}$$

#### Solución:

Primeramente se calcula la relación  $h_1/a$ . Para este caso se tiene  $7.5/15 = 0.5$ .

A continuación se calcula la relación modular  $E_1/E_2$ . Para este caso se tiene  $4,000/400 = 10.0$ .

- Esfuerzo normal. De la Figura 9.28 se ingresa con la línea correspondiente a la relación modular y a la relación  $h_1/a$ .

$$\sigma_z/q = \text{Intercepción}$$

De esta gráfica se obtiene el valor de intercepción de 0.65.

$$\sigma_z = (0.65)(0.6 \text{ MPa}) = 0.39 \text{ MPa}$$

- Deflexión. De la Figura 9.29 se ingresa con la línea correspondiente a la relación modular y a la relación  $h_1/a$ .

$$(\text{Deflexión}) (E_2)/(a) (q) = (\text{Intercepción})$$

De esta gráfica se obtiene el valor de intercepción de 1.2.

$$(\text{Deflexión}) = (\text{Intercepción}) (a) (q)/ (E_2)$$

$$\text{Deflexión} = (1.2) (15 \text{ cm}) (0.6 \text{ MPa})/ (400 \text{ MPa})$$

$$\text{Deflexión} = 0.027 \text{ cm}$$

- Deformación radial. De la Figura 9.30 se ingresa con la línea correspondiente a la relación modular y a la relación  $h_1/a$ .

$$(\text{Deflexión}) (E_2)/(a) (q) = (\text{Intercepción})$$

De esta gráfica se obtiene el valor de intercepción de 0.15.

$$\varepsilon_x = (\text{Intercepción}) (q)/ (E_2)$$

$$\varepsilon_x = (0.15) (0.6 \text{ MPa})/ (400 \text{ MPa})$$

$$\varepsilon_x = 0.000225 \text{ micras}$$



## **10 Sistemas estructurales de 3 capas (Tricapa)**

---

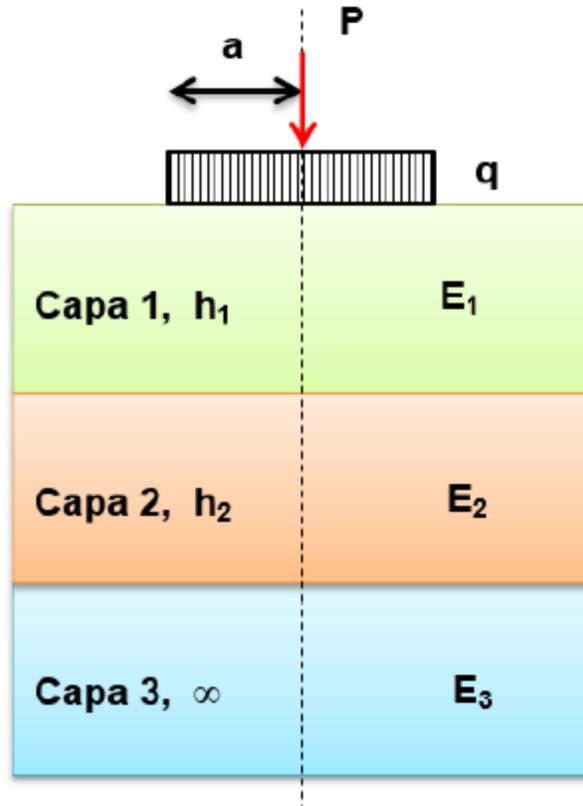
Los sistemas estructurales de tres capas constituyen las secciones de pavimento más empleadas. Estas secciones están constituidas por una capa superior (capa asfáltica); una capa intermedia constituida generalmente por materiales granulares no estabilizados y una tercera capa correspondiente a la subrasante.

Las hipótesis para el estudio de los sistemas tricapa son las siguientes:

- Las capas son homogéneas, isotrópicas y linealmente elásticas.
- Todas las capas tienen espesores definidos a excepción de la capa inferior que tiene un espesor infinito.
- Todas las capas son infinitas en sentido horizontal.
- Las capas están caracterizadas por el módulo de elasticidad y la relación de poisson.
- En la interface se desarrolla completa fricción entre las capas.

### **10.1 Acum y Fox (1951)**

Acum y Fox (1951) desarrollaron una serie de tablas para calcular esfuerzos normales y radiales en sistemas de pavimentos de tres capas. Las soluciones planteadas consideran el cálculo sólo en el eje de simetría del área circular cargada. Ver Figura 10.1.



**Figura 10.1 Modelo tricapa considerado por Acum y Fox (1951).**

Los autores obtienen las relaciones de esfuerzo en función de distintas geometrías de espesores de capas y cargas de contacto y de diferentes relaciones modulares.

$$a_1 = 1, 0.5$$

$$H = 2, 1, 0.5, 0.25$$

$$k_1 = 5, 10, 20, 50, 100, 500$$

$$k_2 = 1, 5, 10, 50, 100$$

$$a_1 = a/h_2$$

$$H = h_1/h_2$$

$$k_1 = E_1/E_2$$

$$k_2 = E_2/E_3$$

La Tabla 10.1, Tabla 10.2, Tabla 10.3, Tabla 10.4, Tabla 10.5, Tabla 10.6, Tabla 10.7 y Tabla 10.8 muestra los factores de esfuerzo para las condiciones

consideradas por Acum y Fox. Más adelante en el método de Jones (1962) se profundizará con su utilización.

**Tabla 10.1 Factores de esfuerzo recomendados por Acum y Fox (1951).  
Para  $H = 2.0$  y  $a_1 = 1$ .**

H = 2, a <sub>1</sub> = 1												
k <sub>1</sub>	5		10		20		50		100		500	
k <sub>2</sub>												
5	9.51	3.64	6.00	2.59	3.66	1.79	1.87	1.05	1.11	0.690	0.349	0.261
	72.7	15.30	93.90	10.20	113.00	6.44	136.00	3.30	151.00	1.90	187.00	0.513
	14.50	3.06	9.38	2.04	5.66	1.29	2.73	0.66	1.51	0.380	0.374	0.101
10	8.24	2.38	5.06	1.69	3.01	1.16	1.47	0.684	0.852	0.451	0.252	0.169
	79.30	18.70	103.00	12.30	124.00	7.68	148.00	3.85	164.00	2.21	203.00	0.586
	15.80	1.86	10.30	1.23	6.21	0.77	2.96	0.385	1.64	0.221	0.405	0.059
50	6.74	0.860	3.97	0.612	2.23	0.424	1.01	0.252	0.554	0.166		
	95.20	26.00	124.00	16.90	149.00	10.40	178.00	5.12	198.00	2.94		
	19.00	0.519	12.40	0.339	7.44	0.208	3.55	0.103	1.98	0.059		
100	6.43	0.552	3.75	0.397	2.08	0.277	0.921	0.163				
	102.00	29.00	133.00	18.90	161.00	11.60	193.00	5.75				
	20.40	0.290	13.30	0.189	8.04	0.118	3.85	0.058				

**Tabla 10.2.- Factores de esfuerzo recomendados por Acum y Fox (1951).  
Para  $H = 1.0$  y  $a_1 = 1$ .**

H = 1, a <sub>1</sub> = 1												
k <sub>1</sub>	5		10		20		50		100		500	
k <sub>2</sub>												
5	30.30	9.22	20.80	7.14	13.50	5.33	7.26	3.44	4.43	2.36	1.38	0.921
	162.00	37.80	229.00	28.10	300.00	19.70	390.00	11.40	457.00	7.10	594.00	2.11
	32.30	7.56	22.90	5.63	15.00	3.96	7.84	2.29	4.57	1.42	1.19	0.420
10	27.90	6.11	18.70	4.73	11.80	3.53	6.13	2.26	3.60	1.55	1.04	0.599
	173.00	47.10	250.00	35.00	330.00	24.40	431.00	13.90	502.00	8.55	645.00	2.46
	34.70	4.70	25.00	3.50	16.580	2.44	8.66	1.39	5.02	0.86	1.29	0.245
50	25.00	2.23	16.10	1.74	9.76	1.30	4.68	0.833	2.60	0.572		
	201.00	68.20	298.00	50.90	399.00	35.30	523.00	19.50	606.00	11.80		
	40.40	1.37	29.80	1.02	20.00	0.70	10.50	0.392	6.05	0.236		
100	24.30	1.42	15.60	1.11	9.35	0.839	4.40	0.540				
	213.00	75.10	319.00	57.80	428.00	39.80	563.00	22.00				
	42.60	0.76	31.80	0.57	21.40	0.400	11.30	0.22				

**Tabla 10.3 Factores de esfuerzo recomendados por Acum y Fox (1951).  
Para  $H = 0.5$  y  $a_1 = 1$ .**

H = 0.5, $a_1 = 1$												
$k_1$	5		10		20		50		100		500	
$k_2$												
5	66.40	18.10	53.40	15.60	39.90	12.90	24.70	9.42	16.20	7.06	5.48	3.13
	215.0	72.80	366.0	62.00	561.0	49.80	868.00	34.0	1116.0	23.8	1687.0	8.60
	43.00	14.60	36.70	12.40	28.10	10.00	17.40	6.81	11.20	4.77	3.37	1.72
10	63.40	12.10	50.40	10.40	37.00	8.59	22.20	6.29	14.20	4.72	4.43	2.08
	223.0	91.70	396.0	78.00	615.0	62.80	963.00	42.9	1244.0	29.8	1866.0	10.5
	44.60	9.20	39.40	7.81	30.70	6.28	19.30	4.29	12.40	2.98	3.73	1.05
50	59.80	4.36	46.70	3.74	33.50	3.14	19.10	2.34	11.60			
	239.0	134.0	449.0	115.0	730.0	93.30	1180.0	63.9	1541.0			
	47.80	2.69	44.90	2.30	36.50	1.87	23.60	1.28	15.40			
100	59.10	2.77	46.00	2.37	32.80	2.00	18.50	1.51				
	244.0	152.0	469.0	130.0	776.0	106.0	1270.0	73.1				
	48.80	1.52	46.90	1.30	38.70	1.06	25.40	0.73				

**Tabla 10.4 Factores de esfuerzo recomendados por Acum y Fox (1951).  
Para  $H = 0.25$  y  $a_1 = 1$ .**

H = 0.25, $a_1 = 1$												
$k_1$	5		10		20		50		100		500	
$k_2$												
5	94.70	26.50	90.70	24.80	82.10	22.80	64.20	19.40	49.00	16.30	20.80	9.19
	127.0	104.0	301.0	99.00	614.0	90.70	1273.0	75.20	1966.	61.20	3991	30.1
	25.40	20.90	30.20	19.80	30.70	18.20	25.50	15.00	19.70	12.20	8.00	6.03
10	92.80	18.00	88.30	16.60	79.60	15.20	61.20	12.90	45.90	10.90	18.30	6.19
	112.0	134.0	308.0	125.0	657.0	115.0	1404.0	95.60	2195.	77.90	4500.	38.0
	22.60	13.40	30.60	12.50	33.00	11.50	28.10	9.56	21.90	7.77	9.00	3.82
50	90.20	6.52	85.50	5.91	76.40	5.38	57.60	4.63	42.20	3.97		
	70.80	197.0	303.0	185.0	725.0	169.0	1657.0	142.0	2668.	117.0		
	14.20	3.94	30.20	3.69	36.40	3.40	33.10	2.85	26.60	2.33		
100	89.70	4.13	84.90	3.71	75.80	3.37	57.00	2.92				
	50.80	223.0	295.0	208.0	745.0	191.0	1745.0	161.0				
	10.20	2.23	29.40	2.08	37.40	1.91	34.90	1.61				

**Tabla 10.5 Factores de esfuerzo recomendados por Acum y Fox (1951).  
Para H = 2.0 y a<sub>1</sub> = 0.5.**

H = 2, a <sub>1</sub> = 0.5												
k <sub>1</sub>	5		10		20		50		100		500	
k <sub>2</sub>												
5	2.85	0.950	1.76	0.670	1.06	0.459	0.522	0.268	0.307	0.175	0.093	0.066
	21.50	4.09	27.20	2.70	32.40	1.69	38.20	0.853	42.10	0.492	50.80	0.131
	4.30	0.817	2.72	0.54	1.62	0.338	0.765	0.170	0.421	0.098	0.101	0.026
10	2.51	0.621	1.52	0.435	0.884	0.297	0.422	0.174	0.241	0.114	0.068	0.042
	23.10	4.96	29.40	3.24	35.00	2.01	41.20	0.999	45.20	0.570	54.90	0.149
	4.62	0.495	2.94	0.323	1.75	0.201	0.825	0.100	0.454	0.057	0.110	0.015
50	2.12	0.220	1.23	0.155	0.682	0.108	0.305	0.064	0.165	0.042		
	17.10	6.80	34.60	4.40	41.20	2.69	48.50	1.32	53.70	0.753		
	5.42	0.136	3.47	0.088	2.06	0.054	0.971	0.026	0.537	0.015		
100	2.02	0.140	1.17	0.101	0.644	0.070	0.281	0.041				
	28.70	7.56	37.00	4.90	44.10	2.99	52.30	1.47				
	5.74	0.076	3.70	0.049	2.21	0.030	1.05	0.015				

**Tabla 10.6 Factores de esfuerzo recomendados por Acum y Fox (1951).  
Para H = 1.0 y a<sub>1</sub> = 0.5.**

H = 1, a <sub>1</sub> = 0.5												
k <sub>1</sub>	5		10		20		50		100		500	
k <sub>2</sub>												
5	12.00	2.55	7.72	1.93	4.74	1.42	2.39	0.899	1.40	0.610	0.404	0.235
	66.10	10.90	87.10	7.89	107.00	5.43	132.00	3.07	149.00	1.89	184.00	0.550
	13.20	2.18	8.69	1.58	5.36	1.09	2.64	0.616	1.49	0.376	0.368	0.111
10	11.30	1.66	7.13	1.26	4.29	0.929	2.08	0.586	1.18	0.400	0.318	0.152
	69.10	13.30	92.30	9.68	115.00	6.64	142.00	3.71	160.00	2.26	197.00	0.637
	13.80	1.33	9.22	0.969	5.74	.664	2.84	0.371	1.60	0.227	0.394	0.064
50	10.50	0.586	6.46	0.453	3.74	0.336	1.71	0.213	0.927	0.145		
	76.10	18.70	104.00	13.70	132.00	9.39	165.00	5014	186.00	3.08		
	15.20	0.374	10.40	0.275	6.61	0.189	3.30	0.103	1.86	0.062		
100	10.30	0.370	6.32	0.287	3.64	0.215	1.64	0.137				
	79.00	21.10	109.00	15.40	140.00	10.60	175.00	5.75				
	15.80	0.210	10.90	0.154	6.99	0.106	3.50	0.057				

**Tabla 10.7 Factores de esfuerzo recomendados por Acum y Fox (1951).  
Para  $H = 0.5$  y  $a_1 = 0.5$ .**

H = 0.5, a <sub>1</sub> = 0.5												
k <sub>1</sub>	5		10		20		50		100		500	
k <sub>2</sub>												
5	36.20	5.41	25.60	4.52	17.10	3.64	9.41	2.58	5.76	1.89	1.73	0.815
	144.00	23.20	204.00	19.00	270.00	14.70	363.00	9.69	433.00	6.63	583.00	2.31
	28.80	4.64	20.40	3.81	13.50	2.94	7.26	1.94	4.32	1.32	1.16	0.462
10	35.40	3.52	24.70	2.94	16.30	2.39	8.71	1.69	5.20	1.25	1.46	0.538
	147.00	28.40	211.00	23.30	284.00	18.20	388.00	12.00	465.00	8.18	627.00	2.79
	29.40	2.85	21.10	2.34	14.20	1.83	7.76	1.20	4.65	0.818	1.26	0.279
50	34.20	1.20	23.60	1.01	15.30	0.835	7.88	0.612	4.51	0.457		
	151.00	39.60	226.00	33.00	314.00	26.10	443.00	17.40	540.00	11.80		
	30.10	0.794	22.50	0.659	15.70	0.522	8.87	0.348	5.40	0.237		
100	33.90	0.748	23.40	0.633	15.10	0.526	7.72	0.390				
	152.00	44.10	230.00	36.80	325.00	29.40	466.00	19.70				
	30.30	0.441	23.00	0.369	16.30	0.294	9.32	0.197				

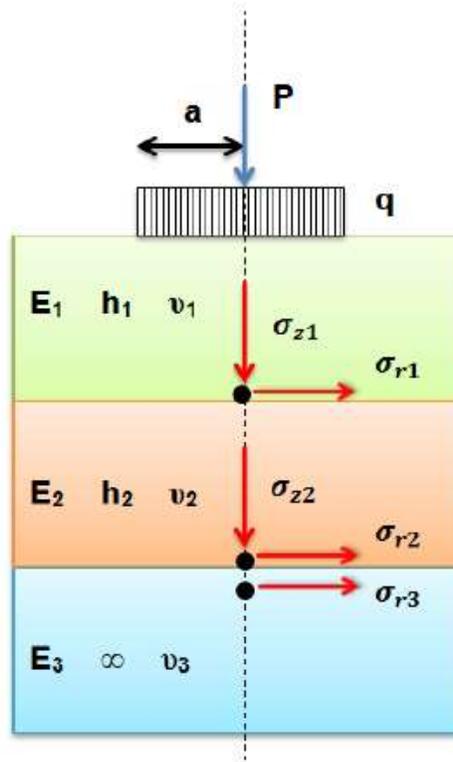
**Tabla 10.8 Factores de esfuerzo recomendados por Acum y Fox (1951).  
Para  $H = 0.25$  y  $a_1 = 0.5$ .**

H = 0.25, a <sub>1</sub> = 0.5												
k <sub>1</sub>	5		10		20		50		100		500	
k <sub>2</sub>												
5	74.10	8.79	61.40	8.03	47.50	7.15	30.80	5.80	20.90	4.72	7.30	2.50
	189.0	38.0	312.0	34.7	476.0	30.5	747.0	23.8	984.00	18.6	1582.0	8.52
	37.90	7.61	31.30	6.95	23.80	6.10	15.00	4.77	9.87	3.72	3.17	1.71
10	73.40	5.70	60.60	5.17	46.60	4.60	29.80	3.76	19.90	3.08	6.61	1.65
	186.0	46.5	315.0	42.5	489.0	37.4	783.0	29.5	1045.0	23.1	17.13	10.6
	37.10	4.65	31.50	4.25	24.50	3.74	15.60	2.95	10.50	2.31	3.43	1.06
50	72.40	1.90	59.60	1.71	45.60	1.52	28.70	1.28	18.80	1.07		
	175.0	63.9	314.0	58.4	508.0	51.9	850.0	41.7	1167.0	33.3		
	34.80	1.28	31.30	1.71	25.40	1.04	17.00	0.83	11.67	0.65		
100	72.40	1.17	59.40	1.04	45.40	0.934	28.50	0.791				
	170.00	70.70	311.00	64.50	513.00	57.50	872.00	46.60				
	34.00	0.707	31.20	0.645	25.70	0.575	17.40	0.466				

## 10.2 Caracterización de materiales

En 1962 Jones siguiendo los trabajos de Acum y Fox (1951) dio a conocer una propuesta para calcular los esfuerzos normales y radiales en sistemas de

pavimentos de tres capas. Jones partió de un análisis dimensional donde considera relaciones geométricas entre la estructura del pavimento como lo son espesores y las debidas debido a las cargas como el radio de los neumáticos. Así mismo considera relaciones entre las propiedades elásticas entre cada una de las capas. Ver Figura 10.2.



**Figura 10.2 Solución del sistema tricapa propuesto por Jones (1962).**

Las suposiciones básicas para el modelo tricapa presentado por Jones son las siguientes:

- El material de las capas que conforman el sistema es homogéneo, isotrópico y elástico.
- Los espesores de la primera y segunda capa tienen espesor finito y el espesor de la tercera capa es semi-infinito. Todos los espesores se extienden infinitamente de manera horizontal.
- El contacto entre cada capa (interface) es continuo y permanente.
- Todas las capas tienen una relación de Poisson igual a 0.5.
- Los esfuerzos son simétricos.

El método tricapa de Jones parte de un análisis de sensibilidad donde se toman en cuenta los siguientes parámetros (ver ecuaciones (59), (60), (61) y (62)).

$$k_1 = \frac{E_1}{E_2} \quad (59)$$

$$k_2 = \frac{E_2}{E_3} \quad (60)$$

$$A = \frac{a}{h_2} \quad (61)$$

$$H = \frac{h_1}{h_2} \quad (62)$$

Los esfuerzos verticales  $\sigma_{z1}$  y  $\sigma_{z2}$  se obtienen directamente de la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** (localizadas en los anexos de este documento) y son función de ZZ1 y ZZ2 multiplicados por la carga uniformemente distribuida q. Ver ecuaciones (63) y (64).

$$\sigma_{z1} = q(ZZ1) \quad (63)$$

$$\sigma_{z2} = q(ZZ2) \quad (64)$$

Los esfuerzos horizontales  $\sigma_{r1}$  y  $\sigma_{r2}$  se obtienen con ayuda de los factores de esfuerzo de las tablas y con los verticales hallados previamente según se vio anteriormente se tienen las ecuaciones (65) y (67) para su obtención:

$$\sigma_{z1} - \sigma_{r1} = q(ZZ1 - RR1) \quad (65)$$

$$\sigma_{z1} - \sigma_{r1} = q(ZZ1 - RR1) \quad (66)$$

$$\sigma_{z2} - \sigma_{r2} = q(ZZ2 - RR2) \quad (67)$$

Las deformaciones horizontales en el fondo de la capa  $i$  se pueden calcular una vez conocidos los esfuerzos verticales y horizontales, debido a la simetría del problema se aplica la ecuación (68).

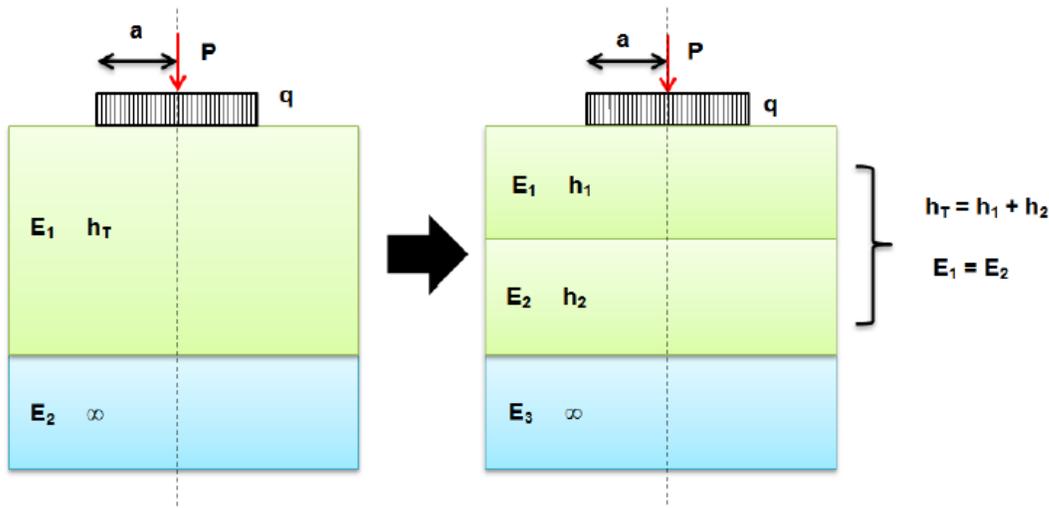
$$\varepsilon_{ri} = \frac{\sigma_{ri}}{E_i} - \frac{\mu_i \sigma_{ti}}{E_i} - \frac{\mu_i \sigma_{zi}}{E_i} \quad (68)$$

Con la suposición de que las relaciones de Poisson son 0.5 y por la geometría del esquema la ecuación anterior se transforma en la ecuación (69):

$$\varepsilon_{ri} = \frac{1}{2 E_i} (\sigma_{ri} - \sigma_{zi}) \quad (69)$$

Según Yoder y Witzak (1975) no se pueden realizar extrapolaciones a los datos presentados. Los trabajos de Jones fueron posteriormente llevados por Peattie (1962) a soluciones gráficas (cuadrículas).

Esta solución tricapa puede aplicarse directamente para sistemas tipo bicapa tipo *full depth* (capa estabilizada + subrasante) donde la capa estabilizada puede dividirse en dos capas con el mismo modulo elástico, mismas que sumadas a la capa de subrasante daría el sistema tricapa que se necesita para aplicar las soluciones tabulares de Jones (1962). Ver Figura 10.3.



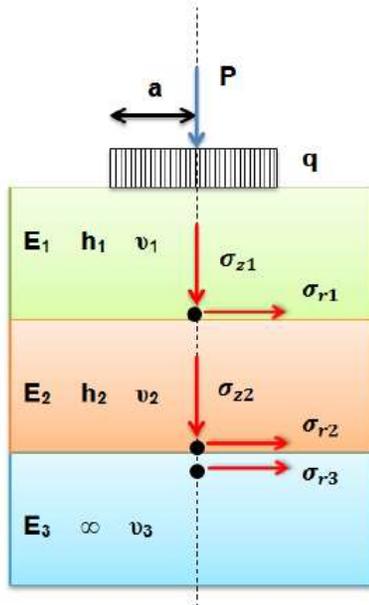
**Figura 10.3 Transformación de un sistema bicapa tipo full depth a un sistema tricapa.**

Fuente: Elaboración propia.



**Ejemplo 13.- Jones (Esfuerzos normales y radiales)**

Utilizando las soluciones de Jones (1966) encontrar los esfuerzos verticales y radiales en la capa 1 y capa 2 del siguiente sistema tricapa bajo las siguientes condiciones.



$E_1 = 400,000 \text{ psi}$

$E_2 = 20,000 \text{ psi}$

$E_3 = 10,000 \text{ psi}$

$a = 4.8 \text{ in}$

$h_1 = 6 \text{ in}$

$h_2 = 6 \text{ in}$

$q = 120 \text{ psi}$

**Solución:**

Se calculan los factores iniciales en función de la geometría del pavimento y de las características mecánicas de cada una de las capas.

$$k_1 = \frac{E_1}{E_2} = \frac{400,000}{20,000} = 20;$$

$$k_2 = \frac{E_2}{E_3} = \frac{20,000}{10,000} = 2;$$

$$A = \frac{a}{h_2} = \frac{4.8}{6} = 0.8;$$

$$H = \frac{h_1}{h_2} = \frac{6}{6} = 1;$$

De la tabla correspondiente de Jones, se obtienen los factores de esfuerzo ZZ1, ZZ2, (ZZ1-RR1) y (ZZ2 – RR2).

$ZZ1 = 0.12173;$

$$ZZ2 = 0.05938;$$

$$ZZ1 - RR1 = 1.97428;$$

$$ZZ2 - RR2 = 0.09268;$$

Sustituyendo en las ecuaciones (63) (64) (65) y (67) se tiene:

$$\sigma_{z1} = q(ZZ1) = 120 (0.12173) = 14.61 \text{ psi}$$

$$\sigma_{z2} = q(ZZ2) = 120 (0.05938) = 7.12 \text{ psi}$$

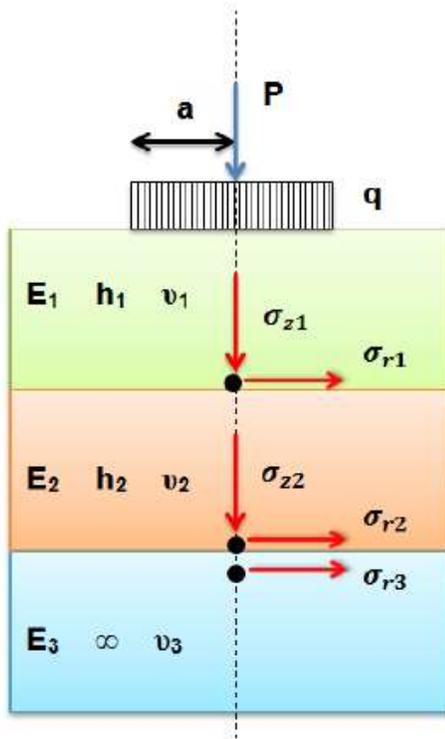
$$\sigma_{r1} = \sigma_{z1} - q(ZZ1 - RR1) = 14.61 - 120(1.97428) = 14.61 - 236.9136$$

$$\sigma_{r1} = -222.30 \text{ psi}$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_{z2} - q(ZZ2 - RR2) = 7.12 - 120(0.09268) = 7.12 - 11.12 = -4.0 \text{ psi}$$

**Ejemplo 14.- Jones (Máxima deformación a tensión y a compresión)**

De la siguiente estructura tricapa y utilizando el método de Jones (1966) calcular la máxima deformación unitaria a tensión debajo de la capa1 (carpeta asfáltica) así como la máxima deformación unitaria a compresión arriba de la capa subrasante



$E_1 = 400,000 \text{ psi}$

$E_2 = 20,000 \text{ psi}$

$E_3 = 10,000 \text{ psi}$

$h_1 = 5.75 \text{ in}$

$h_2 = 23 \text{ in}$

$P = 40,000 \text{ lb}$

$q = 150 \text{ psi}$

Relación de Poisson  
= 0.5 para todas las capas

**Solución:**

Calculamos primeramente el radio "a" del área circular uniformemente cargada.

$$150 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} = \frac{40,000 \text{ lb}}{A}$$

$$A = \frac{40,000 \text{ lb}}{150 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}} = 266.67 \text{ in}^2$$

Considerando un área circular tenemos

$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$\sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4(266.67)}{\pi}} = 18.43 \text{ in}$$

$$D = 2a$$

$$a = \frac{D}{2} = \frac{18.43}{2} = 9.21 \text{ in}$$

Ahora, haciendo uso de las soluciones tabulares de Jones (1963) tenemos:

$$k_1 = \frac{E_1}{E_2} = \frac{400,000}{20,000} = 20;$$

$$k_2 = \frac{E_2}{E_3} = \frac{20,000}{10,000} = 2;$$

$$A = \frac{a}{h_2} = \frac{9.21}{23} = 0.4;$$

$$H = \frac{h_1}{h_2} = \frac{5.75}{23} = 0.25;$$

Obtenemos entonces de la tabla respectiva los factores de esfuerzo ZZ1, ZZ2, (ZZ1-RR1) y (ZZ2 - RR2).

$$ZZ1 = 0.37882;$$

$$ZZ2 = 0.07933;$$

$$ZZ1 - RR1 = 3.86779;$$

$$ZZ2 - RR2 = 0.14159;$$

Sustituyendo en las ecuaciones (63), (64), (65) y (67) se tiene:

$$\sigma_{z1} = q(ZZ1) = 150(0.37882) = 56.82 \text{ psi}$$

$$\sigma_{z2} = q(ZZ2) = 150(0.07933) = 11.90 \text{ psi}$$

$$\sigma_{r1} = \sigma_{z1} - q(ZZ1 - RR1) = 56.82 - 150(3.86779) = 56.82 - 580.17$$

$$\sigma_{r1} = -523.35 \text{ psi}$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_{z2} - q(ZZ2 - RR2) = 11.90 - 150(0.14159) = 11.90 - 21.24 = -9.34 \text{ psi}$$

La máxima deformación unitaria debajo de la capa asfáltica se calcula con la ecuación

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2E_1}(\sigma_{r1} - \sigma_{z1})$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2(400,000)}(-523.35 - 56.82)$$

$$\varepsilon_t = -0.000725$$

La máxima deformación unitaria arriba de la subrasante se calcula con la ecuación

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_2}(\sigma_{z2} - \sigma_{r2})$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{(20,000)}(11.90 + 9.34)$$

$$\varepsilon_z = 0.001062$$

A continuación se presenta un breve análisis comparativo entre los resultados obtenidos con Jones (1962) y los obtenidos por Burmister (1943). Para llevar a cabo la comparación se utilizará el programa WINJULEA el cual resuelve la ecuación diferencial multicapa propuesta por Burmister. Dado que el método es solamente comparado para los esfuerzos normales y radiales se realizarán los dos siguientes análisis:

- Análisis 1: Estructura tricapa con variación del módulo elástico de la capa 1 ( $E_1$ ).
- Análisis 2: Estructura tricapa con variación del espesor de la capa 1 ( $h_1$ ).

La Tabla 10.9 muestra los valores considerados en el análisis 1.

**Tabla 10.9 Estructura de pavimento tricapa variando el módulo elástico de la capa 1 (análisis 1).**

<b>E<sub>1</sub> (psi)</b>	<b>E<sub>2</sub> (psi)</b>	<b>E<sub>3</sub> (psi)</b>	<b>H<sub>1</sub> (in)</b>	<b>H<sub>2</sub> (in)</b>	<b>q (psi)</b>	<b>a (in)</b>	<b>k<sub>1</sub></b>	<b>k<sub>2</sub></b>	<b>A</b>	<b>H</b>
40000	20000	10000	6	6	120	4.8	2	2	0.8	1
400000	20000	10000	6	6	120	4.8	20	2	0.8	1
4000000	20000	10000	6	6	120	4.8	200	2	0.8	1

La Tabla 10.10 muestra los factores de esfuerzo y los resultados del cálculo de esfuerzos normales y radiales para el análisis 1, obtenidos con el método de Jones (1962).

**Tabla 10.10 Factores de esfuerzo y cálculo de esfuerzos normales y radiales con Jones (1962) (Análisis 1).**

<b>ZZ1</b>	<b>ZZ2</b>	<b>ZZ1-RR1</b>	<b>ZZ2-RR2</b>	<b>σ<sub>z1</sub></b>	<b>σ<sub>z2</sub></b>	<b>σ<sub>r1</sub></b>	<b>σ<sub>r2</sub></b>
0.39942	0.13401	0.71341	0.24250	47.93	16.08	-37.67	-13.02
0.12173	0.05938	1.97428	0.09268	14.60	7.12	-222.31	-4.00
0.02647	0.01797	3.24971	0.02092	3.17	2.15	-386.79	-0.36

La Tabla 10.11 muestra los resultados del método de Jones (1962) para el primer análisis y los resultados con Burmister (1943). Como se observa las soluciones dadas por Jones para los esfuerzos normales y para el esfuerzo radial en la primera capa son los mismos que los dados por Burmister variando para este caso el módulo de la primera capa. Para el esfuerzo radial se observa una dispersión muy grande la cual disminuye conforme se incrementa el módulo de la primera capa.

**Tabla 10.11 Comparativa resultados con Jones (1962) con Burmister (1943) (Análisis 1).**

MÉTODO	$\sigma_{z1}$	$\sigma_{z2}$	$\sigma_{r1}$	$\sigma_{r2}$
Jones (1962)	47.93	16.08	-37.67	-13.02
Burmister (1943)	47.88	16.08	-37.59	1.53
Jones (1962)	14.60	7.12	-222.31	-4.00
Burmister (1943)	14.61	7.12	-222.33	-1.56
Jones (1962)	3.17	2.15	-386.79	-0.36
Burmister (1943)	3.18	2.16	-386.82	-0.90

La Tabla 10.12 muestra los valores considerados en el análisis 2.

**Tabla 10.12 Estructura de pavimento tricapa variando el espesor de la capa 1 (Análisis 2).**

<b>E<sub>1</sub></b> <b>(psi)</b>	<b>E<sub>2</sub></b> <b>(psi)</b>	<b>E<sub>3</sub></b> <b>(psi)</b>	<b>H<sub>1</sub></b> <b>(in)</b>	<b>H<sub>2</sub></b> <b>(in)</b>	<b>q</b> <b>(psi)</b>	<b>a</b> <b>(in)</b>	<b>k<sub>1</sub></b>	<b>k<sub>2</sub></b>	<b>A</b>	<b>H</b>
400000	20000	10000	1.25	10	120	4.0	20	2	0.40	0.125
400000	20000	10000	2.50	10	120	4.0	20	2	0.40	0.250
400000	20000	10000	5.00	10	120	4.0	20	2	0.40	0.500
400000	20000	10000	10.0	10	120	4.0	20	2	0.40	1.000
400000	20000	10000	20.0	10	120	4.0	20	2	0.40	2.000
400000	20000	10000	40.0	10	120	4.0	20	2	0.40	4.000

La Tabla 10.13 muestra los factores de esfuerzo y los resultados del cálculo de esfuerzos normales y radiales para el análisis 2, obtenidos con el método de Jones (1962).

**Tabla 10.13 Factores de esfuerzo y cálculo de esfuerzos normales y radiales con Jones (1962) (Análisis 2).**

<b>ZZ1</b>	<b>ZZ2</b>	<b>ZZ1-RR1</b>	<b>ZZ2-RR2</b>	<b><math>\sigma_{z1}</math></b>	<b><math>\sigma_{z2}</math></b>	<b><math>\sigma_{r1}</math></b>	<b><math>\sigma_{r2}</math></b>
0.78651	0.11650	5.16717	0.21640	94.38	13.98	-525.68	-11.99
0.37882	0.07933	3.86779	0.14159	45.45	9.51	-418.68	-7.48
0.13480	0.03998	1.89817	0.06722	16.17	4.79	-211.61	-3.27
0.03810	0.01565	0.66727	0.02498	4.57	1.88	-75.50	-1.11
0.00922	0.00518	0.18857	0.00803	1.10	0.62	-21.52	-0.34
0.00214	0.00154	0.04944	0.00235	0.26	0.18	-5.67	-0.10

La

Tabla 10.14 muestra los resultados del método de Jones (1962) para el primer análisis y los resultados con Burmister (1943). Como se observa las soluciones dadas por Jones para los esfuerzos normales y para el esfuerzo radial en la primera capa son los mismos que los dados por Burmister variando ahora el espesor de la primera capa. Para el esfuerzo radial se observa nuevamente una dispersión muy grande la cual disminuye conforme se incrementa el espesor de la primera capa.

**Tabla 10.14 Comparativa resultados con Jones (1962) con Burmister (1943) (Análisis 2).**

<b>MÉTODO</b>	$\sigma_{z1}$	$\sigma_{z2}$	$\sigma_{r1}$	$\sigma_{r2}$
Jones (1962)	94.38	13.98	-525.68	-11.99
Burmister (1943)	94.37	13.98	-525.63	1.00
Jones (1962)	45.45	9.51	-418.68	-7.48
Burmister (1943)	45.46	9.52	-418.68	1.02
Jones (1962)	16.17	4.79	-211.61	-3.27
Burmister (1943)	16.18	4.80	-211.60	0.76
Jones (1962)	4.57	1.88	-75.50	-1.11
Burmister (1943)	4.57	1.88	-75.49	0.38
Jones (1962)	1.10	0.62	-21.52	-0.34
Burmister (1943)	1.11	0.62	-21.58	0.14
Jones (1962)	0.26	0.18	-5.67	-0.10
Burmister (1943)	0.26	0.18	-5.67	0.18

### 10.3 Peattie (1962)

Peattie (1962) llevó las soluciones tabulares dadas por Jones (1962) a forma de cuadrículas o gráficos que obedecen a una compleja relación de escalas. Ver Figura 10.4. En los anexos de este documento se presentan la totalidad de los gráficos presentados por Peattie.

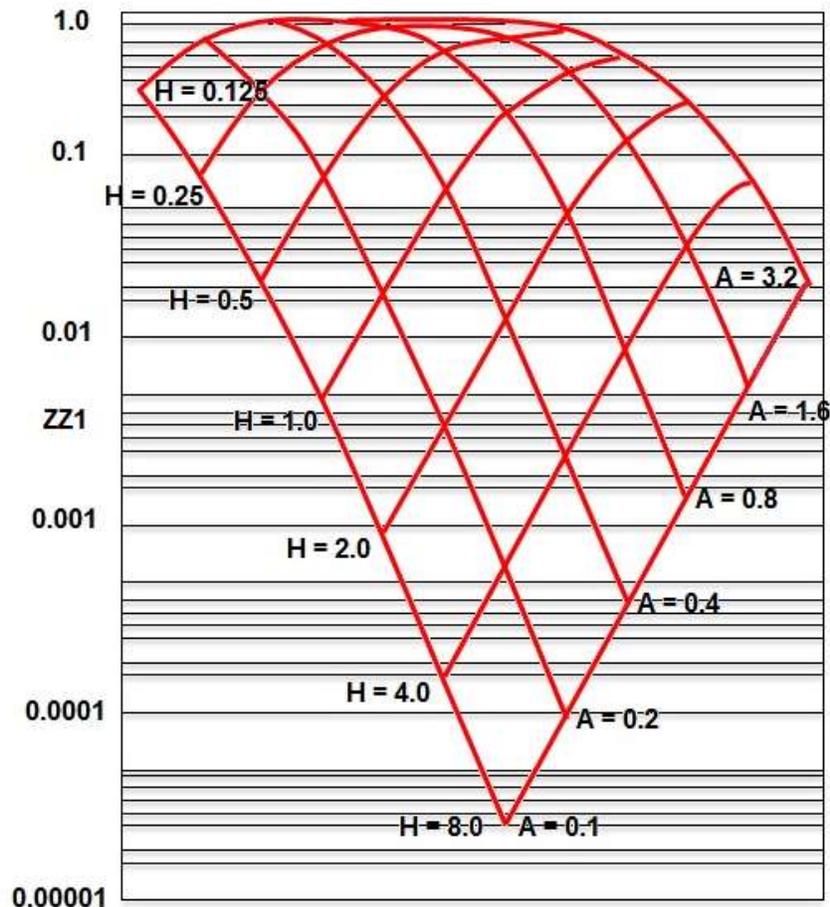
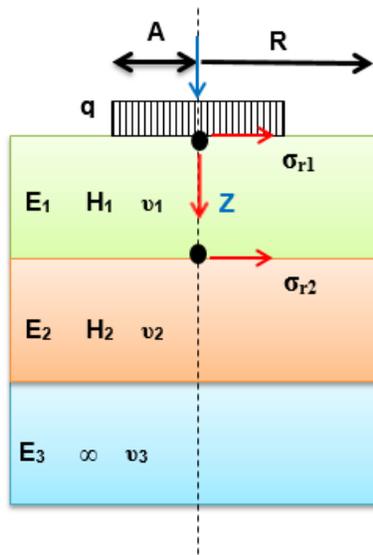


Figura 10.4 Nomograma de Peattie (1962) para obtener los factores de esfuerzo.

### 10.4 Kirk (1966)

Kirk (1966) del Laboratorio de Investigación Danés de Carreteras presentó soluciones tabulares análogas a las presentadas por Acum y Fox (1951) y Jones (1962) sólo con la diferencia de que las respuestas mecánicas pueden calcularse fuera del eje de simetría del área circular cargada. Las soluciones sólo permiten obtener los factores de esfuerzo para calcular los esfuerzos radiales en la parte superior e inferior de la primera capa que es por lo general la carpeta asfáltica. Ver Figura 10.5.



**Figura 10.5 Sistema tricapa de Kirk (1966).**

Fuente: Elaboración propia.

Para el modelo tricapa mostrado en la Figura 10.5 se tienen básicamente los mismos elementos que los considerados por Jones (1962) tales como los módulos elásticos de cada capa, los espesores de las capas 1 y 2, la presión de contacto superficial, el radio de contacto, etc. Sin embargo las respuestas mecánicas se obtienen fuera del eje de simetría (incluso en el mismo) pero solamente se consideran dos puntos de interés denominados "Z" para la nomenclatura de este método: la primera  $Z = 0$  corresponde a la respuesta en la parte superior del pavimento y  $Z = h_1$  para la respuesta en el fondo de la capa 1. Es decir y como se ha comentado anteriormente el método de Kirk sólo obtiene las respuestas mecánicas (esfuerzos radiales) de la capa superficial de un pavimento de tres capas.

$$H_1/A = 0.25, 0.50, 1.00, 1.50, 2.00$$

$$H_2/A = 1.00, 2.00, 3.00$$

$$Z/H_1 = 0.00, 1.00$$

$$E_1/E_2 = 2, 5, 10, 20, 50, 100, 500$$

$$E_2/E_3 = 5, 10$$

$$R/A = 0.0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0$$

Relación de Poisson = 0.5 para todas las capas.

La ecuación (70) y (71) muestra el esquema de análisis planteado por Kirk. En los anexos de este documento se encuentran las soluciones tabulares de este autor danés.

$$\sigma_r = \sigma_o(Factor) \quad (70)$$

$$Factor = f\left(\frac{H_1}{A}; \frac{H_2}{A}; \frac{Z}{H_1}; \frac{E_1}{E_2}; \frac{E_2}{E_3}; \frac{R}{A}\right) \quad (71)$$

## 10.5 Iwanow (1973)

Las soluciones o nomogramas de Iwanow (1973) (citado por Nikolaides (2015)) utilizadas para encontrar el campo de esfuerzos y deformaciones en pavimentos flexibles, fueron muy populares en las agencias de transporte en la Unión Soviética en la década de los setentas. A diferencia de las soluciones de Jones (1962), Peattie (1962), Kirk (1966), etc., las soluciones de Iwanow sí permiten calcular de manera directa la deflexión total de la estructura del pavimento. Ver Figura 10.7, Figura 10.8, Figura 10.9.

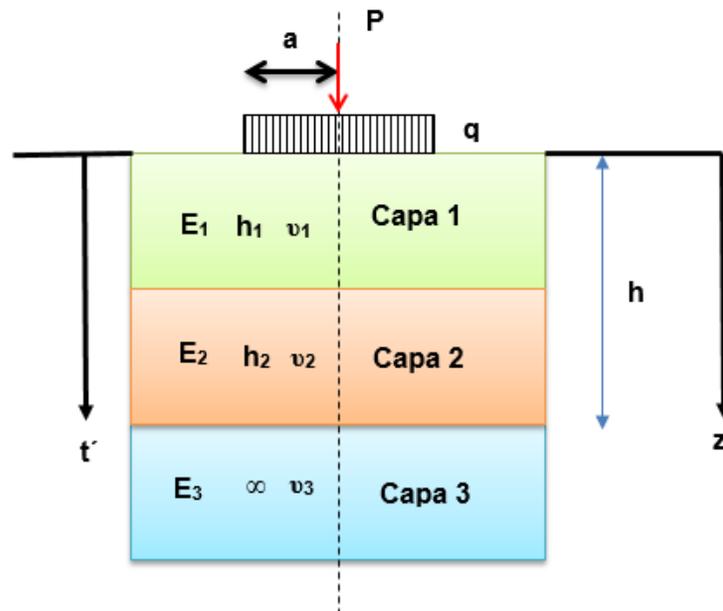


Figura 10.6 Modelo tricapa propuesto por Iwanow.

Con el nomograma de la Figura 10.7 puede obtenerse el esfuerzo vertical en la interface de la capa de base (o sub-base) y la subrasante a lo largo del eje de simetría del área circular cargada. De manera análoga con el nomograma de la Figura 10.8 puede obtenerse el esfuerzo radial en la parte inferior de la capa asfáltica. El nomograma de la Figura 10.9 permite obtener la deflexión total del sistema tricapa. Para el empleo de estos nomogramas debe considerarse

- Los nomogramas de Iwanow permiten obtener los esfuerzos verticales y horizontales en las interfaces de un sistema compuesto por tres capas, bajo el centro de un área circular de radio ( $a$ ) sometida a una presión uniforme ( $q$ ).
- Los nomogramas de Iwanow se obtienen con relaciones de Poisson de 0.25 para la capa 1 y capa 2 y de 0.35 para la capa 3.

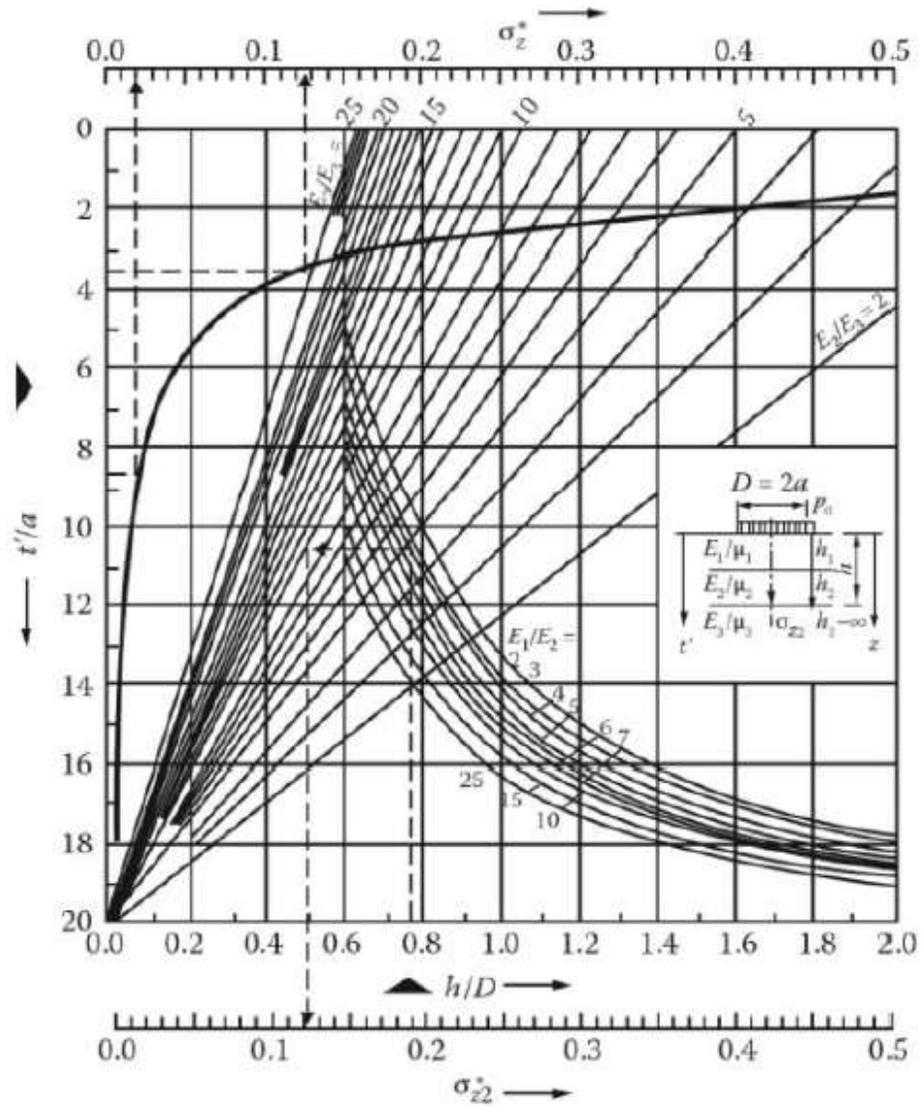
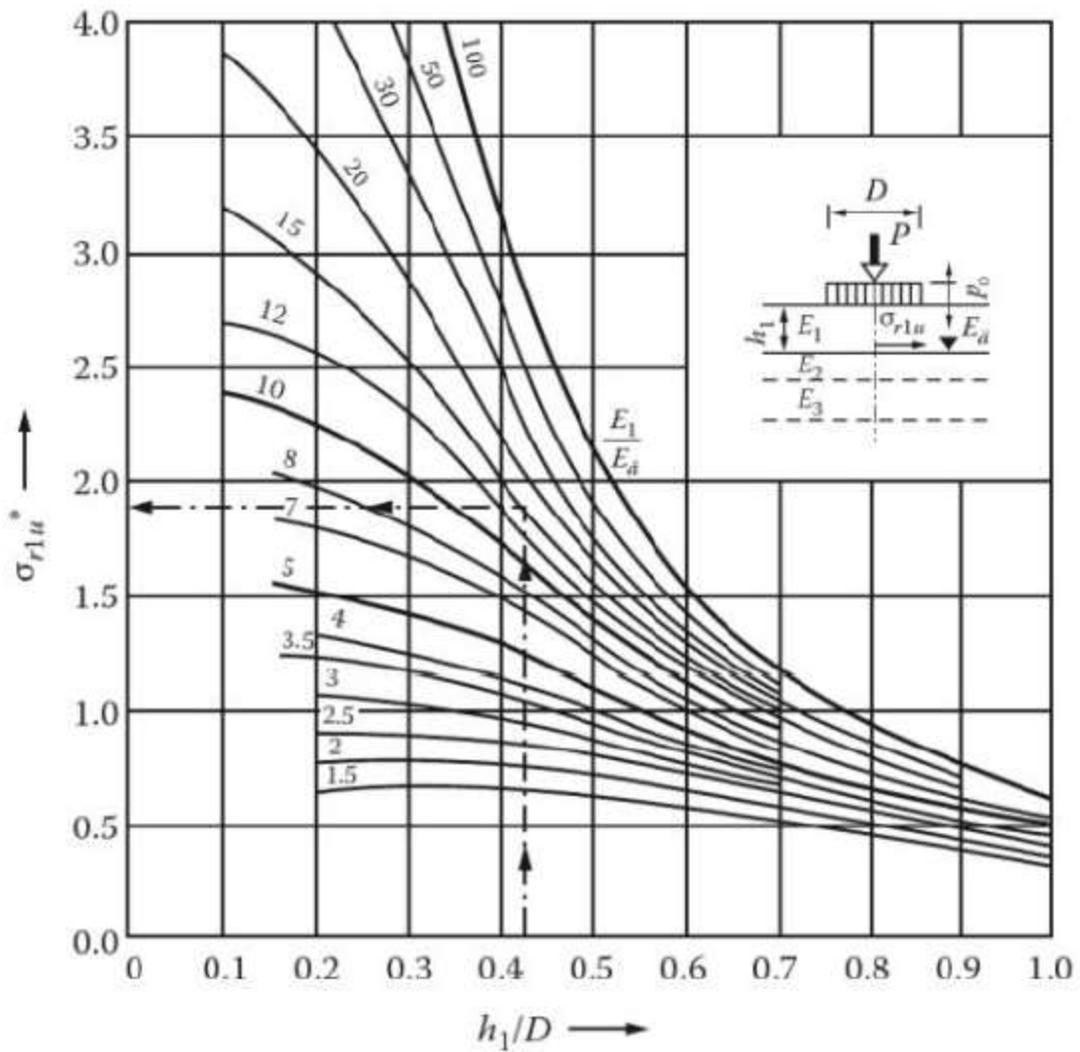


Figura 10.7 Nomograma de Iwanow para el cálculo de esfuerzos normales.

Fuente: Citado por Nikolaides (2011)



**Figura 10.8** Nomograma de Iwanow (1974) para el cálculo de esfuerzos radiales. Nikolaidis (2015).

Fuente: Citado por Nikolaidis (2011)

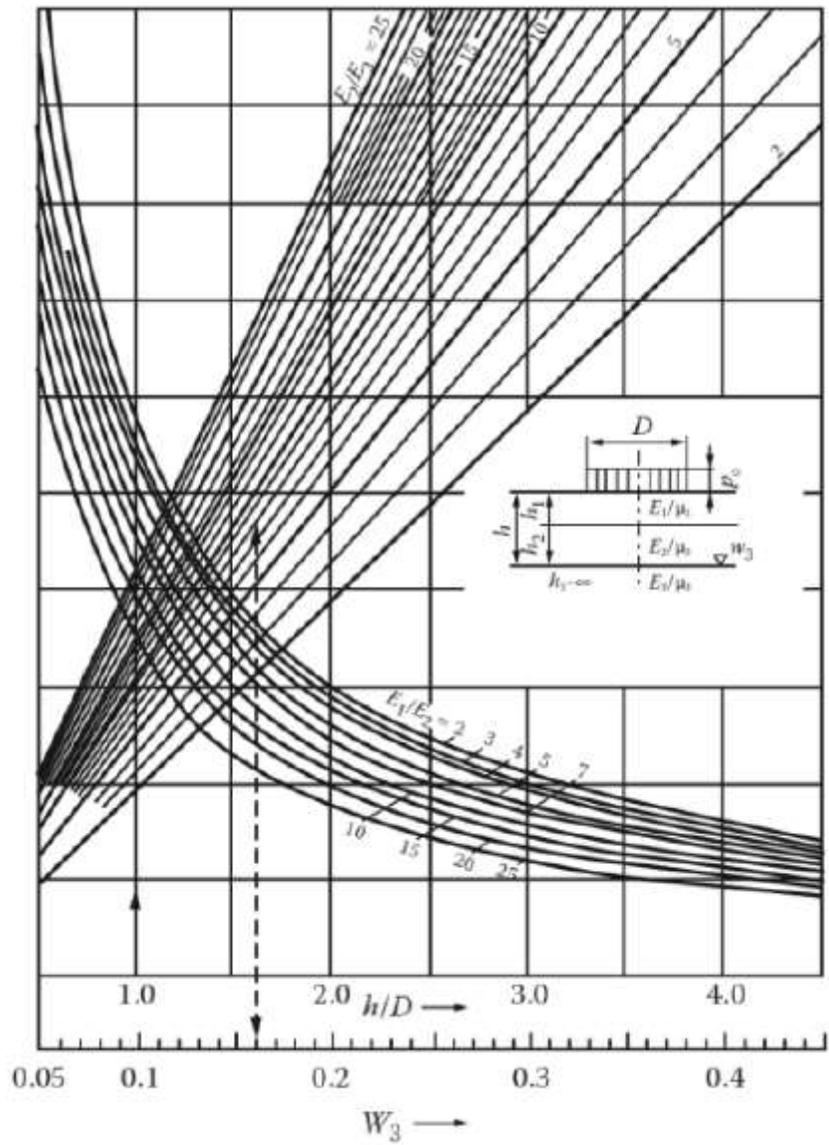


Figura 10.9 Nomograma de Iwanow (1974) para el cálculo de la deflexión total. Nikolaides (2015).

Fuente: Citado por Nikolaides (2011)

# 11 Sistemas estructurales de n-capas (Multicapa)

---

Para sistemas de tipo multicapa (ver Figura 11.1) resulta muy complicado expresar gráficos que permitan obtener directamente los esfuerzos, deformaciones y deflexiones en pavimentos flexibles. No obstante pueden generarse estructuras ya empleadas y generar el campo de esfuerzos.

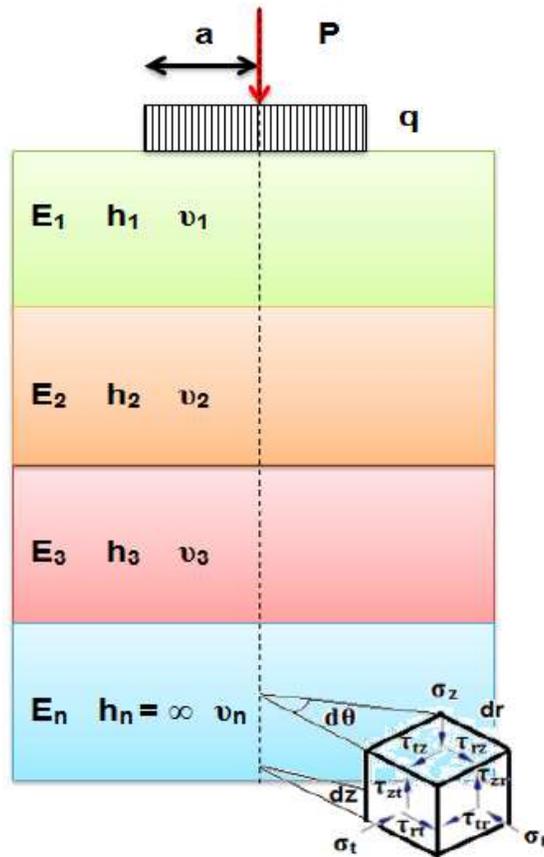


Figura 11.1 Sistema Elástico Multicapa clásico.

Fuente: Elaboración propia.

Por lo general, para estructuras de 4 a más capas suelen emplearse programas de cómputo, mismos que se comentarán más adelante.

## 11.1 Mehta y Veletsos (1959)

Mehta y Veletsos (1959) partiendo de la teoría elástica multicapa desarrollaron soluciones tabulares y gráficas para sistemas de dos, tres, cuatro y cinco capas, soluciones análogas a las dadas por Fox (1948) y Acum-Fox (1951) pero para sistemas de sólo dos capas. Ver Figura 11.2 y Figura 11.3.

En sus trabajos desarrollaron análisis de tipo dimensional donde combinaron características elasto-mecánicas de los materiales y características de tipo geométrico entre los espesores de cada una de las capas y dimensiones de los neumáticos de diseño. Con ello obtuvieron gráficos de uso para evaluar la respuesta del pavimento ante una amplia gama de combinaciones de diseño.

Estas soluciones fueron agrupadas en lo que los autores denominaron "*Miscelanea de soluciones multicapa*", las cuales se mencionan a continuación:

- Un sistema de cuatro capas con  $h_1 = h_2 = h_3 = H/3$ , y  $E_1 = 100E$ ,  $E_2 = 10E$ ,  $E_3 = 5E$ .
- Mismo sistema que el anterior excepto que  $E_2 = 5E$  y  $E_3 = 10E$ .
- Mismo sistema excepto que  $E_2 = E_3 = 10E$ . Esto es prácticamente un sistema de tres capas.
- Un sistema de cinco capas con  $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = H/4$  y  $E_1 = 0.2E$ ,  $E_2 = 0.4E$ ,  $E_3 = 0.6E$  y  $E_4 = 0.8E$ .

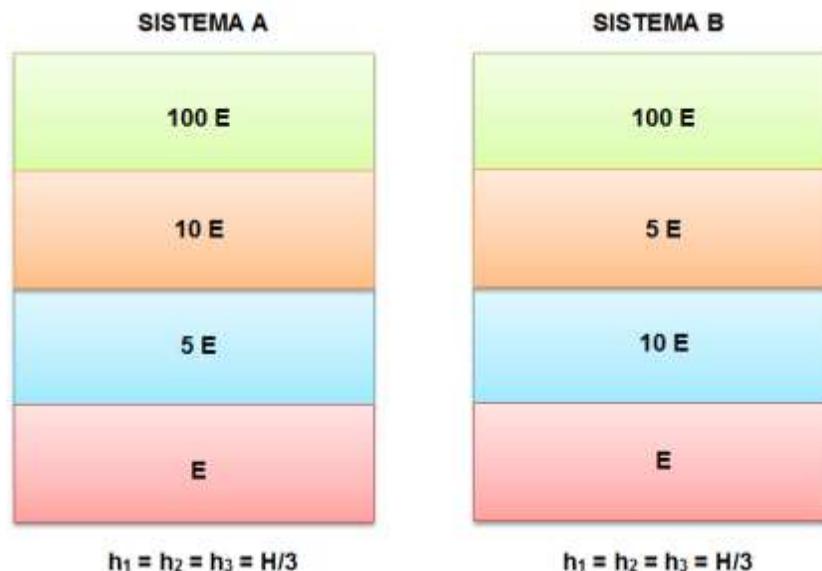


Figura 11.2 Sistemas de pavimentos de 4 capas propuestos por Mehta y Veletsos (1959) para análisis de respuesta.

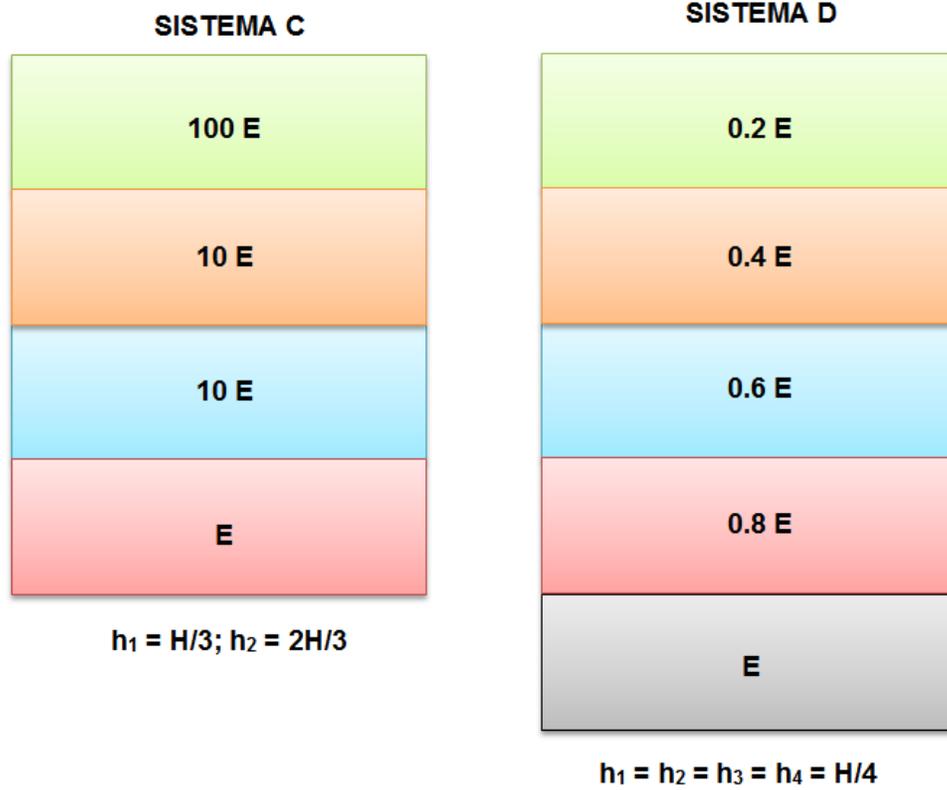


Figura 11.3 Sistemas de pavimentos de 4 y 5 capas propuestos por Mehta y Veletsos (1959) para análisis de respuesta.

## 11.2 Vesic (1963)

Vesic (1963) propuso una solución general para obtener la deflexión total de un sistema multicapa. Ver Figura 11.4.

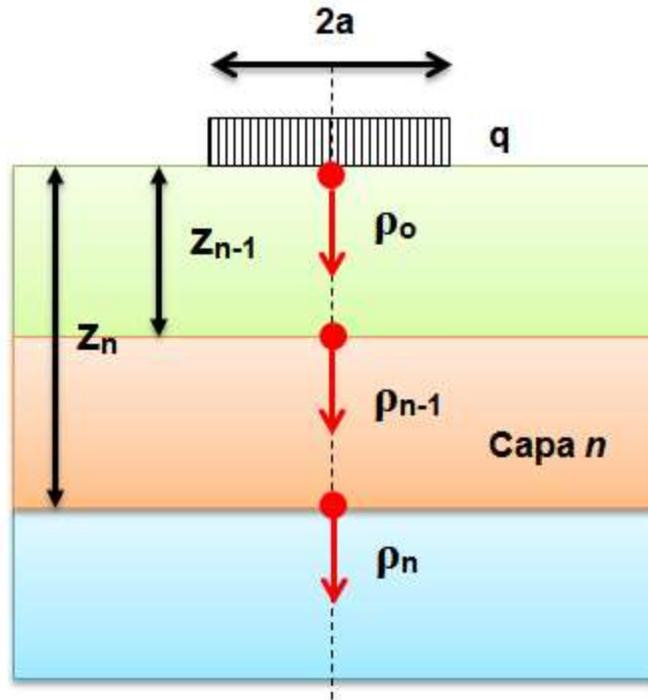


Figura 11.4 Sistema elástico multicapa propuesto por Vesic.

La ecuación (72) permite obtener la deflexión total de un sistema de pavimentos de "n" capas.

$$\rho_z = q \, 2a \sum \frac{(1 - \nu_n^2)}{E_n} (I_n - I_{n-1}) \quad (72)$$

Donde:

$\rho_z$  = Deflexión en el centro del área circular cargada

$q$  = Carga uniformemente cargada

$a$  = Radio del área circular cargada

$\nu_n$  = Relación de poisson de la capa n

$I_n$  = Factor de deflexión de la  $n^{\text{th}}$  capa, correspondiente a  $z/a$

Los factores de influencia pueden obtenerse de la Figura 11.5.

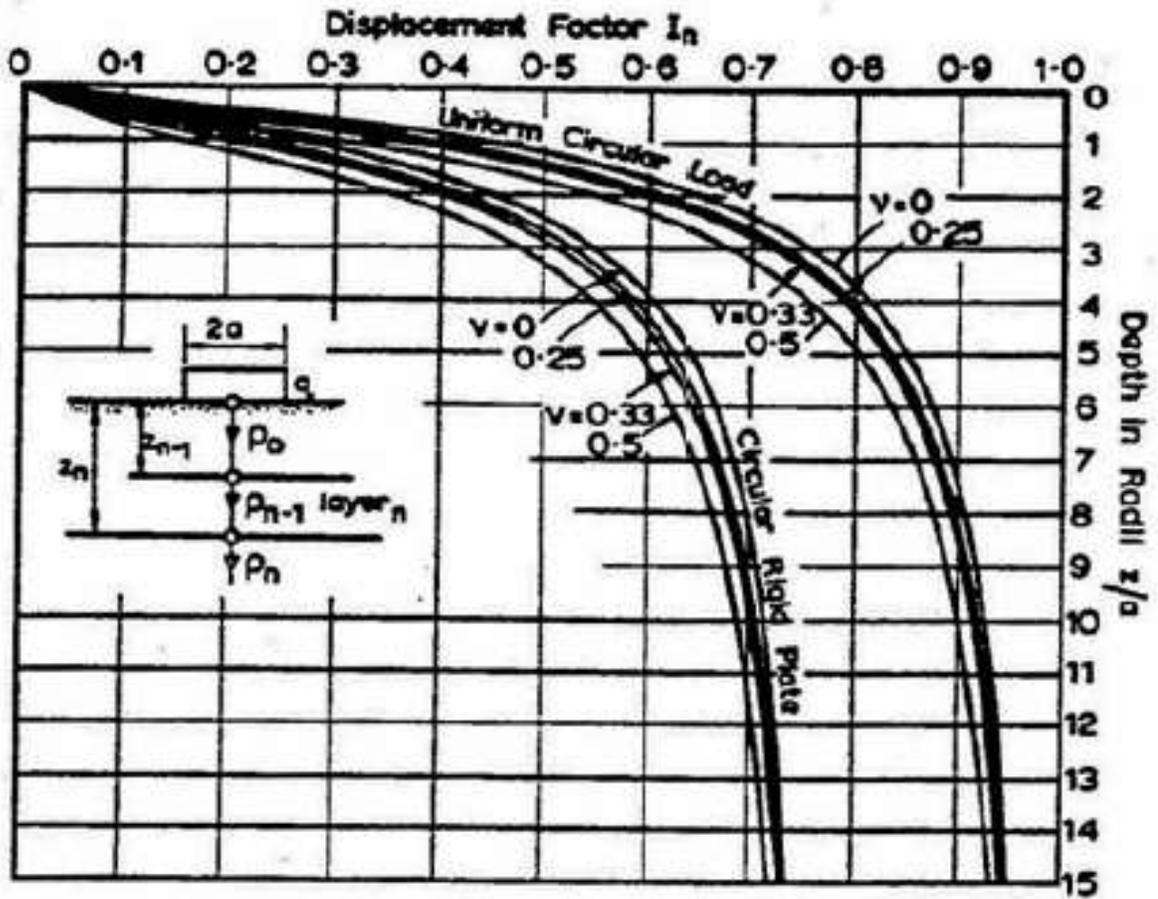
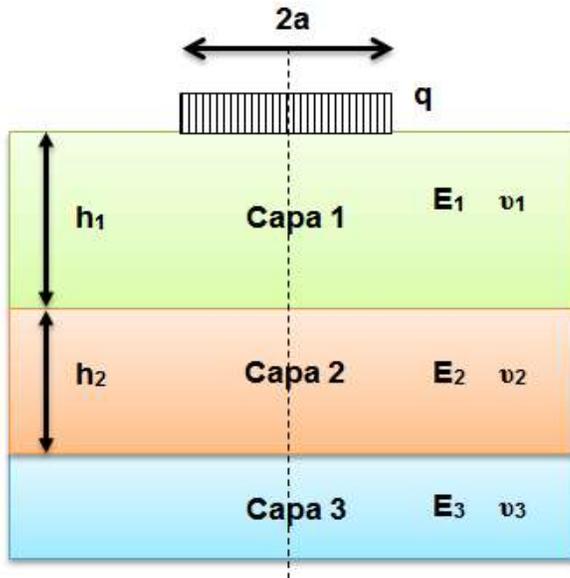


Figura 11.5 Factores de deflexión propuestos por Vesic.

### Ejemplo 15.- Vesic

Determinar la deflexión total del siguiente sistema tricapa con la solución general propuesta por Vesic (1963).



$$E_1 = 3,500 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 1,750 \text{ MPa}$$

$$E_3 = 875 \text{ MPa}$$

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.35$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$h_1 = 9.5 \text{ cm}$$

$$h_2 = 75 \text{ cm}$$

$$q = 0.6 \text{ MPa}$$

#### Solución:

Utilizando la Figura 11.5 para obtener los factores de influencia se tiene:

$$l_0; z_0/a = 0/15 = 0; l_0 = 0$$

$$l_1; z_1/a = 9.5/15 = 0.63; l_1 = 0.11$$

$$l_2; z_2/a = 84.5/15 = 5.6; l_2 = 0.85$$

$$l_3; z_3/a = \infty; l_3 = 1.00$$

Aplicando la ecuación (72) se tiene:

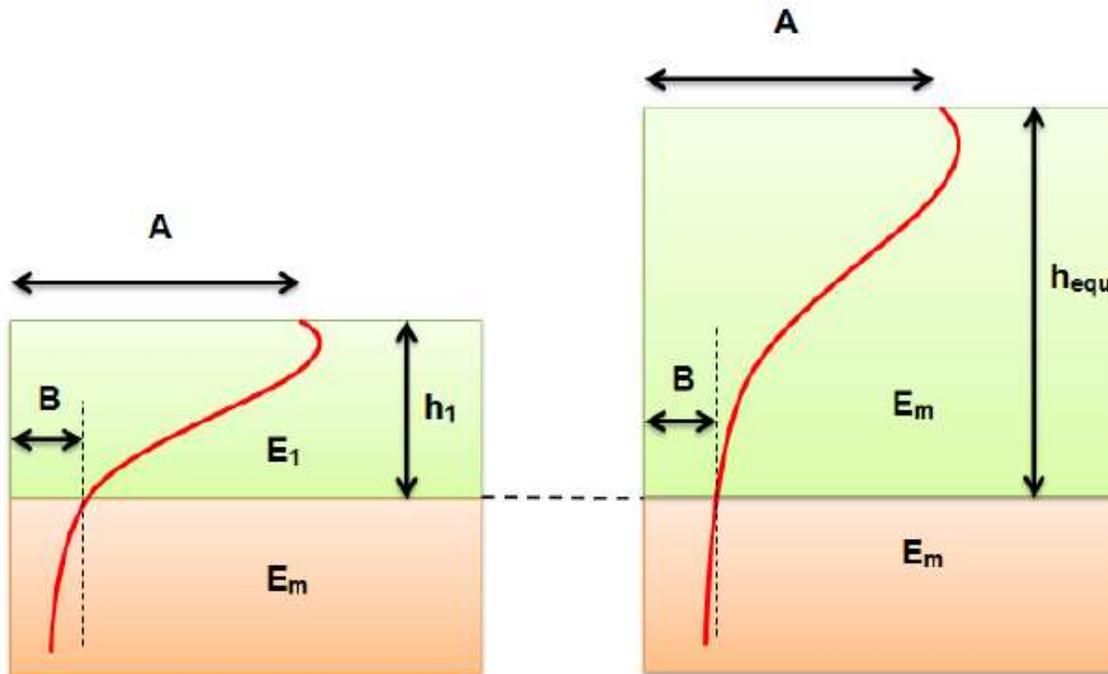
$$\rho_z = (0.6) 2(15) \left[ \frac{(1 - 0.35^2) * (0.11 - 0)}{3500} + \frac{(1 - 0.35^2) * (0.85 - 0.11)}{1750} + \frac{(1 - 0.35^2) * (1 - 0.85)}{875} \right]$$

$$\rho_z = (0.6) 2(15) [0.0000275 + 0.000371 + 0.000150]$$

$$\rho_z = 0.0098 \text{ cm}$$

## 12 Sistemas estructurales de equivalencia

Se dice que dos sistemas estructurales son equivalentes cuando las respuestas de la estructura ante la aplicación de cargas son las mismas. Ver Figura 12.1.



**Figura 12.1 Principio de la teoría de equivalencia.**

Fuente: Molenaar, 2007.

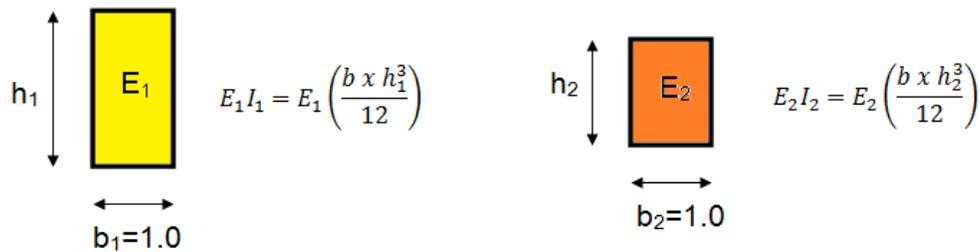
La figura del lado izquierdo muestra la distribución de esfuerzos verticales en un sistema de dos capas. La figura del lado derecho muestra el espesor equivalente  $h_{equ}$  y que a esa profundidad se tiene el mismo esfuerzo en el punto B que el del lado izquierdo. Es decir, los esfuerzos generados en el punto B "original" son equivalentes o iguales a los del punto B pero para el "espesor equivalente". De allí proviene el concepto de equivalencia.

esfuerzos generados en el punto B "original" son equivalentes o iguales a los del punto B pero para el "espesor equivalente". De allí proviene el concepto de equivalencia.

En la rehabilitación y reconstrucción de pavimentos flexibles es necesario modificar algún espesor de sus capas sin que la estructura reduzca su capacidad estructural. Es aquí donde los sistemas estructurales equivalentes cobran gran

importancia e interés ingenieril. Los modelos estructurales de equivalencia más conocidos son los de Palmer-Barber, Odemark, Kirk, Jeuffroy-Bachelez, Ivanov, Hogg, entre otros.

Considere dos rectángulos de ancho unitario, compuestas por los materiales 1 y 2, con la misma relación de Poisson ( $\nu_1=\nu_2$ ),  $I_1$  e  $I_2$  son los momentos de inercia de los dos rectángulos respectivamente. Ver Figura 12.2.



**Figura 12.2 Determinación de la expresión cúbica de igual rigidez a la flexión.**

Al igualar la rigidez a la flexión de los dos rectángulos, se obtiene la relación que deben cumplir sus alturas para que su capacidad estructural sea equivalente. Ver ecuación (73), (74), (75) y (76).

$$E_1 I_1 = E_2 I_2 \quad (73)$$

$$E_1 \left( \frac{b \times h_1^3}{12} \right) = E_2 \left( \frac{b \times h_2^3}{12} \right) \quad (74)$$

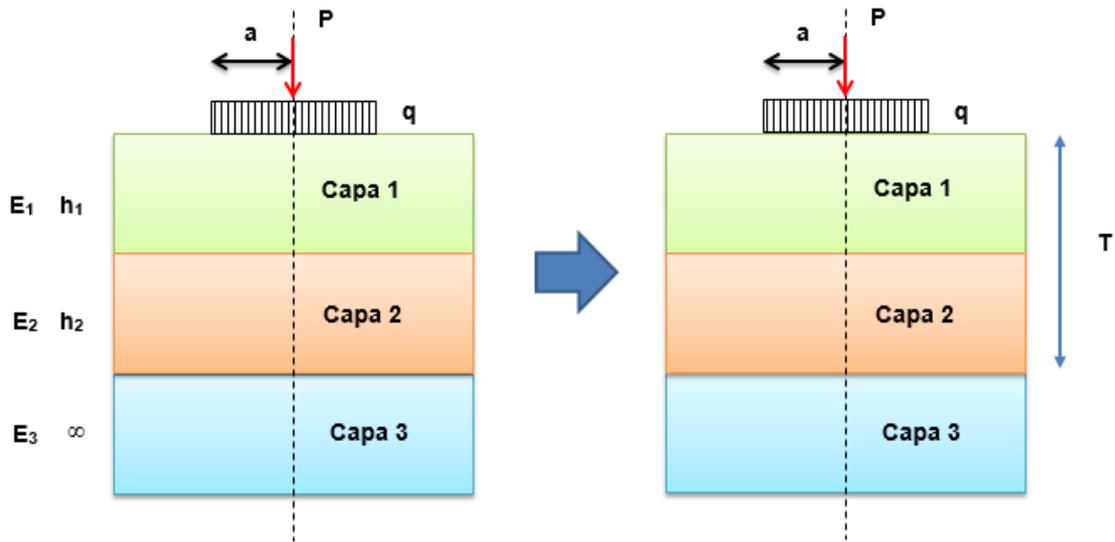
$$E_1 \times h_1^3 = E_2 \times h_2^3 \quad (75)$$

$$h_2 = \sqrt[3]{\frac{E_1}{E_2}} \times h_1 \quad (76)$$

## 12.1 Palmer y Barber (1940)

Palmer y Barber (1940) bajo el auspicio de la Oficina de Dársenas del Departamento de Marina de los Estados Unidos realizaron un gran número de

experiencias en aeropistas pertenecientes al Cuerpo de Marina de los Estados Unidos. Derivado de ello propusieron un método para determinar el módulo elástico equivalente de un pavimento multicapa. Este método puede ser usado para estimar el desplazamiento vertical (deflexión) en un sistema elástico tricapa con  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  y  $\nu_3$  igual a 0.5. Ver Figura 12.3.



**Figura 12.3 Método de módulo de elasticidad equivalente propuesto por Palmer y Barber (1940) para sistemas multicapa.**

Fuente: Elaboración propia.

La deflexión en el centro de una superficie circular uniformemente cargada se observa en la ecuación (77).

$$p_z = \frac{2(1 - \nu_3^2)}{E_3} q a I_{pz} \quad (77)$$

Donde los valores explícitos en la misma se calculan con las ecuaciones (78), (79), (80), (81), (82), (83), (84), (85), (86) y (87).

$$I_{pz} = I_{pz1} + I_{pz2} + I_{pz3} \quad (78)$$

$$I_{pz1} = \frac{E_3}{E_1} \left[ 1 - \frac{1}{\left\{ 1 + N_1^2 \left( \frac{T}{a} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (79)$$

$$I_{pz2} = \frac{E_3}{E_2} \left[ \frac{1}{\left\{ 1 + N_2^2 \left( \frac{T}{a} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left\{ 1 + \bar{N}_2^2 \left( \frac{T}{a} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (80)$$

$$I_{pz3} = \left[ \frac{1}{\left\{ 1 + N_3^2 \left( \frac{T}{a} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (81)$$

$$N_1 = 0.9 \left( \frac{h_1}{T} \right) \quad (82)$$

$$\bar{N}_1 = 0.9 \left( \frac{h_2}{T} \right) \quad (83)$$

$$N_2 = N_1 \left( \frac{E_1}{E_3} \frac{E_3}{E_m} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (84)$$

$$\bar{N}_2 = N_2 + \bar{N}_1 \quad (85)$$

$$N_3 = N_2 + \bar{N}_1 \left( \frac{E_2}{E_3} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (86)$$

$$\frac{E_3}{E_m} = \left\{ \frac{1 + N_2^2 \left(\frac{T}{a}\right)^2}{1 + N_3^2 \left(\frac{T}{a}\right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{E_3}{E_2} \left[ 1 - \left\{ \frac{1 + N_2^2 \left(\frac{T}{a}\right)^2}{1 + N_2^2 \left(\frac{T}{a}\right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \quad (87)$$

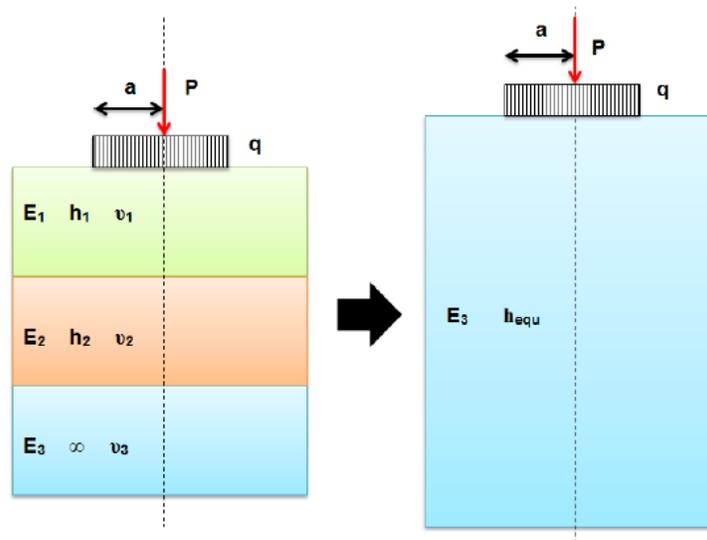
Donde:

$E_m$  = *Módulo equivalente de elasticidad*

El valor de  $E_3/E_m$  se determina resolviendo iterativamente en la última expresión.

## 12.2 Odemark (1949)

El método de Nils Odemark (1949) está basado en la suposición de que los esfuerzos y deformaciones por debajo de una capa dependen de la rigidez de esa capa solamente. Si el espesor, el módulo y la relación de Poisson de una capa son cambiados, pero la rigidez permanece sin cambiar, los esfuerzos y deformaciones por debajo de la capa deben también permanecer sin cambiar, ver Figura 12.4. Es decir, el método consiste en encontrar un espesor equivalente,  $h_e$ , para la primera capa, con un módulo igual al de la segunda capa,  $E_2$ . Entonces, se tendría un espacio semi-infinito homogéneo donde se puede utilizar la solución de Boussinesq.



**Figura 12.4 Método de espesores equivalentes de Odemark (1949) para sistemas multicapa.**

Fuente: Elaboración propia.

Como el método de Odemark es una aproximación, se debe introducir un factor de corrección  $f$ , ver ecuación (88). Si además, la relación de Poisson ( $\nu$ ) se supone que es la misma para todas las capas la transformación puede escribirse como:

$$h_{eq} = (f)(h_1) \sqrt[3]{\frac{E_1(1 - \nu_2^2)}{E_2(1 - \nu_1^2)}} \quad (88)$$

Donde:

$f = 1.0$  para la primera interface, independiente del número de capas.

$f = 0.8$  para la segunda capa de un sistema de dos capas.

$f = 0.9$  para la segunda capa en adelante de un sistema de  $n$ -capas.

Los resultados que arroja el método de Odemark (Ullidtz y Forlag, 1998) están entre el 89% y el 92% respecto de los resultados de los programas que resuelven la ecuación diferencial multicapa de Burmister. Ver Figura 12.5.

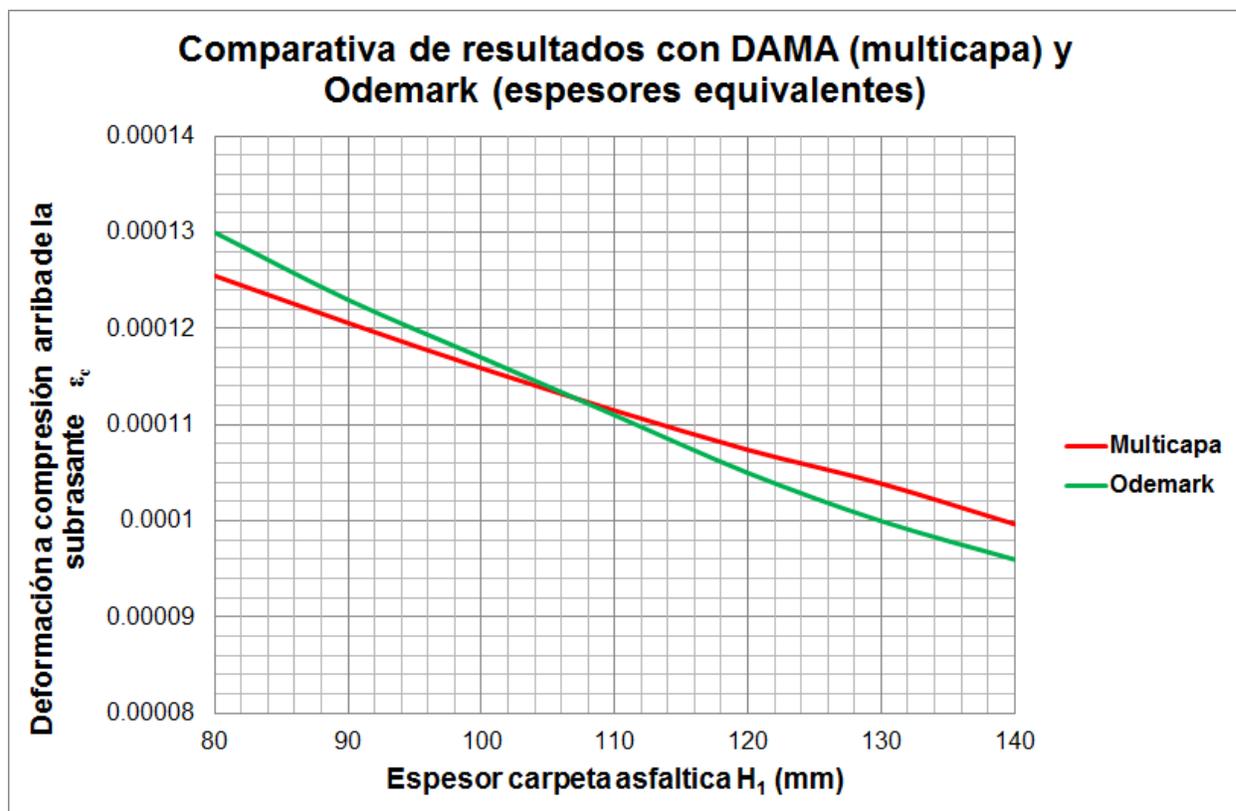


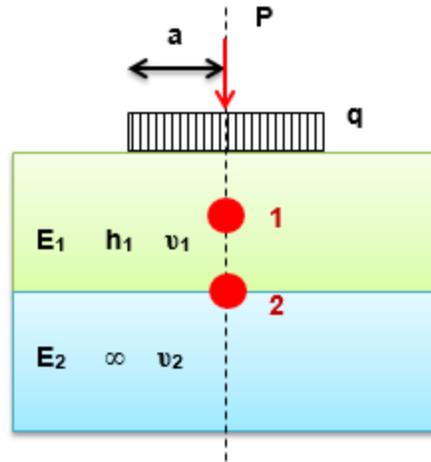
Figura 12.5 Comparativa entre Odemark y Burmister (multicapa).

El método de Odemark ha tenido un gran número de aplicaciones prácticas en la ingeniería de pavimentos y en la ingeniería de cimentaciones. A continuación se describen brevemente las aplicaciones hechas de esta metodología:

- Es utilizado ampliamente en cuestiones de auscultación de pavimentos, sobre todo en las operaciones de *retrocálculo o cálculo inverso* para obtener los módulos elásticos de las capas que conforman las secciones de pavimentos a través de datos de deflexiones obtenidas de campo con equipos no destructivos como el HWD. Este algoritmo se encuentra incorporado a paquetes de cómputo como el ELMOD, MODULUS, MODCALC, entre otros, que llevan a cabo esta rutina.
- Hirai (2007) utiliza los espesores equivalentes para calcular los asentamientos en cimentaciones superficiales y profundas.
- Ullidtz *et al* (1998) recomienda su uso de manera extensiva en las operaciones de revisión estructural con equipo HWD a través del retrocálculo. Estas recomendaciones son muy utilizadas en Dinamarca y otros países nórdicos.
- La guía empírico mecanicista (MEPDG, 2008) de la AASHTO utiliza la transformación es espesores equivalentes para determinar la frecuencia de la carga del vehículo a través de la longitud efectiva del impulso del esfuerzo del mismo.
- El-Badawy (2011) propone factores de corrección del planteamiento de Odemark para sistemas de dos capas, puntualizando no solo la importancia de las relaciones modulares sino la profundidad donde se desea calcular los esfuerzos o deformaciones.
- Jung *et al* (1975) a través de los espesores equivalentes de Odemark, propone un modelo para predecir el desempeño de pavimentos donde se estima el final de la vida útil del mismo y se propone el empleo de sobrecarpetas asfálticas (Ontario).
- Ioannides (1991) obtiene expresiones para determinar los números estructurales efectivos  $SN_{eff}$ .
- Kalam (1995) propone una metodología de diseño de pavimentos estabilizando la capa subrasante con hule molido de neumáticos.
- La agencia de transporte de Minnesota, propone una herramienta de análisis denominada MnPAVE, donde utiliza espesores equivalentes (MET) para análisis de sus estructuras de pavimento que plantea.

## 12.2.1 Deducción de fórmulas de Odemark para estructuras de pavimentos de 2 capas.

La Figura 12.6 muestra un sistema de pavimentos de dos capas.



**Figura 12.6 Puntos de análisis para un sistema de dos capas (Odemark).**

Aplicando las soluciones numéricas de Odemark comentadas anteriormente, se obtienen los espesores equivalentes en los puntos 1 y 2. Dichos espesores se obtienen con las ecuaciones (89) y (90).

$$h_{equ1} = \frac{h_{equ2}}{2} \quad (89)$$

$$h_{equ2} = h_1 \sqrt{\frac{E_1(1 - \nu_2^2)}{E_2(1 - \nu_1^2)}} \quad (90)$$

## 12.2.2 Deducción de fórmulas de Odemark para estructuras de pavimentos de 3 capas

La Figura 12.7 muestra un sistema de pavimentos de tres capas

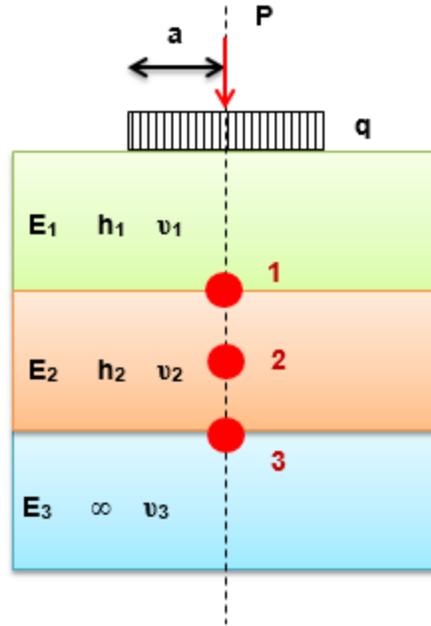


Figura 12.7 Puntos de análisis para un sistema de tres capas (Odemark).

Aplicando las soluciones numéricas de Odemark comentadas anteriormente, se obtienen los espesores equivalentes en los puntos 1, 2 y 3. Dichos espesores se obtienen con las ecuaciones (91), (92) y (93).

$$h_{\text{equ1}} = h_1 \sqrt[3]{\frac{E_1(1 - \nu_2^2)}{E_2(1 - \nu_1^2)}} \quad (91)$$

$$h_{\text{equ2}} = \left( h_1 \sqrt[3]{\frac{E_1(1 - \nu_2^2)}{E_2(1 - \nu_1^2)}} \right) + \frac{h_2}{2} \quad (92)$$

$$h_{\varepsilon qu3} = 0.8 (h_{\varepsilon qu1} + h_2) \left( h_2 \sqrt[3]{\frac{E_2(1 - \nu_3^2)}{E_3(1 - \nu_2^2)}} \right) \quad (93)$$

### 12.2.3 Deducción de fórmulas de Odemark para estructuras de pavimentos de 4 capas

La Figura 12.8 muestra un sistema de pavimentos de cuatro capas.

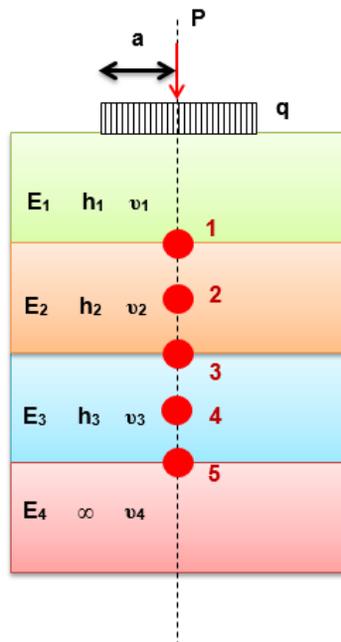


Figura 12.8 Puntos de análisis para un sistema de cuatro capas (Odemark).

Aplicando las soluciones numéricas de Odemark comentadas anteriormente, se obtienen los espesores equivalentes en los puntos 1, 2, 3, 4 y 5. Dichos espesores se obtienen con las ecuaciones (94), (95), (96), (97) y (98)

$$h_{\varepsilon qu1} = h_1 \sqrt[3]{\frac{E_1(1 - \nu_2^2)}{E_2(1 - \nu_1^2)}} \quad (94)$$

$$h_{\varepsilon qu2} = \left( h_1 \sqrt[3]{\frac{E_1(1 - \nu_2^2)}{E_2(1 - \nu_1^2)}} \right) + \frac{h_2}{2} \quad (95)$$

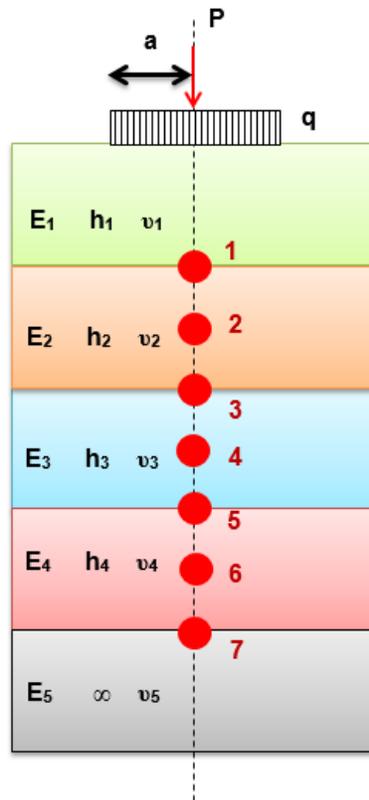
$$h_{\text{equ3}} = 0.8 (h_{\text{equ1}} + h_2) \left( h_2 \sqrt[3]{\frac{E_2(1-\nu_3^2)}{E_3(1-\nu_2^2)}} \right) \quad (96)$$

$$h_{\text{equ4}} = h_{\text{equ3}} + \frac{h_3}{2} \quad (97)$$

$$h_{\text{equ5}} = 0.8 (h_{\text{equ4}} + h_3) \left( h_3 \sqrt[3]{\frac{E_3(1-\nu_4^2)}{E_4(1-\nu_3^2)}} \right) \quad (98)$$

### 12.2.4 Deducción de fórmulas de Odemark para estructuras de pavimentos de 5 capas

La Figura 12.9 muestra un sistema de pavimentos de cinco capas.



**Figura 12.9 Puntos de análisis para un sistema de cinco capas (Odemark).**

Aplicando las soluciones numéricas de Odemark comentadas anteriormente, se obtienen los espesores equivalentes en los puntos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Dichos

espesores se obtienen con las ecuaciones (99), (100), (101), (102), (103), (104) y (105).

$$h_{\varepsilon qu1} = h_1 \sqrt[3]{\frac{E_1(1 - \nu_2^2)}{E_2(1 - \nu_1^2)}} \quad (99)$$

$$h_{\varepsilon qu2} = \left( h_1 \sqrt[3]{\frac{E_1(1 - \nu_2^2)}{E_2(1 - \nu_1^2)}} \right) + \frac{h_2}{2} \quad (100)$$

$$h_{\varepsilon qu3} = 0.8 (h_{\varepsilon qu1} + h_2) \left( h_2 \sqrt[3]{\frac{E_2(1 - \nu_3^2)}{E_3(1 - \nu_2^2)}} \right) \quad (101)$$

$$h_{\varepsilon qu4} = h_{\varepsilon qu3} + \frac{h_3}{2} \quad (102)$$

$$h_{\varepsilon qu5} = 0.8 (h_{\varepsilon qu4} + h_3) \left( h_3 \sqrt[3]{\frac{E_3(1 - \nu_4^2)}{E_4(1 - \nu_3^2)}} \right) \quad (103)$$

$$h_{\varepsilon qu6} = h_{\varepsilon qu5} + \frac{h_4}{2} \quad (104)$$

$$h_{\varepsilon qu7} = 0.8 (h_{\varepsilon qu6} + h_4) \left( h_4 \sqrt[3]{\frac{E_4(1 - \nu_5^2)}{E_5(1 - \nu_4^2)}} \right) \quad (105)$$

La Figura 12.10 muestra los factores de deflexión para sistemas de pavimento de dos capas propuestos por Odemark y que pueden encontrarse en su publicación

original de 1949. Estos factores toman en cuenta la relación modular  $E_1/E_m$  y la relación  $h/a$ .

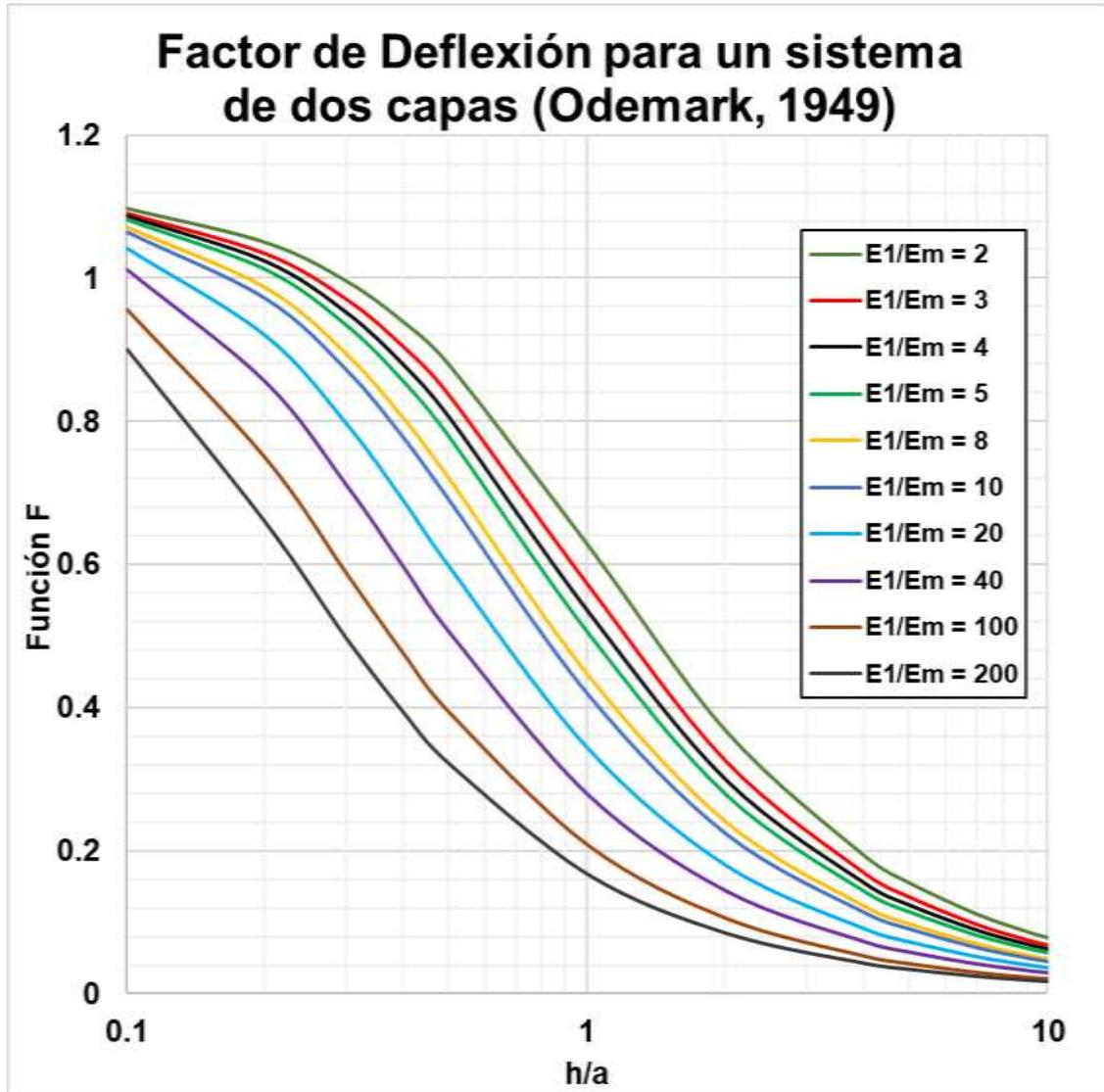
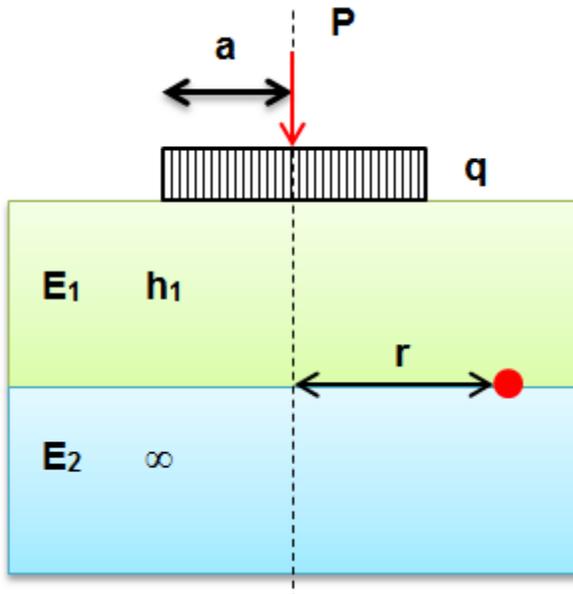


Figura 12.10 Curvas para calcular factores de deflexión mediante el método de Odemark.

#### Ejemplo 15.- Odemark (1949)

Utilizando las soluciones de Odemark (1949) encontrar la deflexión total del sistema bicapa mostrado. Comparar los resultados con las soluciones de Huang (1969).



$$E_1 = 1,000 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 200 \text{ MPa}$$

$$r = 0 \text{ cm}$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$h_1 = 15 \text{ cm}$$

$$q = 0.6 \text{ MPa}$$

**Solución:**

$$w = \frac{1.5 q a}{E_m} F$$

$$E_m = E_2$$

$$E_1/E_m = 1000/200 = 5$$

$$h_1/a = 15/15 = 1$$

De la Figura 12.10 se obtiene:  $F = 0.50$

Sustituyendo valores se tiene:  $(1.5) (0.6 \text{ MPa}) (15 \text{ cm}) (0.50) / (200 \text{ MPa}) = 0.03375 \text{ cm}$ .

Comparando con Huang (1969) se tiene:

$$E_1/E_2 = 1000/200 = 5$$

$$h_1/a = 15/15 = 1$$

$$r/a = 0/15 = 0$$

De la Figura 9.16 se obtiene:  $F = 0.83$

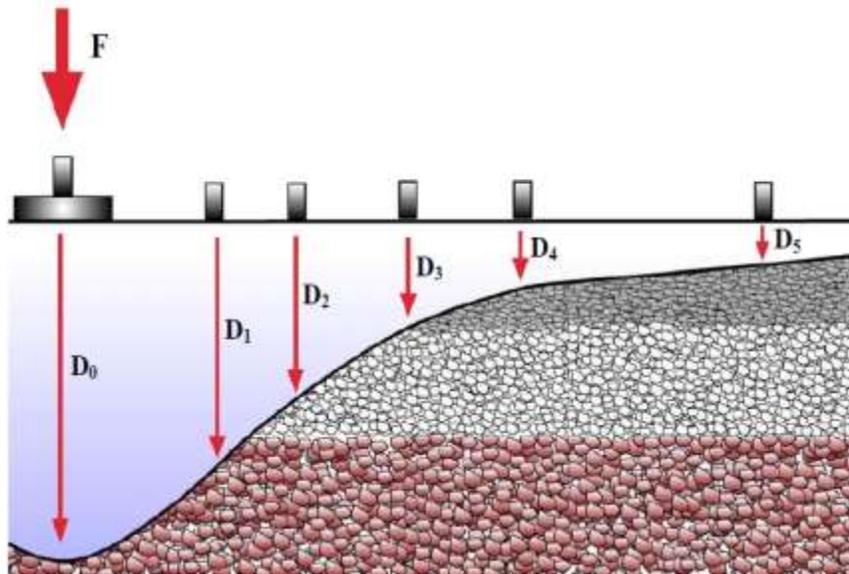
Sustituyendo valores:

$$w = \frac{(0.6 \text{ MPa}) (15 \text{ cm})}{200 \text{ MPa}} (0.83) = 0.037 \text{ cm}$$

Por lo tanto el resultado con el método de Odemark tiene una aproximación del 89.18% respecto al valor de Huang (teoría elástica multicapa).

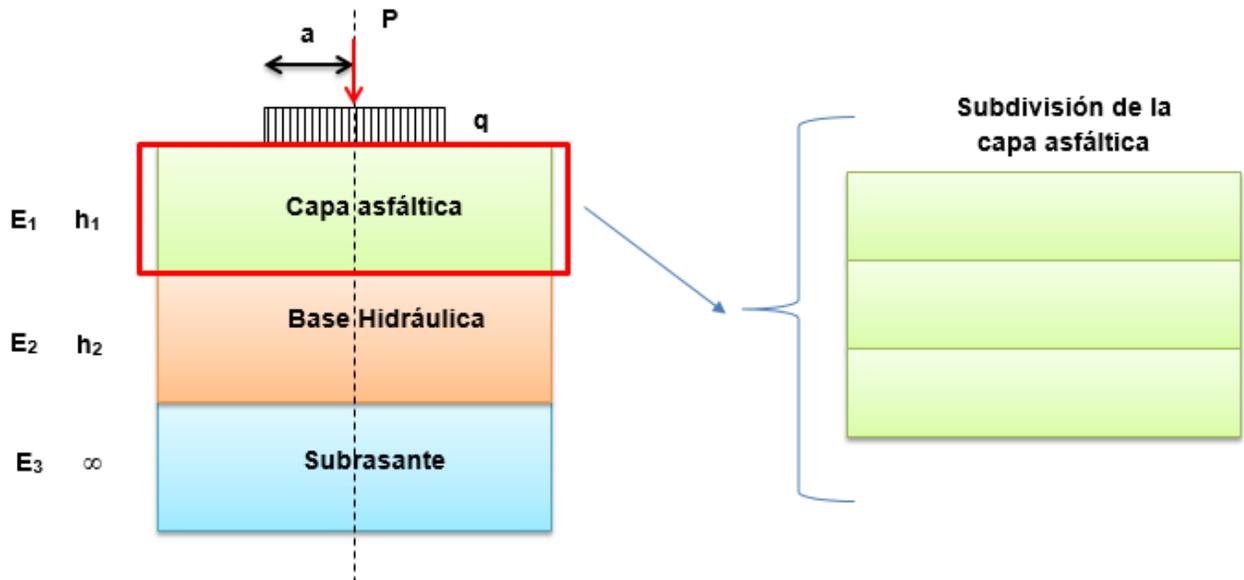
### 12.3 Van Gulp (1995)

Las teorías de estructuras equivalentes en pavimentos flexibles son artificios numéricos muy prácticos que permiten estudiar distintos fenómenos mecánicos. El Van Gulp (1995) de la Universidad Técnica de Delft en Holanda en su tesis doctoral llevó a cabo investigaciones para analizar el comportamiento de los materiales asfálticos a distintas temperaturas. En base a la auscultación deflectométrica con Deflectómetros de Impacto (HWD) es necesario llevar un proceso de corrección por temperatura de las cuencas de deflexión obtenidas con estos equipos, sobre todo para las capas estabilizadas con asfalto. Ver Figura 12.11.



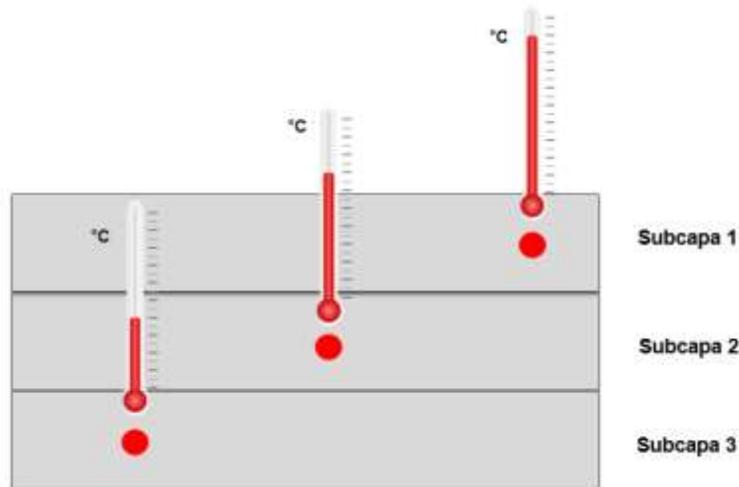
**Figura 12.11 Deflectometría en pavimentos flexibles (Van Gulp, 1995).**

La capa asfáltica que conforma a un pavimento flexible, tiene distintos gradientes de temperatura durante su etapa operativa, siendo la parte inferior la de menor temperatura y la superior la de mayor temperatura. Van Gulp recomienda entonces calcular un espesor equivalente representativo para una temperatura ponderada, partiendo de dividir en tres subcapas la capa asfáltica. Este algoritmo recibe también el nombre de “Modelo de equivalencia térmico”. Ver Figura 12.12 y Figura 12.13.



**Figura 12.12 Modelo de Van Gorp aplicado a las capas asfálticas de un pavimento flexible.**

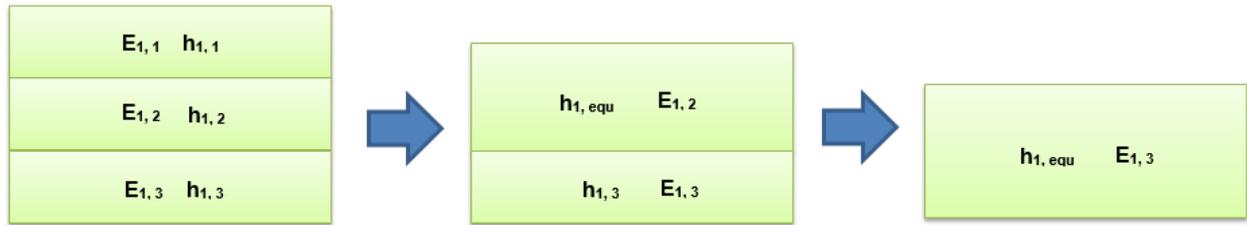
Fuente: Elaboración propia.



**Figura 12.13 Modelo de equivalencia térmico de Van Gorp (1995).**

Fuente: Elaboración propia.

La Figura 12.14 muestra la transformación de las sub-capas de la carpeta o capa asfáltica considerada.



**Figura 12.14 Transformación de espesor equivalente con subcapas para la capa asfáltica.**

Fuente: Elaboración propia.

El espesor equivalente de la capa asfáltica se calcula con la ecuación (106)

$$h_{equ} = \left(\frac{h_1}{4}\right) \left[ \left( \frac{n_1^2 n_2^2 + 64 n_1 n_2^2 + 110 n_1 n_2 + 16 n_2^2 + 64 n_2 + 1}{n_1 n_2 + 2 n_2 + 1} \right) \right]^{0.33} \quad (106)$$

$h_{equ}$  = Espesor equivalente de la capa asfáltica con rigidez de la sub-capa 3 ( $E_{1,3}$ )

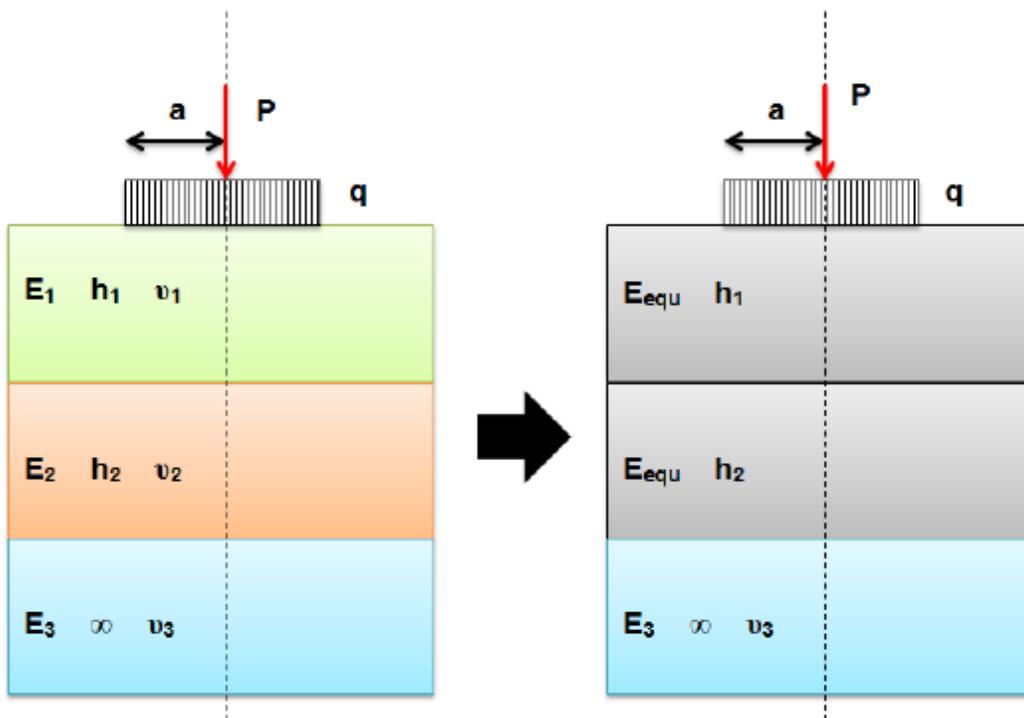
$$n_1 = E_{1,1} / E_{1,2}$$

$$n_2 = E_{1,2} / E_{1,3}$$

Esta ecuación es válida bajo la suposición de que  $h_{1,1} = \frac{1}{4} h_1$  y la temperatura está distribuida uniformemente sobre cada subcapa considerada en el análisis. La temperatura media de cada sub-capa se usa para calcular el módulo de la misma.

## 12.4 Thenn de Barros (1966)

El método desarrollado por Thenn de Barros en Brasil, tiene por objeto el de transformar un sistema de tres capas a un sistema bicapa haciendo uso del concepto de "módulos equivalentes", donde los módulos de las dos primeras capas son transformadas a un modulo equivalente. Ver Figura 12.15.



**Figura 12.15 Método de módulos equivalentes de Thenn de Barros (1966) para sistemas tricapa.**

Fuente: Elaboración propia.

La ecuación (107) muestra la forma de calcular el módulo equivalente para un sistema tricapa según Thenn de Barros.

$$E_{eq} = \left[ \frac{h_1^3 \sqrt{E_1} + h_2^3 \sqrt{E_2}}{h_1 + h_2} \right]^3 \quad (107)$$

Donde:

H<sub>1</sub> = Espesor de la capa 1

H<sub>2</sub> = Espesor de la capa 2

E<sub>1</sub> = Módulo elástico de la capa 1

E<sub>2</sub> = Módulo elástico de la capa 2

E<sub>eq</sub> = Módulo equivalente

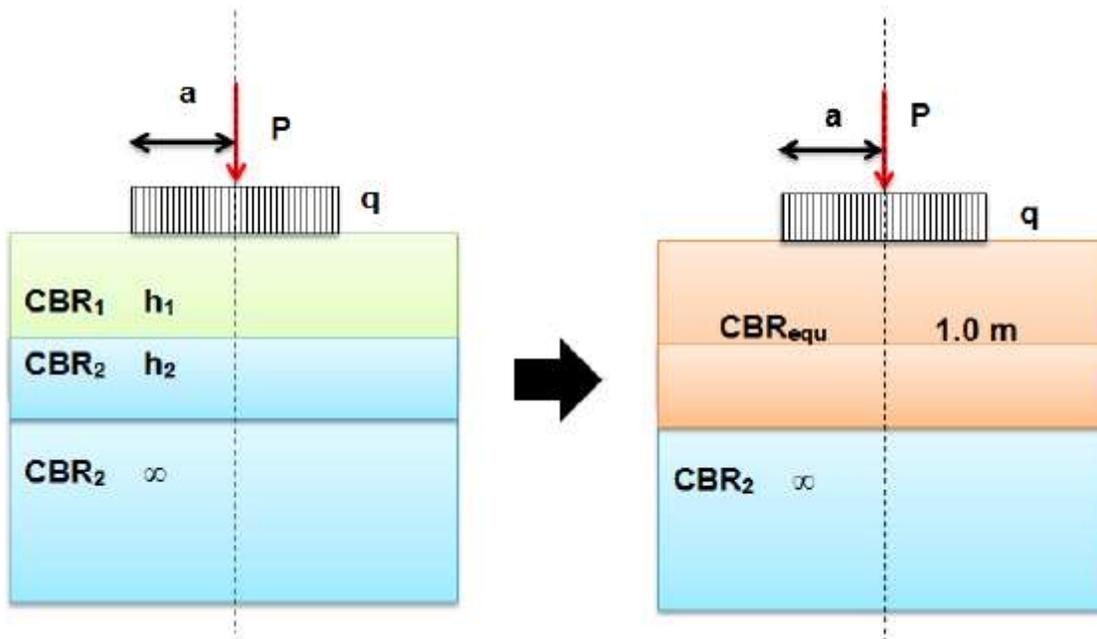
Esta expresión es utilizada en el viejo programa de cómputo DAMA (DAMAGE) para daño estructural que utiliza el Instituto del Asfalto para análisis de tipo elástico no lineal (Huang, 2004).

Según Thenoux *et al* (1999), la expresión anterior puede extenderse a más de tres capas, teniéndose una ecuación mucho más general. Ver ecuación (108).

$$E_{eq} = \left[ \frac{h_1^3 \sqrt{E_1} + h_2^3 \sqrt{E_2} + \dots + h_n^3 \sqrt{E_n}}{h_1 + h_2 + \dots + h_n} \right]^3 \quad (108)$$

Esta fórmula puede emplearse cuando el pavimento está compuesto por capas asfálticas de diferente rigidez como puede ser una capa de rodadura, capa intermedia y una capa de base asfáltica (pavimentos tipo full Depth).

Análogamente la Asociación de Carreteras de Japón (Nataatmadja *et al*, 2012) utiliza en su manual de diseño de pavimentos flexibles una fórmula similar a la propuesta por Thenn de Barros solo que en lugar de considerar el valor de los módulos elásticos se considera el valor del CBR (Valor Relativo de Soporte) tal y como se ilustra a continuación. Ver Figura 12.16.



**Figura 12.16 Método de módulos equivalentes de Thenn de Barros (1966) adaptado por Nataatmadja *et al*.**

Fuente: Elaboración propia.

La ecuación (109) muestra la forma de calcular el Valor Relativo de Soporte equivalente para sistemas donde se consideren bases hidráulicas, sub-bases y subrasantes.

$$CBR_m = \left[ \frac{h_1 \sqrt[3]{CBR_1} + h_2 \sqrt[3]{CBR_2} + \dots + h_n \sqrt[3]{CBR_n}}{h_1 + h_2 + \dots + h_n} \right]^3 \quad (109)$$

Evidentemente que la fórmula anterior tiene el inconveniente de no poder utilizar un CBR equivalente a la capa estabilizada por lo que su utilización se limita a emplearse en capas granulares o no estabilizadas.

Así como muchos autores ya comentados con anterioridad, Thenn de Barros propone factores de esfuerzo para sistemas de dos capas (ver Figura 12.17) con distintos valores de relación modular y relaciones h/a (espesor capa 1/radio del neumático).

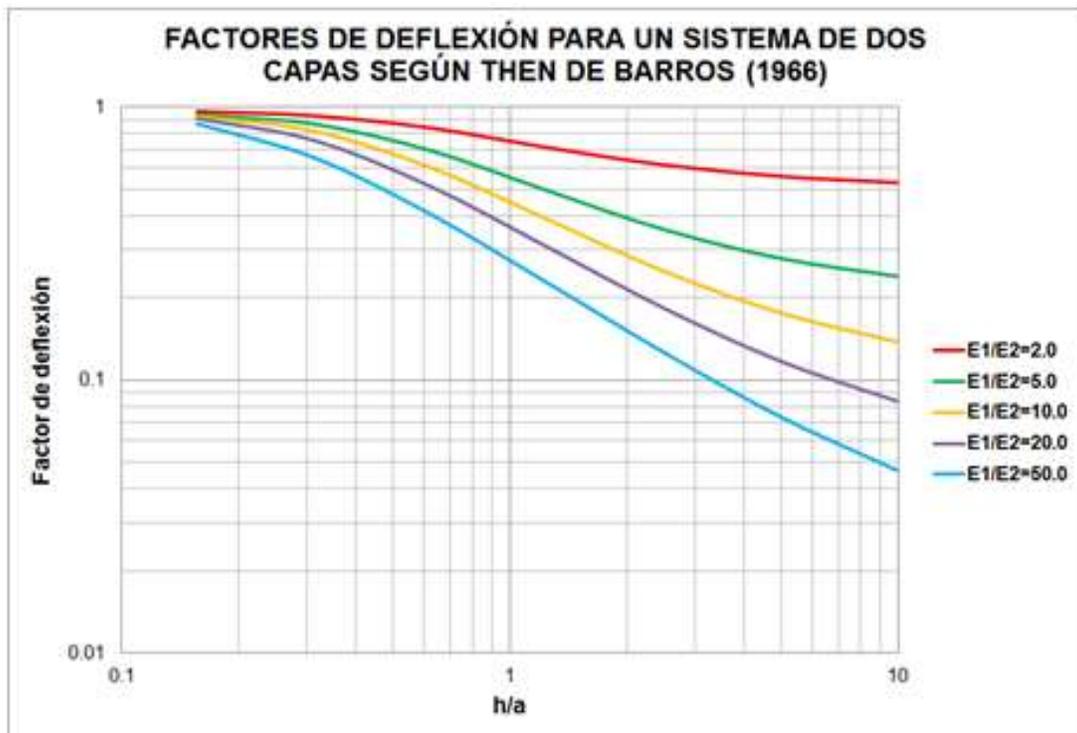


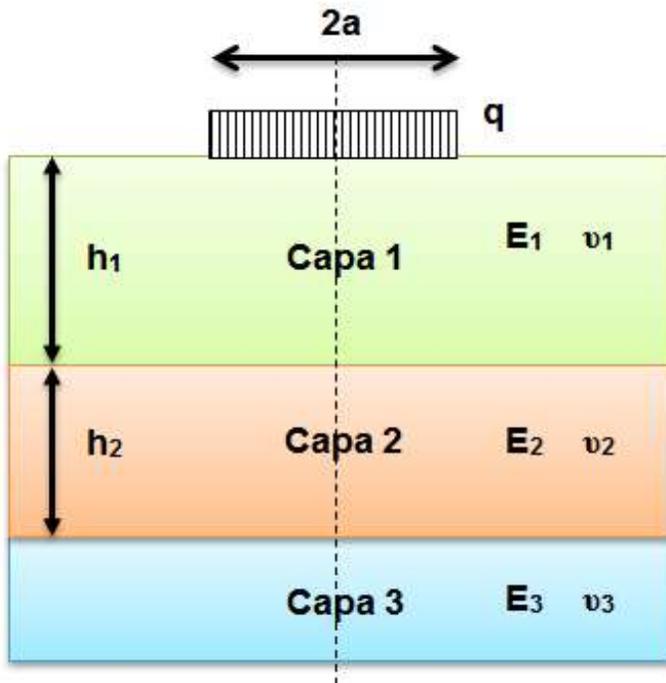
Figura 12.17 Factores de deflexión para un sistema de dos capas según Thenn de Barros (1966).

Fuente: Elaboración propia.

Noureldin *et al* (2005) utiliza la gráfica anterior para calcular valores de sobrecarpetas asfálticas en actividades de rehabilitación de pavimentos.

### Ejemplo 16.- Thenn de Barros

Determinar la deflexión total del siguiente sistema tricapa con la solución aproximada de Thenn de Barros (1966).



$$E_1 = 3,500 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 350 \text{ MPa}$$

$$E_3 = 75 \text{ MPa}$$

$$\nu_1 = 0.4$$

$$\nu_2 = 0.4$$

$$\nu_3 = 0.4$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$h_1 = 10 \text{ cm}$$

$$h_2 = 8 \text{ cm}$$

$$q = 0.6 \text{ MPa}$$

#### Solución:

$$k_1 = 2$$

$$k_2 = 2$$

$$h_1/a = 9.5/15 = 0.633$$

$$h_2/a = 75/15 = 5$$

$$\rho_z = \frac{1.755 q a}{E_3} I_{pz}$$

$$\rho_z = \frac{1.755 (0.6) (15)}{875} (0.47) = 0.0084 \text{ cm}$$

$$E_{eq} = \left[ \frac{h_1 \sqrt[3]{E_1} + h_2 \sqrt[3]{E_2}}{h_1 + h_2} \right]^3$$

$$E_{eq} = \left[ \frac{9.5 \sqrt[3]{3500} + 75 \sqrt[3]{1750}}{9.5 + 75} \right]^3$$

$$E_{eq} = \left[ \frac{9.5 \sqrt[3]{3500} + 75 \sqrt[3]{1750}}{9.5 + 75} \right]^3 = 1907.94$$

$$E_{eq}/E_3 = 1907.94/875 = 2.18$$

$$h/a = 84.5/15 = 5.6$$

$$\rho_z = \frac{1.755 (0.6) (15)}{875} (0.50) = 0.0090 \text{ cm}$$



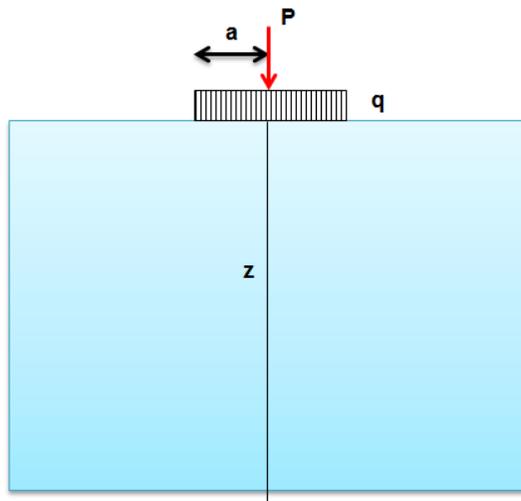
## 13 Problemas propuestos

---

A continuación se proponen algunos ejercicios prácticos para su resolución.

### Ejercicio propuesto 1.

Utilizando las fórmulas para cargas uniformemente distribuidas de Boussinesq, encontrar los esfuerzos y deformaciones normales y radiales del siguiente sistema homogéneo representado por un terraplén de baja capacidad de carga.



$z = 0, 5, 10, 15, 20, 25,$   
 $30, 40, 50, 55, 60, 70,$   
 $80, 90, 100 \text{ cm}$

$a = 15 \text{ cm}$

$E_1 = 350 \text{ MPa}$

$\nu_1 = 0.40$

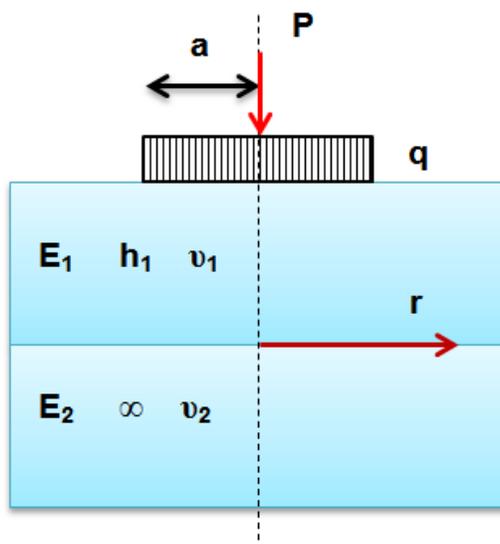
$q = 0.80 \text{ MPa}$

**Respuesta:**

Prof. (cm)	$\sigma_z$	$\sigma_r$	$\epsilon_z$	$\epsilon_r$
0	0.8000	0.72000	0.00064	0.00032
5	0.7747	0.37847	0.00135	-0.00024
10	0.6635	0.16701	0.00151	-0.00047
15	0.5172	0.06946	0.00132	-0.00047
20	0.3904	0.02880	0.00105	-0.00040
25	0.2956	0.01181	0.00082	-0.00032
30	0.2276	0.00446	0.00064	-0.00025
40	0.1433	-0.00033	0.00041	-0.00016
50	0.0970	-0.00127	0.00028	-0.00011
55	0.0816	-0.00135	0.00024	-0.00010
60	0.0695	-0.00133	0.00020	-0.00008
70	0.0521	-0.00119	0.00015	-0.00006
80	0.0404	-0.00102	0.00012	-0.00005
90	0.0322	-0.00087	0.00009	-0.00004
100	0.0263	-0.00074	0.00008	-0.00003

## Ejercicio propuesto 2.

Utilizando las soluciones de Foster y Ahlvin (1954) encontrar el esfuerzo normal, el esfuerzo radial y el esfuerzo cortante del siguiente sistema homogéneo.



$$z(h_1) = 75 \text{ cm}$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$r = 75, 90 \text{ y } 105 \text{ cm}$$

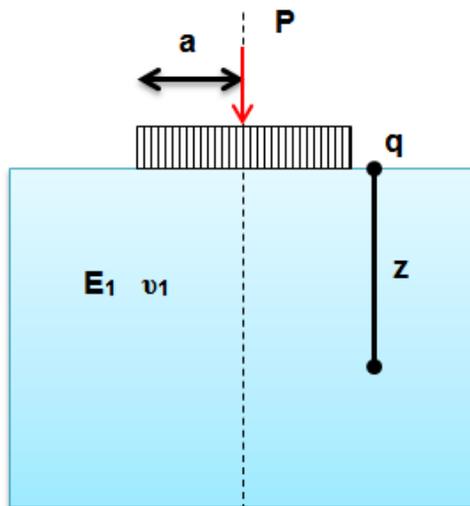
$$q = 0.6 \text{ MPa}$$

**Respuesta:**

r (cm)	$\sigma_z$ (MPa)	$\sigma_r$ (MPa)	$\tau_{rz}$ (MPa)
75	0.0066	0.0066	0.006
90	0.00408	0.0057	0.00468
105	0.0024	0.0048	0.0033

### Ejercicio propuesto 3

Utilizando las soluciones tabulares (funciones) de Ahlvin y Ulery (1962) encontrar el esfuerzo normal, el esfuerzo radial, el esfuerzo tangencial, la deformación vertical, la deformación radial, la deformación tangencial y el esfuerzo cortante máximo del siguiente sistema homogéneo.



$$z = 30 \text{ cm}$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$E_1 = 200 \text{ MPa}$$

$$\nu_1 = 0.50$$

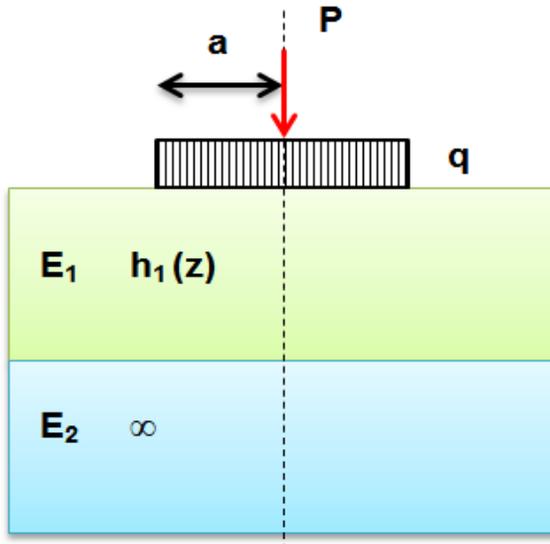
$$q = 0.60 \text{ MPa}$$

Respuesta:

$\theta$	$\sigma_z$	$\sigma_p$	$\sigma_\theta$	$T_{pz}$	$e$	$\epsilon_z$	$\epsilon_p$
0.190	0.171	0.009678	0.009678	0	0	0.00080496	-0.00040248

## Ejercicio propuesto 4.

Determinar los esfuerzos normales en la interface de las dos capas para el siguiente sistema mediante la solución gráfica de Burmister (1943), tomando el esquema siguiente.



$$E_1 = 2,500 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 500 \text{ MPa}$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$h_1(z) = 45 \text{ cm}$$

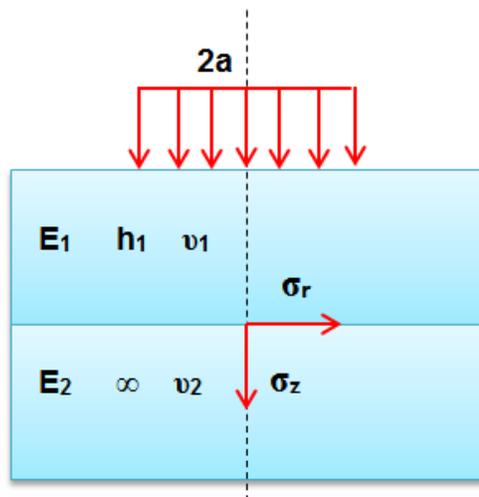
$$q = 0.6 \text{ MPa}$$

Respuesta:

$$\sigma_z = 0.048 \text{ MPa}$$

### Ejercicio propuesto 5.

Determinar el esfuerzo normal y radial del siguiente sistema bicapa con los datos indicados, considerando las soluciones tabulares de Fox (1948). Las capas no están adheridas.



$$E_1 = 5,000 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 500 \text{ MPa}$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$h_1(z) = 7.5 \text{ cm}$$

$$q = 0.6 \text{ MPa}$$

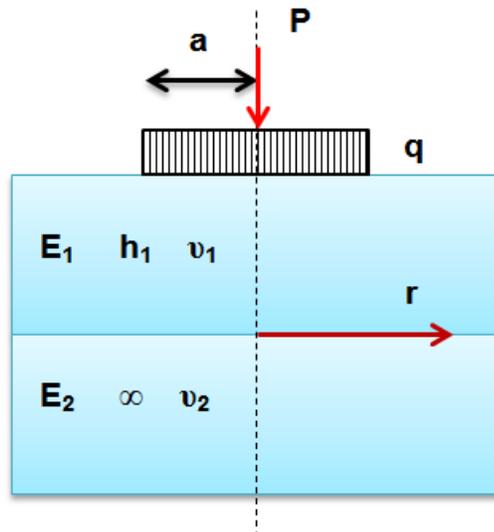
Respuesta:

$$\sigma_z = 0.384 \text{ MPa}$$

$$\sigma_r = 0.204 \text{ MPa}$$

## Ejercicio propuesto 6.

Encontrar el esfuerzo normal en la interfaz del siguiente sistema bicapa considerando una distancia "r" fuera del eje de simetría (60 cm) y dentro de él, considerando las soluciones gráficas de Fox.



$$E_1 = 4,000 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 250 \text{ MPa}$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$r = 45 \text{ cm}$$

$$r = 0 \text{ cm}$$

$$h_1(z) = 30 \text{ cm}$$

$$q = 0.6 \text{ MPa}$$

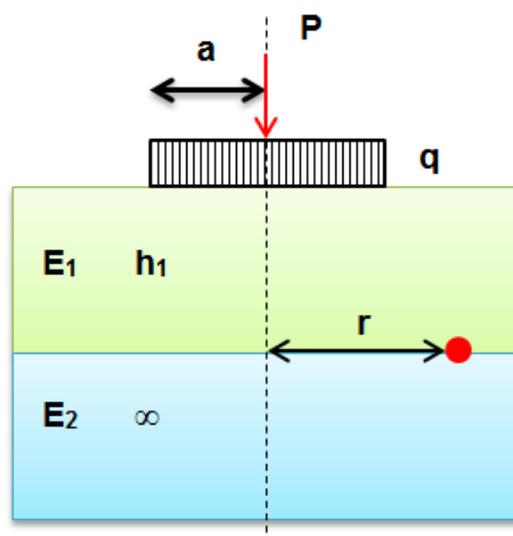
Respuesta:

$$\sigma_z = 0.0192 \text{ MPa (} r = 45 \text{ cm)}$$

$$\sigma_z = 0.156 \text{ MPa (} r = 0 \text{ cm)}$$

### Ejercicio propuesto 7.

Utilizando las soluciones de Huang (1969) encontrar la deflexión del sistema bicapa mostrado, bajo las siguientes condiciones.



$$E_1 = 1,000 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 200 \text{ MPa}$$

$$r = 0 \text{ cm}$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$h_1 = 15 \text{ cm}$$

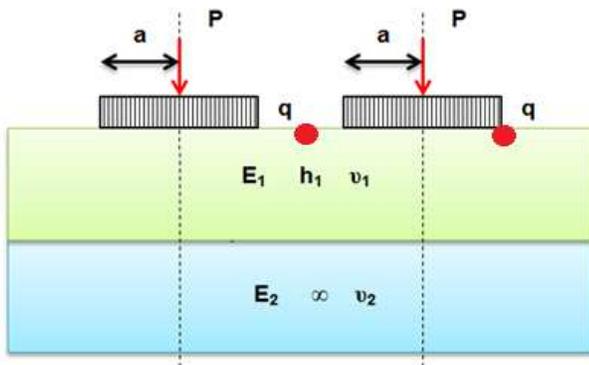
$$q = 0.6 \text{ MPa}$$

Respuesta:

$$W = 0.037 \text{ cm}$$

## Ejercicio propuesto 8.

Utilizando el principio de superposición encontrar la deflexión total del sistema bicapa mostrado en la figura considerando un eje dual.



$$h_1 = 25.2 \text{ in}$$

$$a = 12.61 \text{ in}$$

$$E_1 = 100,000 \text{ psi}$$

$$E_2 = 20,000 \text{ psi}$$

$$\nu_1 = \nu_2 = 0.50$$

$$P = 50,000 \text{ lb}$$

$$q = 100 \text{ psi}$$

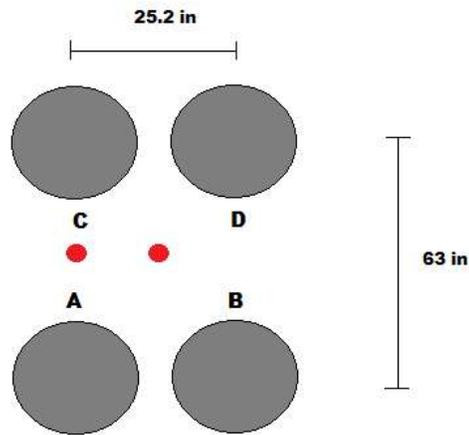
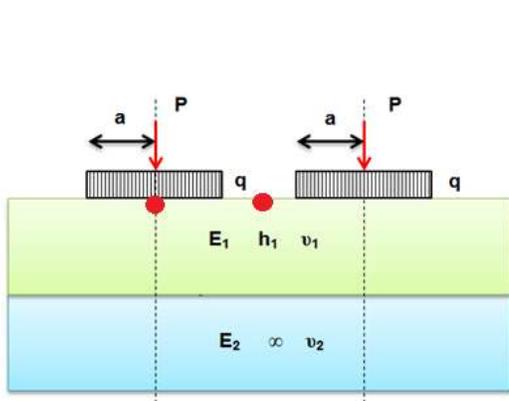
**Respuesta:**

Deflexión punto medio entre ambos neumáticos = 0.05418 in

Deflexión extremo neumático B = 0.04473 in

### Ejercicio propuesto 9.

Utilizando el principio de superposición encontrar la deflexión total del sistema bicapa mostrado en la figura considerando un eje tándem.



$$h_1 = 25.2 \text{ in}$$

$$a = 12.61 \text{ in}$$

$$E_1 = 1,000,000 \text{ psi}$$

$$E_2 = 20,000 \text{ psi}$$

$$\nu_1 = \nu_2 = 0.50$$

$$P = 50,000 \text{ lb}$$

$$q = 100 \text{ psi}$$

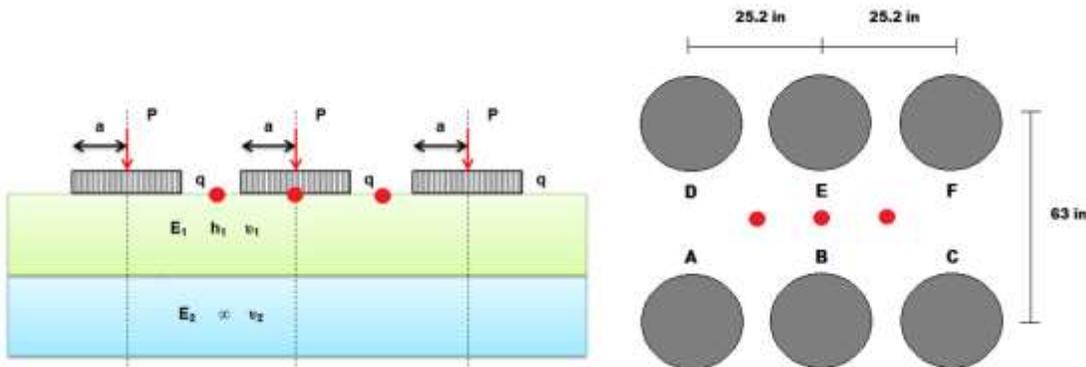
### Respuesta:

Deflexión punto medio entre neumáticos A y C = 0.0517 in

Deflexión punto medio todo el sistema = 0.0504 in

## Ejercicio propuesto 10.

Utilizando el principio de superposición encontrar la deflexión total del sistema bicapa mostrado en la figura considerando un eje trídrem.



$$h_1 = 25.2 \text{ in}$$

$$a = 12.61 \text{ in}$$

$$E_1 = 500,000 \text{ psi}$$

$$E_2 = 20,000 \text{ psi}$$

$$\nu_1 = \nu_2 = 0.50$$

$$P = 50,000 \text{ lb}$$

$$q = 100 \text{ psi}$$

**Respuesta:**

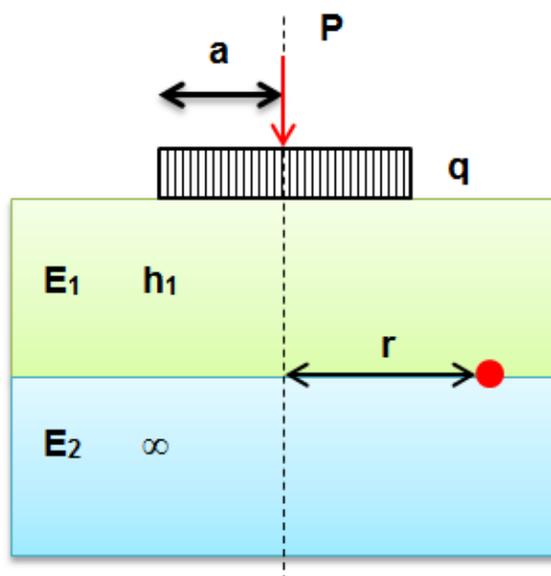
Deflexión punto medio entre neumáticos A, B, C y D = 0.0857 in

Deflexión centroide todo el sistema = 0.0806 in

Deflexión punto medio entre neumáticos B, C, E y F = 0.0857 in

### Ejercicio propuesto 11.

Utilizando las soluciones de Huang (1969) calcular el esfuerzo vertical en la interfaz del siguiente sistema bicapa.



$$E_1 = 1,000 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 200 \text{ MPa}$$

$$r = 15 \text{ cm}$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$h_1 = 15 \text{ cm}$$

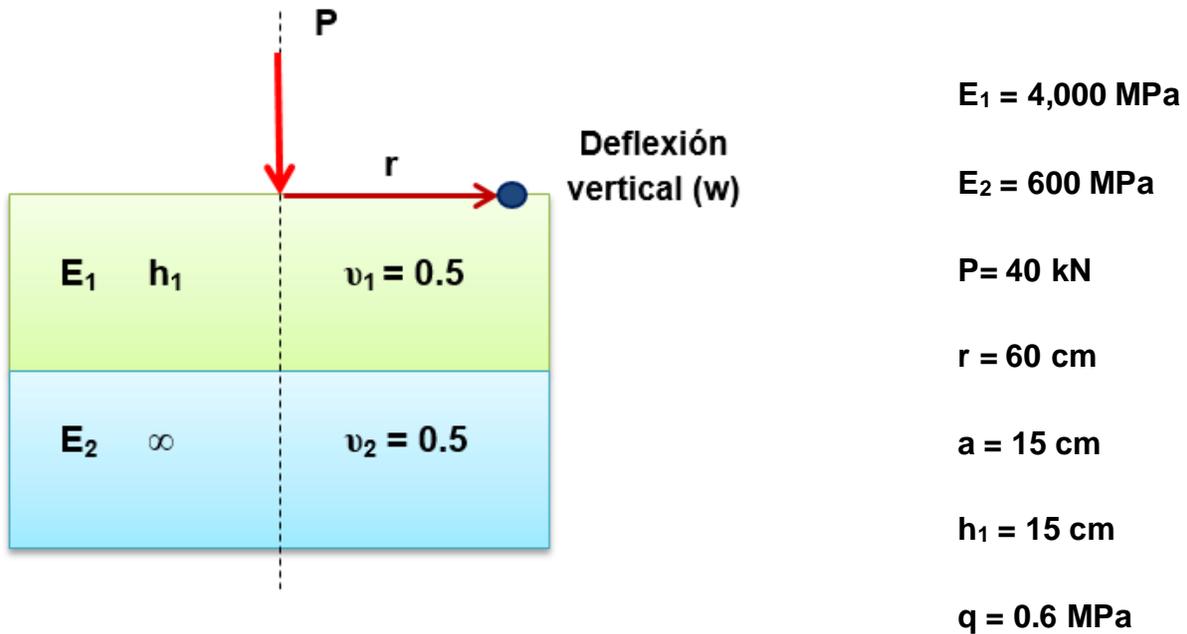
$$q = 0.6 \text{ MPa}$$

Respuesta:

$$\sigma_c = 0.240 \text{ MPa}$$

## Ejercicio propuesto 12.

Utilizando la solución numérica de Swift (1972) calcular la deflexión total del siguiente sistema bicapa.

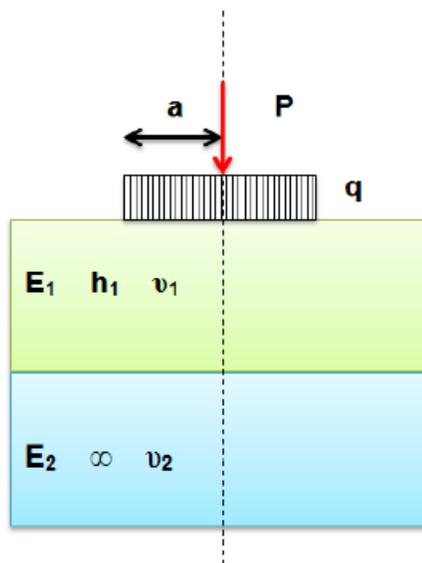


Respuesta:

$$W = 0.000285 \text{ cm}$$

### Ejercicio propuesto 13.

Utilizando las soluciones de Raad y Marhamo (1991) encontrar el esfuerzo normal, la deflexión y la deformación a tensión del siguiente sistema bicapa.



$$h_1 = 30 \text{ y } 45 \text{ cm}$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$h_2 = 15 \text{ cm}$$

$$q = 0.6 \text{ MPa}$$

$$E_1 = 4,000 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 40 \text{ MPa}$$

Respuesta:

$$\sigma_z = 0.016 \text{ MPa (} h_1 = 30 \text{ cm)}$$

$$W = 0.045 \text{ cm (} h_1 = 30 \text{ cm)}$$

$$\varepsilon_x = 0.00013 \text{ (} h_1 = 30 \text{ cm)}$$

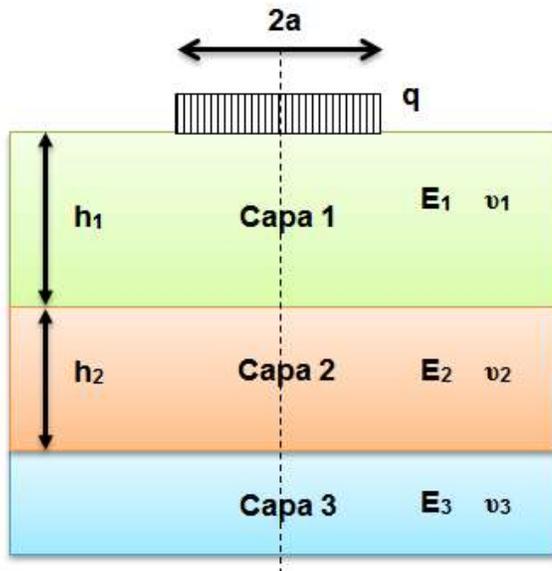
$$\sigma_z = 0.008 \text{ MPa (} h_1 = 45 \text{ cm)}$$

$$W = 0.0315 \text{ cm (} h_1 = 45 \text{ cm)}$$

$$\varepsilon_x = 0.000053 \text{ (} h_1 = 45 \text{ cm)}$$

## Ejercicio propuesto 14.

Determinar la deflexión total del siguiente sistema tricapa con la solución general propuesta por Vesic (1963).



$$E_1 = 6,000 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 1,500 \text{ MPa}$$

$$E_3 = 600 \text{ MPa}$$

$$\nu_1 = 0.35$$

$$\nu_2 = 0.35$$

$$\nu_3 = 0.35$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$h_1 = 9.5 \text{ cm}$$

$$h_2 = 75 \text{ cm}$$

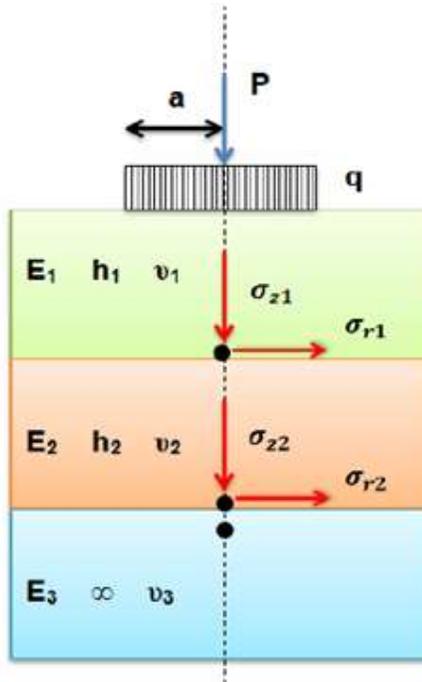
$$q = 0.6 \text{ MPa}$$

Respuesta:

$$\rho_z = 0.0120 \text{ cm}$$

### Ejercicio propuesto 15.

Resolver el ejercicio 5 mediante el método tabular de Jones (1966) encontrar los esfuerzos normales y radiales en las interfaces 1 y 2 del siguiente sistema tricapa.



$$E_1 = 400,000 \text{ psi}$$

$$E_2 = 20,000 \text{ psi}$$

$$E_3 = 10,000 \text{ psi}$$

$$a = 4.8 \text{ in}$$

$$h_1 = 6 \text{ in}$$

$$h_2 = 12 \text{ in}$$

$$q = 120 \text{ psi}$$

Respuesta:

$$\sigma_{z1} = 16.17 \text{ psi}$$

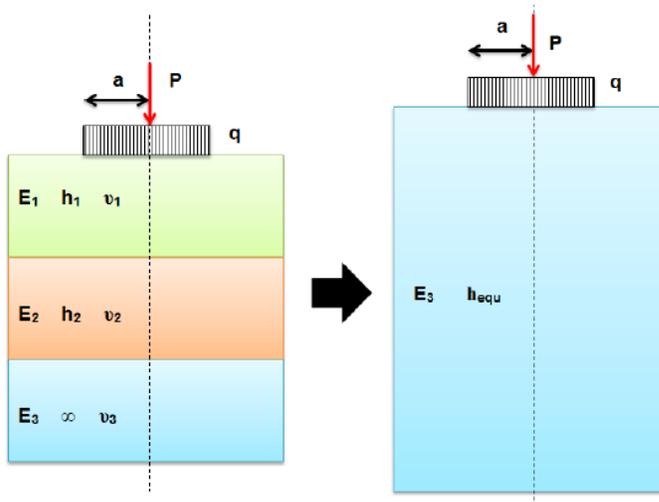
$$\sigma_{z2} = 4.79 \text{ psi}$$

$$\sigma_{r1} = -211.61 \text{ psi}$$

$$\sigma_{r2} = -3.27 \text{ psi}$$

## Ejercicio propuesto 16.

Transformar el siguiente sistema tricapa mediante el planteamiento teórico de Odemark (1949) con los datos mostrados en la figura.



$$E_1 = 6,000 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 320 \text{ MPa}$$

$$E_3 = 38 \text{ MPa}$$

$$h_1 = 7 \text{ cm}$$

$$h_2 = 20 \text{ cm}$$

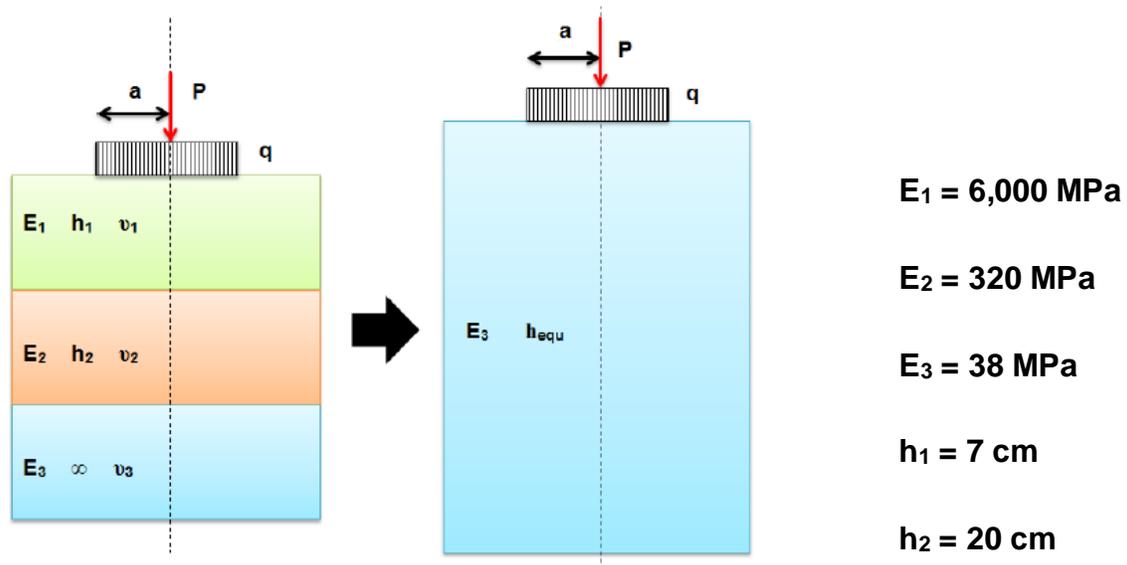
Respuesta:

$$H_{equ1} = 18.59 \text{ cm}$$

$$H_{equ2} = 78.52 \text{ cm}$$

### Ejercicio propuesto 17.

Transformar el sistema tricapa mostrado en el siguiente esquema mediante el planteamiento teórico de Palmer y Barber

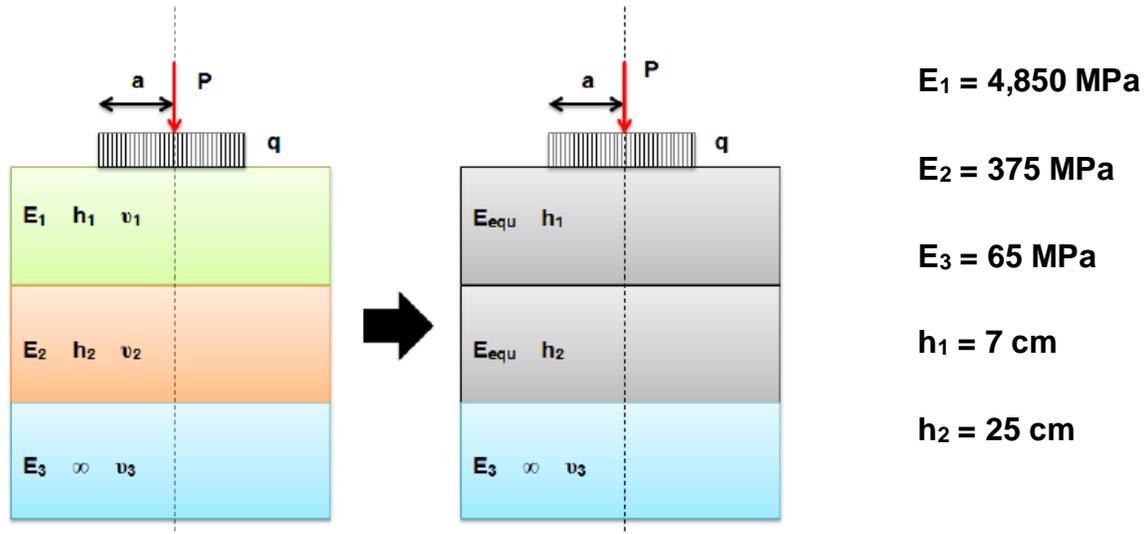


Respuesta:

$$H_{equ1} = 59.49 \text{ cm}$$

## Ejercicio propuesto 18.

Encontrar el módulo equivalente del siguiente sistema tricapa mediante las soluciones numéricas de Thenn de Barros (1966).

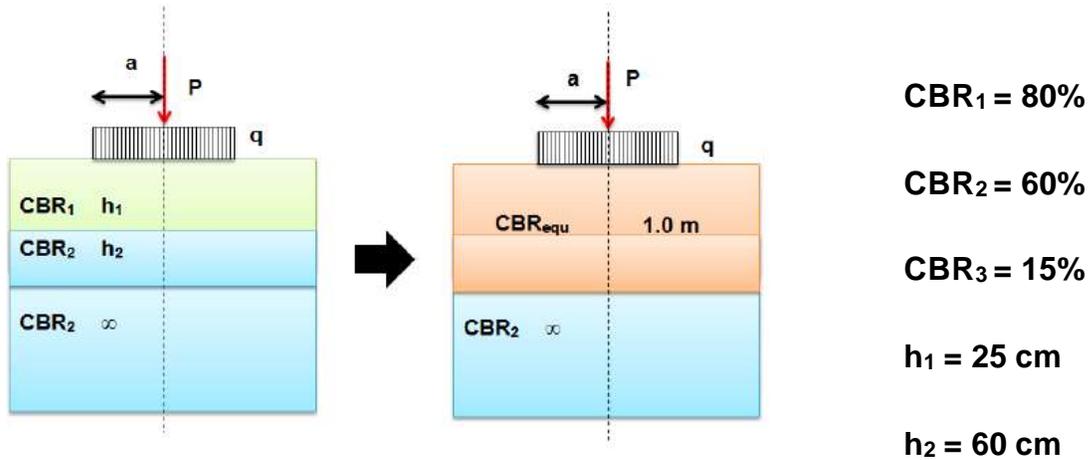


Respuesta:

$$E_{\text{equ}} = 814 \text{ MPa}$$

### Ejercicio propuesto 19.

Encontrar el CBR equivalente del siguiente sistema tricapa compuesto de capas granulares (base hidráulica + sub-base + subrasante) usado para un camino revestido, mediante las soluciones numéricas de la Asociación de Carreteras de Japón (2012).



Respuesta:

$$CBR_{equ} = 65.49\%$$

## 14 Determinación de esfuerzos, deformaciones y deflexiones en sistemas de pavimento multicapa mediante programas de computadora

---

En los últimos años los programas y ordenadores de cómputo han tenido una evolución enorme en la ingeniería de pavimentos. Bajo la concepción del análisis mecanicista varios programas de computadora han sido desarrollados por agencias de transporte e investigación alrededor del mundo. A partir de que Jones (1962) presentó su metodología para calcular la respuesta de un pavimento flexible de tres capas se hizo patente que las soluciones gráficas presentadas por él y posteriormente llevadas a cartas o cuadrículas por Peattie (1962) comenzaban a volverse muy complejas. A partir de ese momento fue necesario incorporar las soluciones diferenciales de Burmister (1943) para sistemas de  $n$ -capas o multicapas a potentes ordenadores de cómputo. Estos programas utilizan de manera general tres métodos: análisis elástico multicapa, análisis de elemento finito en dos dimensiones (2D) y análisis de elemento finito en tres dimensiones (3D). El más popular de estos tres es el primero, donde la estructura del pavimento es dividida por capas cada una de ellas caracterizada mecánicamente con características homogéneas, isotrópicas y linealmente elásticas. Algunos de estos programas son el CHEVRON, ELSYM 5, KENLAYER, WESLEA, WINJULEA, entre muchos otros. Ver Figura 14.1.



Figura 14.1 Programas de análisis estructural multicapa.

Algunos de estos programas constituyen, como tales, parte de metodologías de diseño de pavimentos flexibles como lo es por ejemplo el programa DAMA con el cual se constituyeron los ábacos de diseño del Instituto del Asfalto (1981); el programa WinJULEA el cual forma parte de la metodología empírico-mecanicista de la AASHTO 2008; el programa ICAFIR permitió elaborar catálogos de secciones de pavimentos en varias provincias españolas, metodologías de catálogos muy extendidos en ese país europeo; solo por mencionar algunos de ellos. Estos programas han sido empleados para una multitud de aplicaciones prácticas tales como evaluar desempeños de modelos de deterioro, definir factores de daño para distintas configuraciones vehiculares, la utilización de valores de referencia para catálogos de secciones estructurales de pavimentos, etc.

Chen *et al* (1995) llevaron a cabo una interesante investigación numérica donde compararon distintos programas de respuesta estructural del pavimento (tanto de análisis lineal, no lineal, viscoelástico y elemento finito) con el objeto de definir cuál podría ser el más completo para análisis estructural y de respuesta de pavimentos flexibles. En su estudio concluyó que el programa DAMA era probablemente el mejor en términos de deformaciones críticas, esfuerzos y deflexiones.

Los programas de análisis de elemento finito en dos dimensiones (2D) simulan de mejor forma y más real las características de anisotropía y no linealidad de los materiales. Desafortunadamente estos programas no incluyen la no uniformidad de cargas y las distintas condiciones de los ejes de los vehículos. Los programas de análisis finito en tres dimensiones (3D) superan todas las debilidades de los programas en 2D y se están convirtiendo en los más populares. Sin embargo requieren más tiempo para obtener resultados.

A continuación se describen algunos de estos programas.

## **14.1 BISAR 3.0**

El programa BISAR 3.0 (Bitumen Stress Analysis in Roads) fue desarrollado por la empresa SHELL (De Jong *et al*, 1973) en la década de los 70's, el cual fue empleado para desarrollar las cartas de diseño de la metodología del manual de diseño de pavimentos de la SHELL. Este programa permite el cálculo de esfuerzos, deformaciones y deflexiones para una gran variedad de cargas. Permite además calcular esfuerzos horizontales y radiales entre las capas del pavimento. Ver Figura 14.2.

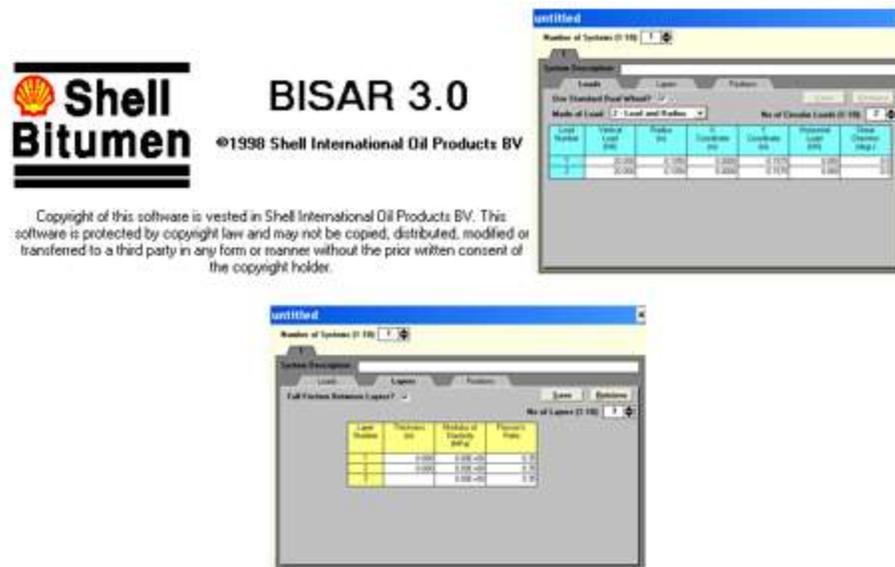


Figura 14.2 Carátula y pantallas de apoyo del programa BISAR 3.0.

## 14.2 ELSYM 5

El programa ELSYM 5 (Elastic Layered System Computer Program) fue desarrollado por la Federal Highway Washington Administration (FHWA) y tiene la capacidad de evaluar pavimentos de hasta cinco capas con veinte diferentes acomodos de neumáticos. Ver Figura 14.3.



Figura 14.3 Carátula y pantallas de apoyo del programa ELSYM 5.

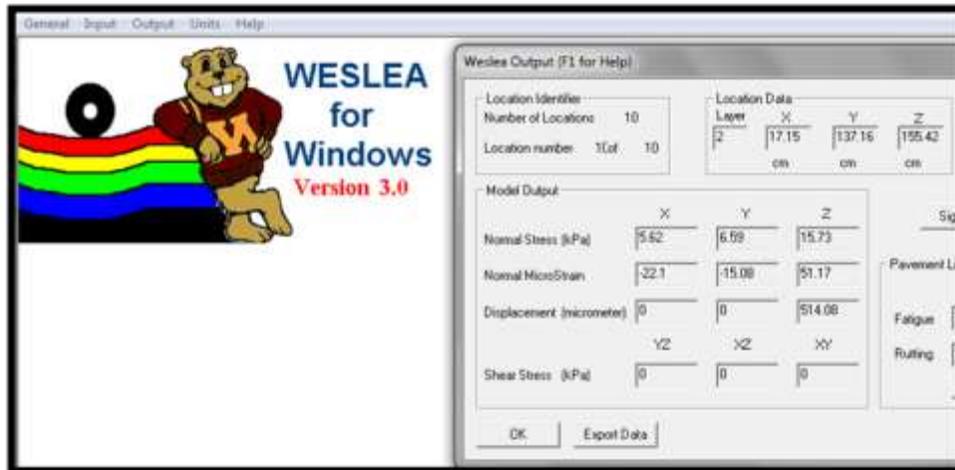
## 14.3 WESLEA

El programa WESLEA (Waterways Experimental Station Layered Elastic Analysis) fue desarrollado por el cuerpo de ingenieros de los Estados Unidos (US Army Corps Engineers). Permite modelar pavimentos flexibles con un máximo de 5 capas y con configuraciones de tránsito para ejes direccionales, ejes duales, ejes tándem y ejes tridem. La principal desventaja del método es que no permite modelar la respuesta a una distancia  $x,y$  seleccionada arbitrariamente por el usuario, ya que solamente se calcula dicha respuesta en  $x,y$  para las dimensiones geométricas de los ejes mencionados anteriormente. Sin embargo el ambiente Windows es muy amigable para el análisis de estructuras de tipo flexibles. Ver Figura 14.4.



Figura 14.4 Carátula y pantallas de apoyo del programa WESLEA.

A continuación se describen los resultados generales que se obtienen con WESLEA. En la Figura 14.5 se muestra la pantalla de resultados del campo de esfuerzos, deformaciones y deflexiones generadas con el programa.



**Figura 14.5 Resultado del campo de esfuerzos, deformaciones y deflexiones con WESLEA.**

En las casillas de “Normal Stress (kPa)” aparecen los siguientes resultados:

$$\sigma_x = 5.62 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = 6.59 \text{ kPa}$$

$$\sigma_z = 15.73 \text{ kPa}$$

Para este caso, los datos de entrada al programa (inputs) fueron sus propiedades elásticas (segunda capa):

$$E = 200 \text{ MPa} = 200,000 \text{ kPa.}$$

$$\nu = 0.45.$$

Ahora mediante las ecuaciones (2), (3) y (4) se calculan las deformaciones unitarias para esta segunda capa:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{200,000} [15.73 - 0.45(5.62 + 6.59)] = 51.1775 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_z + \sigma_y)] = \frac{1}{200,000} [5.62 - 0.45(15.73 + 6.59)] = -22.12 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = \frac{1}{200,000} [6.59 - 0.45(15.73 + 5.62)] = -15.0875 \times 10^{-6}$$

Resultados que aparecen en las casillas “Normal MicroStrain” de la pantalla del WESLEA.

## 14.4 DAMA

El programa DAMA (acrónimo de DAMAGE (daño)) fue desarrollado por el Instituto del Asfalto de los Estados Unidos (Hwang y Witczak, 1979) el cual trabaja internamente en el software del Asphalt Institute para el diseño de pavimentos flexibles. Este programa no solamente permite calcular esfuerzos, deformaciones y deflexiones sino que se usa para analizar la influencia de las variaciones mensuales de la temperatura en el pavimento. El programa utiliza un máximo de cinco capas. DAMA lleva a cabo una secuencia de análisis de daño acumulativo para encontrar la vida útil del pavimento por fatiga en las capas estabilizadas y deformación permanente en las capas granulares y suelos. Ver Figura 14.6.

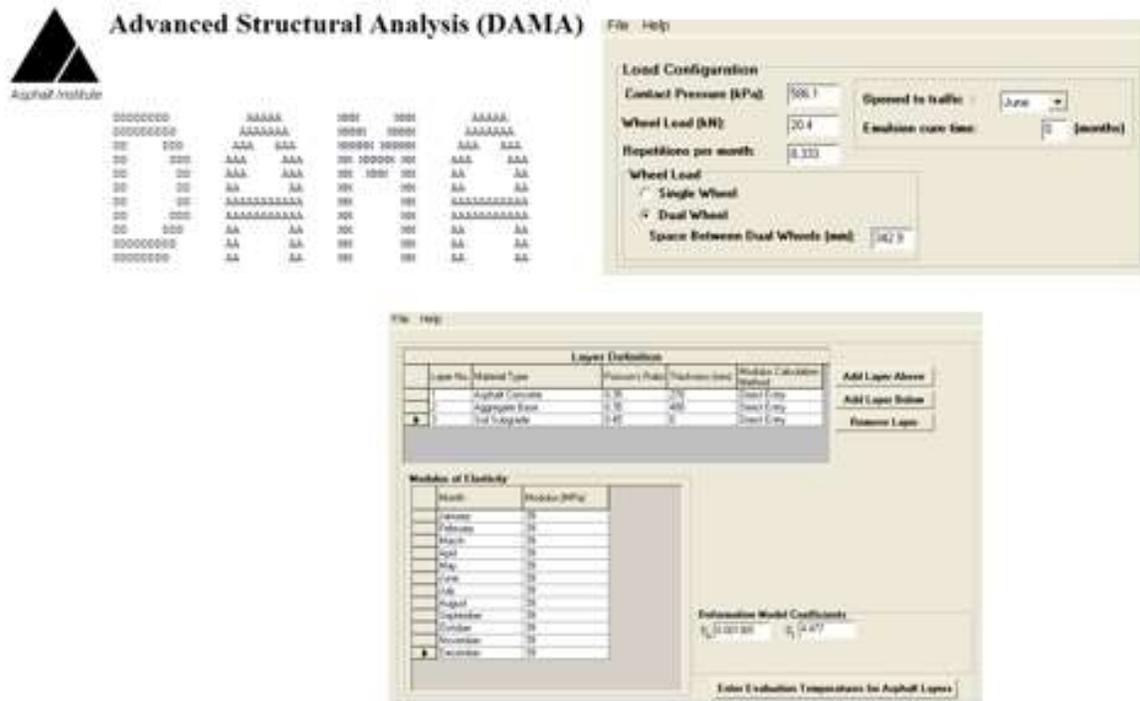


Figura 14.6 Carátula y pantallas de apoyo del programa DAMA.

## 14.5 KENLAYER

El programa KENLAYER, escrito por Yang H. Huang (Huang, 1993) en la Universidad de Kentucky, USA, utilizado para el análisis de pavimentos flexibles, resuelve sistemas de pavimentos de varias capas de material elástico sometidos a una carga circular. Puede ser aplicado a sistemas de varias capas sometidos a cargas de rueda simple, dual tándem o dual trídem con cada capa comportándose de forma diferente, sea de manera elástica-lineal, elástica-no-lineal o viscoelástica. El programa puede realizar análisis de daños y aplicarse a un sistema de pavimento de 19 capas como máximo. En el análisis de ruedas simples, se pueden obtener resultados hasta para 10 coordenadas radiales y 19

coordenadas verticales, es decir un total de 190 puntos. Para análisis de ruedas múltiples, además de las 19 coordenadas verticales, se pueden obtener soluciones en 25 puntos, especificando las coordenadas x e y de cada punto. El KENLAYER está escrito en FORTRAN 77 y en la última actualización del 2004 el programa se llevó a una nueva plataforma de Windows cambiando al nombre de KENPAVE. Ver Figura 14.7.



Figura 14.7 Carátula y pantallas de apoyo del programa KENPAVE.

## 14.6 WINJULEA

El programa elástico multicapa WinJULEA (Windows Jacob Uzan Layered Elastic Analysis) fue desarrollado por el Dr. Jacob Uzan como plataforma de análisis de la respuesta estructural de pavimentos flexibles por parte de la guía empírico-mecanicista DarWIN AASHTO MEPDG (NCHRP, 2004). Ver Figura 14.8.



Figura 14.8 Carátula y pantallas de apoyo del programa WinJULEA.

El software WinJULEA es una poderosa herramienta que permite modelar estructuras de pavimentos de hasta 16 capas como máximo, 100 puntos de interés, y varias configuraciones vehiculares. Así mismo arroja 24 respuestas mecánicas de interés práctico:

- Esfuerzos normales en tres direcciones (X-Y-Z).
- Esfuerzos cortantes en tres direcciones (XZ- YZ- XY).
- Deformaciones unitarias en tres direcciones (X-Y-Z).
- Deformaciones cortantes unitarias en tres direcciones (XZ-YZ- XY).
- Deflexiones o desplazamientos en tres direcciones (X-Y-Z).
- Esfuerzos principales 1,2 y 3.
- Deformaciones unitarias principales 1, 2 y 3.
- Cortante máximo.
- Esfuerzo octaédrico normal.
- Esfuerzo octaédrico cortante.

En la Figura 14.9 se muestra el modelo tridimensional que se utiliza en el programa WINJULEA. Como se ha comentado, muchas de las gráficas que volvieron a reproducirse (Foster-Ahlin, Fox, Odemark, etc.) fueron elaborados con este potente software por su grandes facilidades de utilizar y modelar.

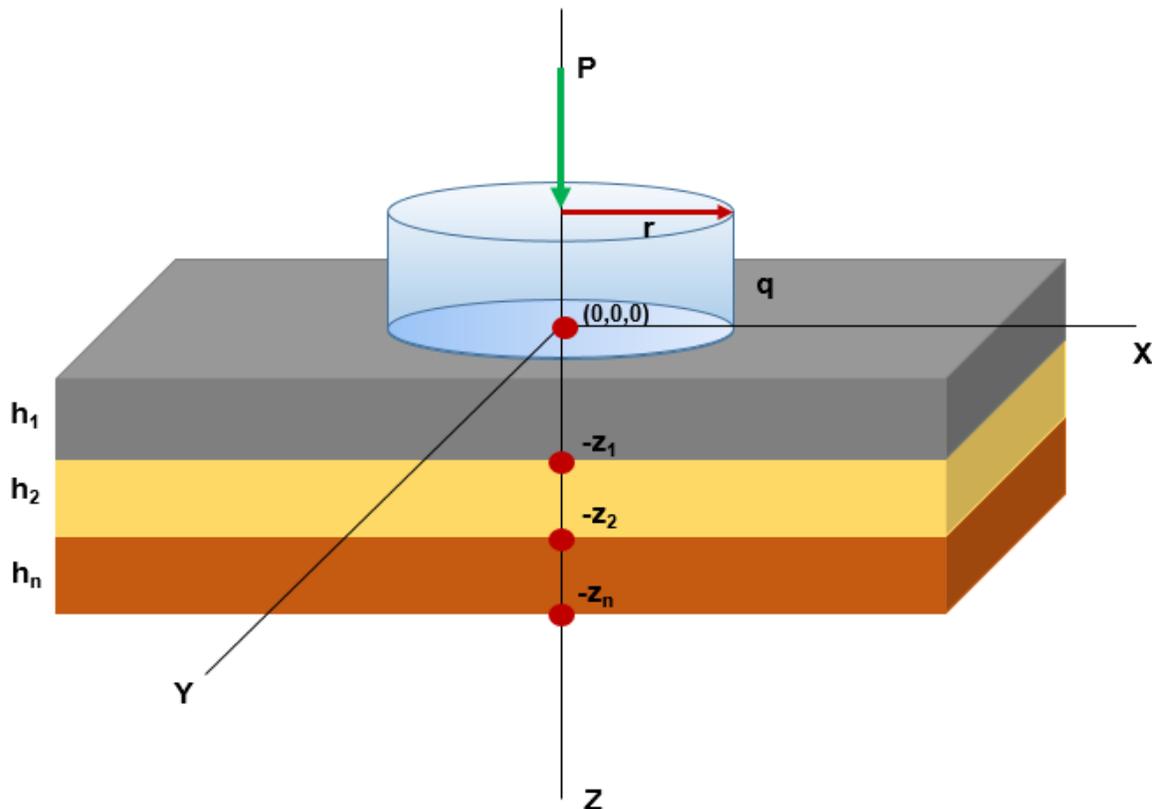


Figura 14.9 Modelo tridimensional aplicado al programa WinJULEA.

El programa WinJULEA es uno de los mejores programas existentes en el medio. Su uso ha sido ampliamente utilizado en programas de investigación sobre estructuración de pavimentos flexibles.

## 14.7 Otros programas

Existen muchos otros programas que pueden utilizarse para evaluar el campo de esfuerzos en pavimentos flexibles. A continuación se mencionan algunos de ellos:

- CIRCLY, elaborado por la administración de carreteras de Australia MINCAD.
- ALIZE III, elaborado por el Laboratorio Central de Puentes y Caminos (LCPC) de Francia.
- WINDEPAV, elaborado por la Universidad del Cauca de Colombia.
- MnLayer, elaborado por la agencia estatal de carreteras de Minnesota.
- GAMES (General Analysis for Multilayered Elastic Systems), elaborado por el Dr. Maina y utilizado en Japón.
- Me-PADS, elaborado por la agencia de carreteras de Sudáfrica.
- 3D-Move Analysis, elaborado por la Universidad de Reno, Nevada.
- Cedem (Calculo de esfuerzos y deformaciones), elaborado por el Dr. Reyes Lizcano de Colombia.

Más adelante cuando se expongan los análisis de sensibilidad, se verá la versatilidad de emplear este tipo de programas o paquetes de cómputo.

## 14.8 Limitaciones de los programas elásticos multicapas

Las siguientes suposiciones son aplicables a la mayoría de los programas basados en la teoría elástica multicapa:

- La teoría elástica multicapa supone que todos los materiales responden linealmente sobre cualquier rango de esfuerzo con la excepción del programa KENLAYER.

Sin embargo, los materiales de las capas de pavimento son dependientes del esfuerzo aplicado, lo que significa que su rigidez es función de su estado de esfuerzo. Los materiales de pavimentación normalmente solo responden de forma lineal en estados de esfuerzo mucho muy bajos, los cuales está lejos de las cargas típicas de vehículos en carretera.

- La teoría elástica multicapa supone que la respuesta del material no es viscosa. Sin embargo las capas asfálticas son materiales viscoelásticos

complejos. Las capas asfálticas son materiales dependientes del tiempo de aplicación de carga y a la temperatura. Por lo que sus propiedades solo se pueden aproximar utilizando la teoría del elástico lineal.

- La teoría elástica multicapa supone que toda la deformación es recuperable. En realidad, los materiales de pavimentación requieren una gran cantidad de tiempo para recuperar completamente la deformación y queda alguna deformación plástica (no recuperable) después de cada carga. La teoría viscoelástica lineal puede usarse para predecir la deformación permanente en sistemas de pavimento, pero es una aproximación de la deformación total en el rango plástico de deformación.
- Las propiedades del material de cada capa son homogéneas, isotrópicas y sin peso. Sin embargo las propiedades del material en las capas y suelos de pavimentación son anisotrópicas y varían tanto vertical como horizontalmente.
- Cada capa tiene un espesor finito, a excepción de la capa inferior que se extiende al infinito. Todas las capas son infinitas en la dirección lateral o longitudinal (sin juntas, grietas u otras discontinuidades en las proximidades de la carga). Las grietas y las juntas de construcción pueden afectar las deflexiones bajo carga y tienen un efecto sobre los esfuerzos cerca de la discontinuidad.
- Las soluciones de esfuerzo se caracterizan por dos propiedades del material para cada capa: la relación de Poisson,  $\mu$ , y el módulo de Young,  $E$ .
- Se supone que los efectos dinámicos de las cargas son insignificantes.
- Las cargas de las ruedas se aplican en la dirección vertical; no hay componente de carga horizontal a excepción del programa BISAR.
- Todas las áreas cargadas tienen presiones de contacto uniformes y huellas circulares.
- No hay efecto del clima en los estados de esfuerzo encontrado. La carga utilizada en estos análisis no están relacionadas con los esfuerzos térmicos o no relacionados con la carga.

Aunque las suposiciones y limitaciones son numerosas, se ha encontrado que los esfuerzos, deformaciones y deflexiones calculadas con la teoría elástica multicapa son similares a las medidas dentro de la estructura del pavimento.

## 15 Consideraciones adicionales para el análisis no lineal en pavimentos flexibles

---

Como se ha visto todas las soluciones del campo de esfuerzos en pavimentos flexibles de dos a n-capas, se resuelven considerando condiciones elásticas. Es decir análisis lineales. El análisis no lineal permite obtener las rigideces de las capas no ligadas o materiales granulares a través del estado de esfuerzos al que estará sometido de manera real por acción propia de los vehículos. El conocimiento de las teorías para calcular respuestas mecánicas permiten encontrar las rigideces de las capas de base y sub-base hidráulica y subrasante de manera iterativa y utilizando modelos constitutivos, mismos que se comentaron en el apartado de análisis no lineal de este documento.

A continuación se enumeran los pasos para determinar las rigideces de las capas granulares en pavimentos mediante una técnica iterativa.

1.- Dado una presión de inflado, el peso y el radio de un neumático determinado aplicado en una estructura de pavimento convencional de  $n$ -capas, deben proponerse valores iniciales de módulo resiliente para las capas granulares (los valores de las capas ligadas con asfalto no cambian en todo el proceso iterativo y sus valores permanecen siempre constantes)

2.- Obtener los esfuerzos normales, tangenciales y radiales en la parte media de cada una de las capas granulares y en la parte superior de la capa Subrasante (o en las terracerías cuando la subrasante tenga un espesor finito). Para ello utilícese algún programa de análisis multicapa como el WINJULEA, DAMA, WESLEA, entre muchos otros. Se recomienda utilizar el programa WINJULEA.

3.- Una vez obtenida las respuestas mecánicas anteriores introduzca sus valores en la fórmula del primer esfuerzo invariante.

$$\theta = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \gamma z (1 + 2k_o)$$

$$\theta = \sigma_z + \sigma_t + \sigma_r + \gamma z (1 + 2k_o)$$

No olvide considerar el “peso del sistema” donde se debe de tomar en cuenta el peso específico compactado de campo ( $\gamma$ ), la profundidad a la mitad del espesor de la capa considerada ( $z$ ) como puede ser una base hidráulica, sub-base o subrasante. Además considerar la presión de tierra en reposo ( $K_o$ ).

4.- Sustituir el esfuerzo invariante en el modelo constitutivo considerado

$$M_r = k_1 \theta^{k_2}$$

Con ello se obtiene el (los) valor (es) del (os) módulo (s) resiliente (s) de la (s) capa (s) considerada (s). Este valor debe compararse con el primer valor inicial propuesto. Si la variación es muy grande, se toma o toman el valor o valores últimos obtenidos y se repite la secuencia desde el punto 1. La secuencia termina cuando después de tres secuencias seguidas los porcentajes de variación ya no cambian.

Como se puede apreciar, el módulo resiliente de la capa considerada se va ajustando de manera iterativa en función del estado de esfuerzos presentes en el medio. Para ejemplificar esta rutina se llevará a cabo el siguiente ejercicio práctico. La Tabla 15.1 y Tabla 15.2 muestran los datos del ejercicio numérico.

**Tabla 15.1 Estructura considerada en el análisis no lineal de pavimentos.**

Capa	Espesor (in)	Peso Unitario (kN/m <sup>3</sup> )	Peso Unitario (lb/in <sup>3</sup> )	Ko	Relación de Poisson
Carpeta Asfáltica	3.93	24	0.084	-	0.3
Base Hidráulica	7.87	21	0.0735	3	0.35
Subrasante	11.81	18	0.063	3	0.4
Terracerías	-	18	0.063	0.5	0.4

**Tabla 15.2 Datos complementarios para análisis no lineal en pavimentos (continuación).**

q =	0.6 MPa	87.02	psi
r =	15 cm	5.9	in
A =	109.35	in <sup>2</sup>	
P =	9516	lb	

El módulo elástico de la carpeta asfáltica vale 435,113 psi (3,000 MPa), dicho valor permanecerá constante en toda la iteración.

Los cálculos se harán a la parte media del espesor de la base hidráulica y de la subrasante y en la parte superior de las terracerías.

A continuación se describe paso a paso este análisis:

- Para la iteración inicial, se considerará para el esfuerzo normal, radial y tangencial un valor de 1 psi (puede emplearse cualquier valor).
- Estos valores se introducen a la fórmula del esfuerzo invariante  $\theta$ .

- Dependiendo del modelo constitutivo seleccionado tanto para el material granular como para el suelo, se obtendrán los primeros módulos resilientes elásticos de dichas capas.
- Una vez obtenidos esos valores de módulos elásticos, se introducirán por primera vez al programa WinJULEA (o similar) para obtener de nueva cuenta los valores de esfuerzos normales, radiales y tangenciales.
- Con estos valores se vuelven a calcular el esfuerzo invariante y se calculan los módulos resilientes con los respectivos modelos constitutivos.
- Se comparan estos valores de módulos resilientes con los de la primera iteración y se obtiene el porcentaje de variación (por lo general siempre muy alto).
- Con los nuevos módulos resilientes se vuelve a repetir toda la secuencia de manera cíclica hasta que el coeficiente de variación entre el los últimos valores de módulos resilientes obtenidos con los penúltimos tengan una variación muy pequeña (1-3%).

En la Tabla 15.3 se muestran todas las iteraciones para este ejercicio numérico. Puede observarse que los módulos resilientes para los materiales granulares se van reajustando y recalculando en función del nivel de esfuerzos (esfuerzo normal, esfuerzo radial y esfuerzo tangencial) que incide en cada capa. En algunas ocasiones la variación suele ser grande. Ello depende del tipo de estructura a considerar así como del modelo constitutivo seleccionado.

**Tabla 15.3 Resultados análisis no lineal de manera iterativa.**

<b>Iteración 1</b>	<b>Módulo Inicial (psi)</b>	<b>Esfuerzo normal <math>\sigma_z</math></b>	<b>Esfuerzo radial <math>\sigma_r</math></b>	<b>Esfuerzo tangencial <math>\sigma_t</math></b>	<b><math>\theta</math></b>	<b>Módulo Elástico E (psi)</b>	<b>% variación</b>
Carpeta Asfáltica	435113						
Base Hidráulica	29007.5	1	1	1	7.0465425	31133.28685	7.328
Subrasante	14503.7	1	1	1	10.807905	16133.94796	11.24
Terracerías	7251.9	1	1	1	5.97486	7702.522507	6.214
<b>Iteración 2</b>	<b>Módulo (psi)</b>	<b>Esfuerzo normal <math>\sigma_z</math></b>	<b>Esfuerzo radial <math>\sigma_r</math></b>	<b>Esfuerzo tangencial <math>\sigma_t</math></b>	<b><math>\theta</math></b>	<b>Módulo Elástico E (psi)</b>	<b>% variación</b>
Carpeta Asfáltica	435113						
Base Hidráulica	31133.28685	1.74E-01	-2.35E-02	-2.35E-02	4.1738365	32484.71744	4.341
Subrasante	16133.94796	3.38E-02	-7.46E-03	-7.46E-03	7.8267706	17447.22574	8.14
Terracerías	7702.522507	2.02E-02	-1.22E-02	-1.22E-02	2.970702	7940.494257	3.09
<b>Iteración 3</b>	<b>Módulo (psi)</b>	<b>Esfuerzo normal <math>\sigma_z</math></b>	<b>Esfuerzo radial <math>\sigma_r</math></b>	<b>Esfuerzo tangencial <math>\sigma_t</math></b>	<b><math>\theta</math></b>	<b>Módulo Elástico E (psi)</b>	<b>% variación</b>
Carpeta Asfáltica	435113						
Base Hidráulica	32484.71744	1.79E-01	-2.22E-02	-2.22E-02	4.1808745	33897.18852	4.348
Subrasante	17447.22574	3.23E-02	-7.76E-03	-7.76E-03	7.8246944	18867.02552	8.138
Terracerías	7940.494257	1.97E-02	-1.29E-02	-1.29E-02	2.968735	8185.655778	3.087
<b>Iteración 4</b>	<b>Módulo (psi)</b>	<b>Esfuerzo normal <math>\sigma_z</math></b>	<b>Esfuerzo radial <math>\sigma_r</math></b>	<b>Esfuerzo tangencial <math>\sigma_t</math></b>	<b><math>\theta</math></b>	<b>Módulo Elástico E (psi)</b>	<b>% variación</b>
Carpeta Asfáltica	435113						
Base Hidráulica	33897.18852	1.83E-01	-2.08E-02	-2.08E-02	4.1876245	35373.45497	4.355
Subrasante	18867.02552	3.15E-02	-8.27E-03	-8.27E-03	7.8228566	20402.00349	8.136
Terracerías	8185.655778	1.91E-02	-1.36E-02	-1.36E-02	2.966837	8438.225045	3.086

<b>Iteración 5</b>	<b>Módulo (psi)</b>	<b>Esfuerzo normal <math>\sigma_z</math></b>	<b>Esfuerzo radial <math>\sigma_r</math></b>	<b>Esfuerzo tangencial <math>\sigma_t</math></b>	<b><math>\theta</math></b>	<b>Módulo Elástico E (psi)</b>	<b>% variación</b>
Carpeta Asfáltica	435113						
Base Hidráulica	35373.45497	1.87E-01	-1.95E-02	-1.95E-02	4.1949105	36916.69513	4.363
Subrasante	20402.00349	3.07E-02	-8.77E-03	-8.77E-03	7.8210446	22061.47927	8.134
Terracerías	8438.225045	1.82E-02	-1.37E-02	-1.37E-02	2.965657	8698.48381	3.084
<b>Iteración 6</b>	<b>Módulo (psi)</b>	<b>Esfuerzo normal <math>\sigma_z</math></b>	<b>Esfuerzo radial <math>\sigma_r</math></b>	<b>Esfuerzo tangencial <math>\sigma_t</math></b>	<b><math>\theta</math></b>	<b>Módulo Elástico E (psi)</b>	<b>% variación</b>
Carpeta Asfáltica	435113						
Base Hidráulica	36916.69513	1.91E-01	-1.80E-02	-1.80E-02	4.2019005	38529.94604	4.37
Subrasante	22061.47927	2.98E-02	-9.24E-03	-9.24E-03	7.8192678	23855.52726	8.132
Terracerías	8698.48381	1.76E-02	-1.42E-02	-1.42E-02	2.963985	8966.618435	3.083
<b>Iteración 7</b>	<b>Módulo (psi)</b>	<b>Esfuerzo normal <math>\sigma_z</math></b>	<b>Esfuerzo radial <math>\sigma_r</math></b>	<b>Esfuerzo tangencial <math>\sigma_t</math></b>	<b><math>\theta</math></b>	<b>Módulo Elástico E (psi)</b>	<b>% variación</b>
Carpeta Asfáltica	435113						
Base Hidráulica	38529.94604	1.96E-01	-1.66E-02	-1.66E-02	4.2094445	40216.71861	4.378
Subrasante	23855.52726	2.90E-02	-9.68E-03	-9.68E-03	7.8175344	25795.03787	8.13
Terracerías	8966.618435	1.67E-02	-1.42E-02	-1.42E-02	2.963165	9242.941962	3.082
<b>Iteración 8</b>	<b>Módulo (psi)</b>	<b>Esfuerzo normal <math>\sigma_z</math></b>	<b>Esfuerzo radial <math>\sigma_r</math></b>	<b>Esfuerzo tangencial <math>\sigma_t</math></b>	<b><math>\theta</math></b>	<b>Módulo Elástico E (psi)</b>	<b>% variación</b>
Carpeta Asfáltica	435113						
Base Hidráulica	40216.71861	2.01E-01	-1.52E-02	-1.52E-02	4.2170785	41980.52802	4.386
Subrasante	25795.03787	2.74E-02	-9.76E-03	-9.76E-03	7.8157818	27891.7651	8.128
Terracerías	9242.941962	1.61E-02	-1.46E-02	-1.46E-02	2.961735	9527.643467	3.08

<b>Iteración 9</b>	<b>Módulo (psi)</b>	<b>Esfuerzo normal <math>\sigma_z</math></b>	<b>Esfuerzo radial <math>\sigma_r</math></b>	<b>Esfuerzo tangencial <math>\sigma_t</math></b>	<b><math>\theta</math></b>	<b>Módulo Elástico E (psi)</b>	<b>% variación</b>
Carpeta Asfáltica	435113						
Base Hidráulica	41980.52802	2.05E-01	-1.36E-02	-1.36E-02	4.2244185	43824.89854	4.393
Subrasante	27891.7651	2.65E-02	-1.01E-02	-1.01E-02	7.814185	30158.45979	8.127
Terracerías	9527.643467	1.56E-02	-1.50E-02	-1.50E-02	2.960397	9820.981782	3.079
<b>Iteración 10</b>	<b>Módulo (psi)</b>	<b>Esfuerzo normal <math>\sigma_z</math></b>	<b>Esfuerzo radial <math>\sigma_r</math></b>	<b>Esfuerzo tangencial <math>\sigma_t</math></b>	<b><math>\theta</math></b>	<b>Módulo Elástico E (psi)</b>	<b>% variación</b>
Carpeta Asfáltica	435113						
Base Hidráulica	43824.89854	2.05E-01	-1.36E-02	-1.36E-02	4.2244185	45750.29955	4.393
Subrasante	30158.45979	2.65E-02	-1.01E-02	-1.01E-02	7.814185	32609.36315	8.127
Terracerías	9820.981782	1.56E-02	-1.50E-02	-1.50E-02	2.960397	10123.35143	3.079
<b>Iteración 11</b>	<b>Módulo (psi)</b>	<b>Esfuerzo normal <math>\sigma_z</math></b>	<b>Esfuerzo radial <math>\sigma_r</math></b>	<b>Esfuerzo tangencial <math>\sigma_t</math></b>	<b><math>\theta</math></b>	<b>Módulo Elástico E (psi)</b>	<b>% variación</b>
Carpeta Asfáltica	435113						
Base Hidráulica	45750.29955	2.14E-01	-1.05E-02	-1.05E-02	4.2398185	47767.6184	4.409
Subrasante	32609.36315	2.41E-02	-1.04E-02	-1.04E-02	7.811234	35258.44456	8.124
Terracerías	10123.35143	1.38E-02	-1.43E-02	-1.43E-02	2.959992	10434.98784	3.078
<b>Iteración 12</b>	<b>Módulo (psi)</b>	<b>Esfuerzo normal <math>\sigma_z</math></b>	<b>Esfuerzo radial <math>\sigma_r</math></b>	<b>Esfuerzo tangencial <math>\sigma_t</math></b>	<b><math>\theta</math></b>	<b>Módulo Elástico E (psi)</b>	<b>% variación</b>
Carpeta Asfáltica	435113						
Base Hidráulica	47767.6184	2.19E-01	-8.94E-03	-8.94E-03	4.2478643	49877.88615	4.418
Subrasante	35258.44456	2.25E-02	-1.02E-02	-1.02E-02	7.809984	38122.27059	8.122
Terracerías	10434.98784	1.33E-02	-1.46E-02	-1.46E-02	2.959057	10756.11617	3.077

<b>Iteración 13</b>	<b>Módulo (psi)</b>	<b>Esfuerzo normal <math>\sigma_z</math></b>	<b>Esfuerzo radial <math>\sigma_r</math></b>	<b>Esfuerzo tangencial <math>\sigma_t</math></b>	<b><math>\theta</math></b>	<b>Módulo Elástico E (psi)</b>	<b>% variación</b>
Carpeta Asfáltica	435113						
Base Hidráulica	49877.88615	2.23E-01	-7.20E-03	-7.20E-03	4.2555851	52085.38588	4.426
Subrasante	38122.27059	2.17E-02	-1.04E-02	-1.04E-02	7.808751	41218.2187	8.121
Terracerías	10756.11617	1.24E-02	-1.40E-02	-1.40E-02	2.959306	11087.15482	3.078
<b>Iteración 14 (final)</b>	<b>Módulo (psi)</b>	<b>Esfuerzo normal <math>\sigma_z</math></b>	<b>Esfuerzo radial <math>\sigma_r</math></b>	<b>Esfuerzo tangencial <math>\sigma_t</math></b>	<b><math>\theta</math></b>	<b>Módulo Elástico E (psi)</b>	<b>% variación</b>
<b>Carpeta Asfáltica</b>	435113						
<b>Base Hidráulica</b>	52085.38588	2.23E-01	-7.20E-03	-7.20E-03	4.2555851	54390.58532	4.426
<b>Subrasante</b>	41218.2187	2.17E-02	-1.04E-02	-1.04E-02	7.808751	44565.59189	8.121
<b>Terracerías</b>	11087.15482	1.24E-02	-1.40E-02	-1.40E-02	2.959306	11428.38177	3.078



## 16 Consideraciones para controlar las respuestas mecánicas en pavimentos flexibles

---

Las respuestas que ocurren en una estructura de pavimento se pueden estimar fácilmente mediante el uso de programas de computadora que consideran la teoría elástica multicapa y que se han descrito anteriormente. Con estos programas de cómputo, un diseñador de pavimentos puede evaluar rápidamente varias alternativas de diseño y determinar las respuestas del pavimento resultantes. Estos resultados se pueden comparar con las relaciones establecidas entre las respuestas del pavimento y el desempeño del pavimento y se determina el desempeño futuro de una sección de diseño específico.

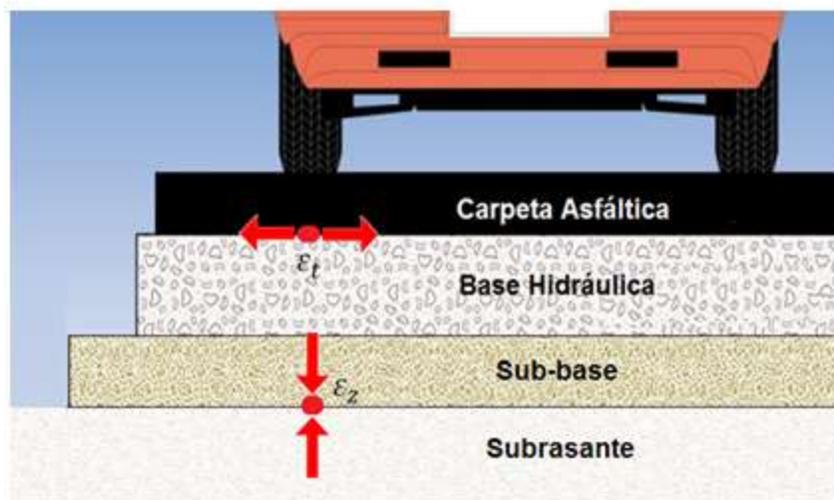
A continuación, se discuten algunos puntos sobre el control de las respuestas críticas del pavimento.

Cada repetición de carga causa algún daño estructural y acerca al pavimento a la falla. Cuanto más cerca esté el nivel de esfuerzo aplicado al nivel de esfuerzo máximo permisible, mayor será la cantidad de daño causado por cada repetición de carga. Por lo tanto, reducir la magnitud del esfuerzo prolongará la vida útil del pavimento flexible.

Suponiendo que la cantidad de daño requerido para producir falla es constante, la cantidad de repeticiones de carga requeridas para producir la falla en un material en particular variará inversamente con el esfuerzo resultante. Por lo tanto, cada aplicación de carga da como resultado una cierta cantidad de daño por fatiga, y se agrega el daño por fatiga de cada aplicación de carga para obtener el daño total por fatiga en el pavimento. Estas relaciones de fatiga generalmente se derivan empíricamente de los datos de desempeño en campo y en laboratorio y varían ampliamente con los materiales.

Los principales objetivos en el diseño de pavimento flexible son:

- Minimizar los esfuerzos verticales críticos y evitar deformaciones permanentes en las capas inferiores del pavimento (especialmente la subrasante). La deformación permanente de estas capas da como resultado el ahuellamiento o rodera del pavimento. Ver Figura 16.1.
- Minimizar los esfuerzos de tensión críticos en las capas superiores, que causan fatiga o agrietamiento reflectivo de la superficie o agrietamiento por fatiga de capas estabilizadas con asfalto. Ver Figura 16.1.



**Figura 16.1 Control de deformaciones críticas en pavimentos flexibles.**

Cada capa debe diseñarse de modo que cada una de las capas de soporte no se sobre-exija. El espesor total del pavimento construido sobre la subrasante debe de diseñarse para restringir las presiones de expansión del suelo y para proporcionar una protección adecuada contra las heladas (en caso de que existan).

Además de proporcionar una protección adecuada para la subrasante, la sub-base y base hidráulica, existe el problema de diseño de proporcionar una superficie de rodamiento adecuada. El material utilizado para esta capa debe ser un material altamente duradero que pueda resistir los esfuerzos elevados de corte y compresión causadas por las cargas pesadas de los neumáticos, a la vez que proporcione una resistencia adecuada a la abrasión. El espesor del diseño de esta capa está en función del volumen de tránsito y configuración vehicular. Para mayores volúmenes de tránsito y vehículos más pesados se requerirá un espesor mayor.

En general, la carga total aplicada o resistida por cualquier capa del pavimento está relacionada con la rigidez de dicha capa. Es decir, un aumento en el módulo elástico de una capa del pavimento se acompaña de un aumento en la rigidez de esa capa; sin embargo, también forzará a la capa a asumir un mayor esfuerzo. Si el incremento de rigidez no va acompañada de un incremento en el espesor de la capa, el aumento de esfuerzos de tensión puede no compensarse con el aumento de la rigidez, particularmente en los pavimentos más delgados. Por lo tanto, el espesor es mucho más importante para la forma en que se desempeña esa capa que su módulo.

El medio más eficiente para reducir los esfuerzos y deformaciones a tensión en las capas superiores de un pavimento (capas asfálticas) es aumentar su espesor. Cuando la superficie es muy delgada o tiene una base estabilizada muy rígida

directamente debajo de ella, la parte superficial puede estar realmente en compresión radial directamente debajo de la carga. Estas tensiones y esfuerzos radiales de compresión son la razón por la cual las capas asfálticas muy delgadas funcionan bien en ciertas condiciones climáticas. La transición de la tensión de compresión a la tensión depende de las configuraciones de carga de la rueda y las propiedades de la capa de apoyo.

También se pueden usar varias alternativas para reducir los esfuerzos verticales transmitidos a la subrasante. Para empezar, los esfuerzos en la subrasante disminuyen rápidamente con la profundidad. La forma más eficiente de reducir los esfuerzos de compresión de la subrasante es aumentar el espesor de la estructura del pavimento, generalmente en la sub-base o la capa que proporciona la mayor rigidez al menor costo. El aumento del espesor de la carpeta asfáltica puede tener algún beneficio, aunque esto no suele ser tan eficiente ni rentable, a menos que la estructura del pavimento sea relativamente delgada y la capa de la superficie sea muy rígida.

La deformación permanente de las capas granulares es el resultado de esfuerzos verticales repetidos en la base hidráulica. Esta deformación permanente causa ahuellamiento y diversas formas de agrietamiento en la carpeta asfáltica. El medio más efectivo para reducir el esfuerzo vertical en la capa de base hidráulica es aumentar el espesor de la carpeta asfáltica.

La deformación permanente de la capa de subrasante es el resultado de esfuerzos y deformaciones verticales repetidos en la parte superior de la subrasante. Esta deformación permanente en la subrasante causa ahuellamientos de las capas superiores que dan lugar a la formación de “surcos” y a diversas formas de agrietamiento en la carpeta asfáltica. El método más efectivo para reducir los esfuerzos y deformaciones verticales en la subrasante es aumentar la rigidez (espesor y módulo) de las capas de pavimento.

La respuesta más crítica se encuentra en la parte inferior de la carpeta asfáltica. Con una carga de tráfico repetida, el esfuerzo radial y la deformación por tensión en la parte inferior de la carpeta asfáltica daña progresivamente a la misma, dando como resultado finalmente una formación de grietas en la parte inferior de la capa. El agrietamiento da como resultado una rápida propagación de la grieta a la superficie del pavimento. Este agrietamiento permite que la humedad de la superficie se infiltre en la estructura del pavimento y reblandezca las capas inferiores, lo que da como resultado un mayor deterioro del pavimento. El método más común para reducir el esfuerzo radial y a la tensión en la parte inferior de la carpeta asfáltica es aumentar el espesor de esa capa y el módulo de la capa de apoyo (base hidráulica o base asfáltica).

## **17 Análisis de sensibilidad en estructuras de pavimentos flexibles**

---

Los análisis de sensibilidad son muy útiles en la ingeniería de pavimentos. Debido a que existen muchas variables que influyen en el comportamiento de un pavimento, es necesario conocer cual o cuales son aquellas variables que tienen un efecto marcado sobre el estado de esfuerzos, deformaciones y deflexiones en los pavimentos. Para llevar a cabo este análisis, se necesitan fijar o mantener constantes todas las variables que intervienen en la estructura del pavimento y variar solo aquella que se desea saber su efecto estructural.

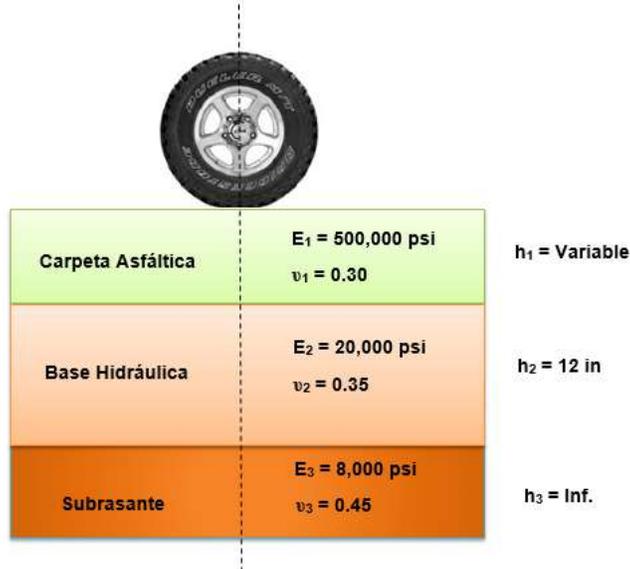
A continuación se explicará el análisis de sensibilidad para una estructura de pavimento en particular. Para ello se está considerando análisis de tipo lineal con utilización del programa WESLEA. Con ello se encontrarán las repuestas del pavimento en puntos críticos del mismo. Dichos puntos críticos corresponden a la deformación a tensión debajo de la carpeta asfáltica y la deformación a compresión arriba de la subrasante. Estas dos repuestas corresponden a los dos criterios de diseño de pavimentos flexibles ampliamente utilizados en el mundo que son la fatiga y la deformación permanente.

### **17.1 Análisis de sensibilidad 1**

La Figura 17.1 muestra un pavimento tricapa convencional compuesto de una carpeta asfáltica, una base hidráulica y una capa de subrasante. Para este análisis se considerará hacer la siguiente variación de datos dejando constantes los demás elementos del pavimento:

- a) Variación de la carpeta asfáltica desde 2 in hasta 10 in (para complementar la curva de desempeño, se hace la variación con un espesor poco común de 1 in)
- b) Variación de la base hidráulica desde 5 in hasta 15 in.
- c) Variación del módulo elástico de la carpeta asfáltica desde 700,000 psi a 1,500,000 psi
- d) Variación del módulo elástico de la base hidráulica desde 15,000 psi a 50,000 psi.
- e) Variación del módulo elástico de la subrasante desde 5,000 a 9,000 psi

- f) Variación de la relación de Poisson para las tres capas (carpeta asfáltica, base hidráulica y subrasante) de 0.15 a 0.50
- g) Variación de la presión de inflado (presión de contacto del neumático) desde 25 psi hasta 125 psi.



**Figura 17.1 Estructura de pavimento flexible para análisis de sensibilidad. Variación del espesor de capa 1 (carpeta asfáltica).**

Para esta figura y tal como se ha comentado, se variará el espesor de la carpeta asfáltica. La Figura 17.2 muestra la variación de la deformación a tensión debajo de la capa asfáltica (asociada a la fatiga o agrietamiento piel de cocodrilo). A partir de 2 in de espesor en la carpeta se observa que esta respuesta mecánica disminuye notoriamente, dando como resultado menor daño acumulativo y mayor vida remanente por fatiga en el pavimento.

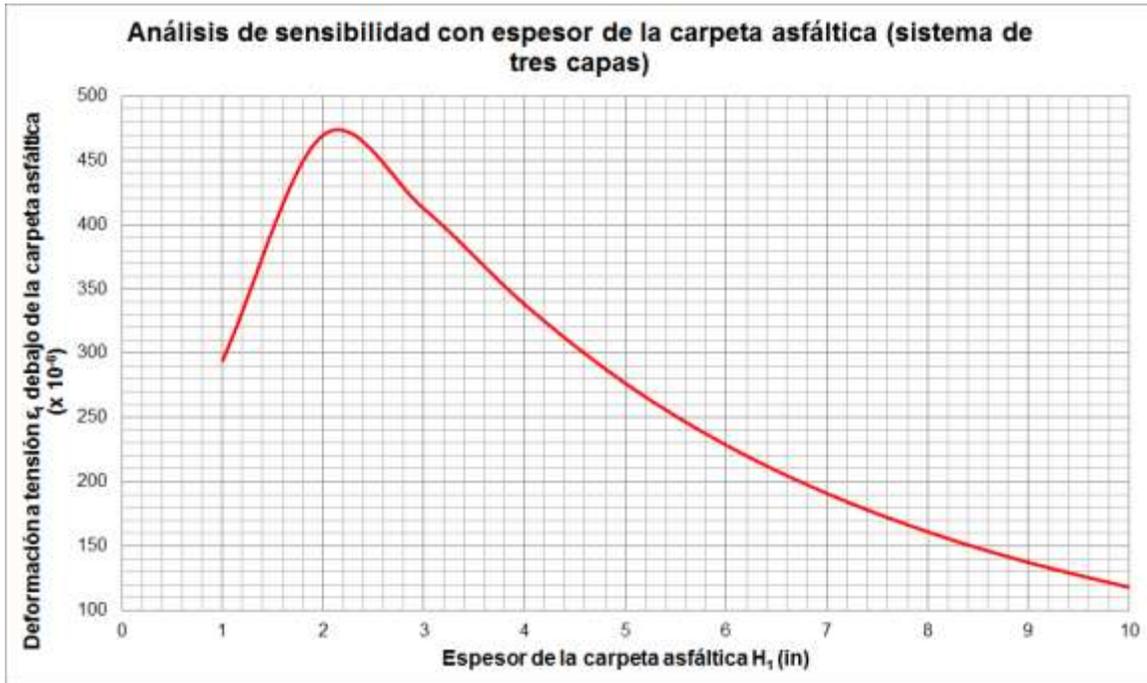
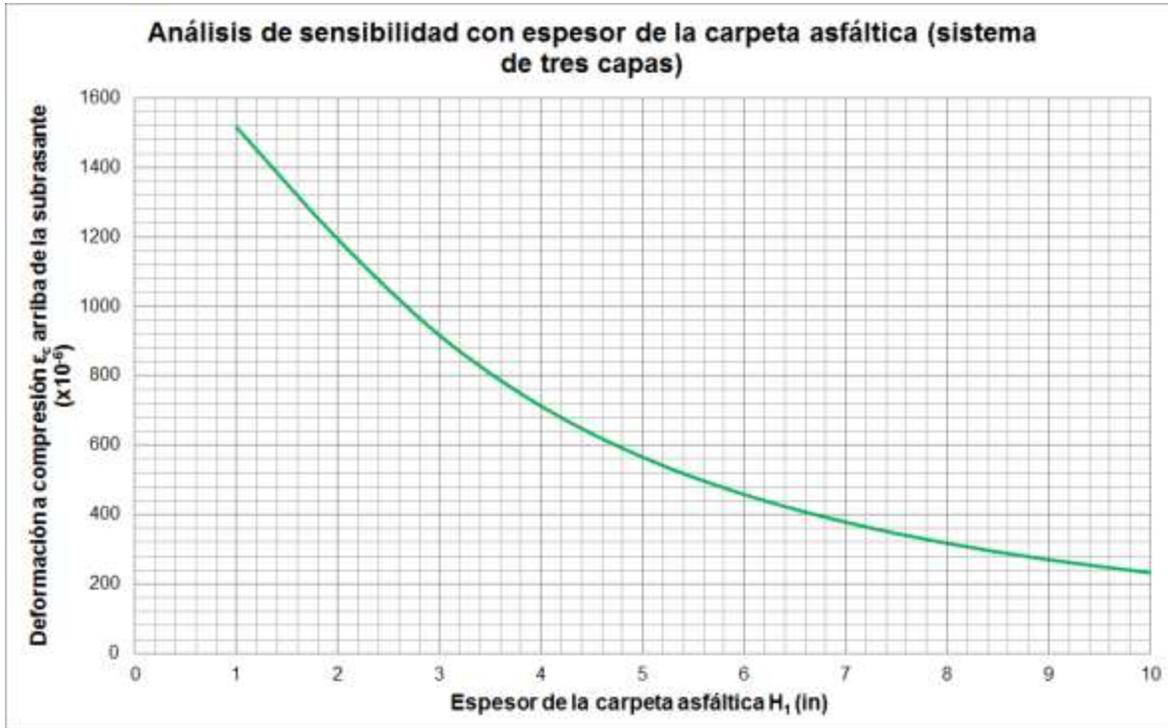


Figura 17.2 Análisis de sensibilidad por fatiga para sistema tricapa variando espesor de la carpeta asfáltica.

En la Figura 17.3 se muestra la variación de la deformación a compresión arriba de la capa subrasante. Puede observarse que esta respuesta mecánica disminuye conforme se aumenta el espesor de la carpeta asfáltica, generando con ello menor daño acumulativo y mayor vida por rodera plástica en el pavimento.



**Figura 17.3 Análisis de sensibilidad por deformación permanente para sistema tricapa variando espesor de la carpeta asfáltica.**

La Figura 17.4 muestra ahora el parámetro de espesor de base hidráulica que se utilizará para el análisis de sensibilidad.

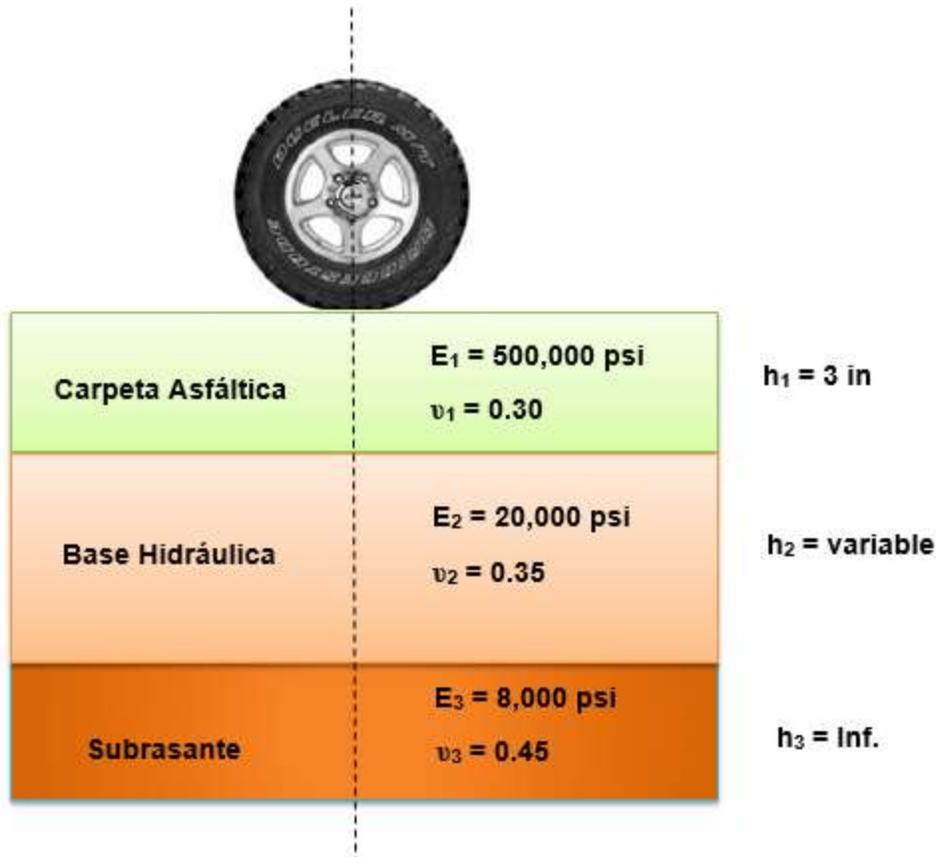
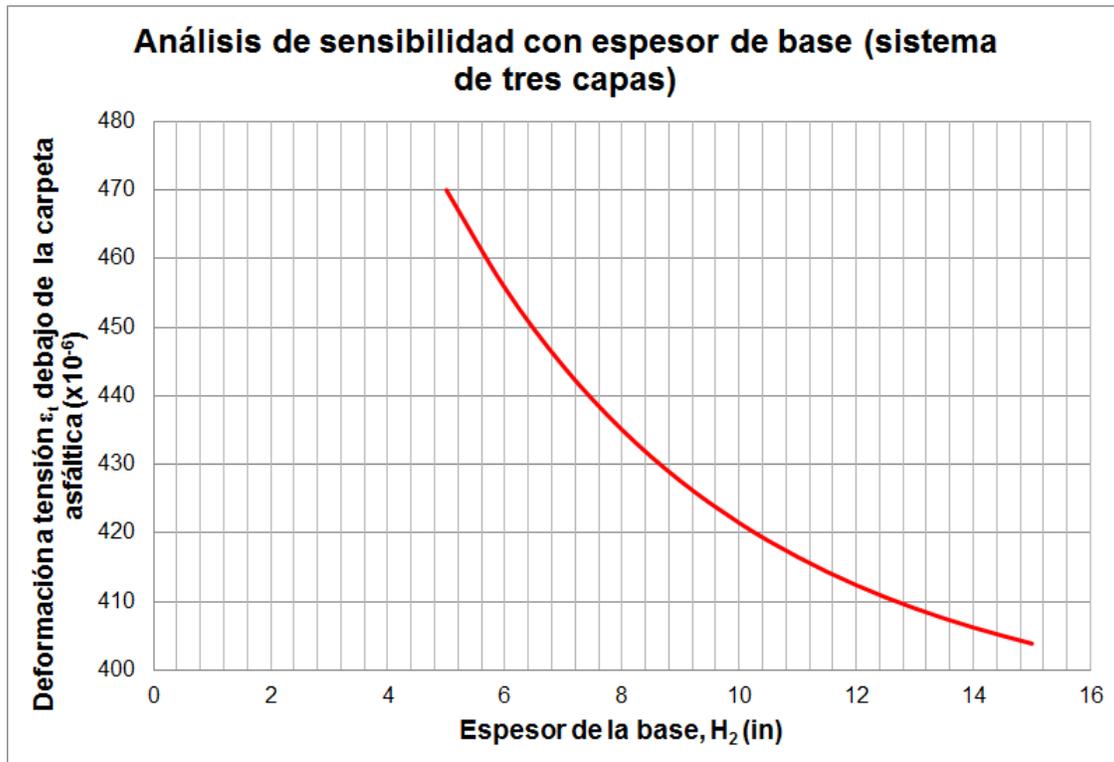


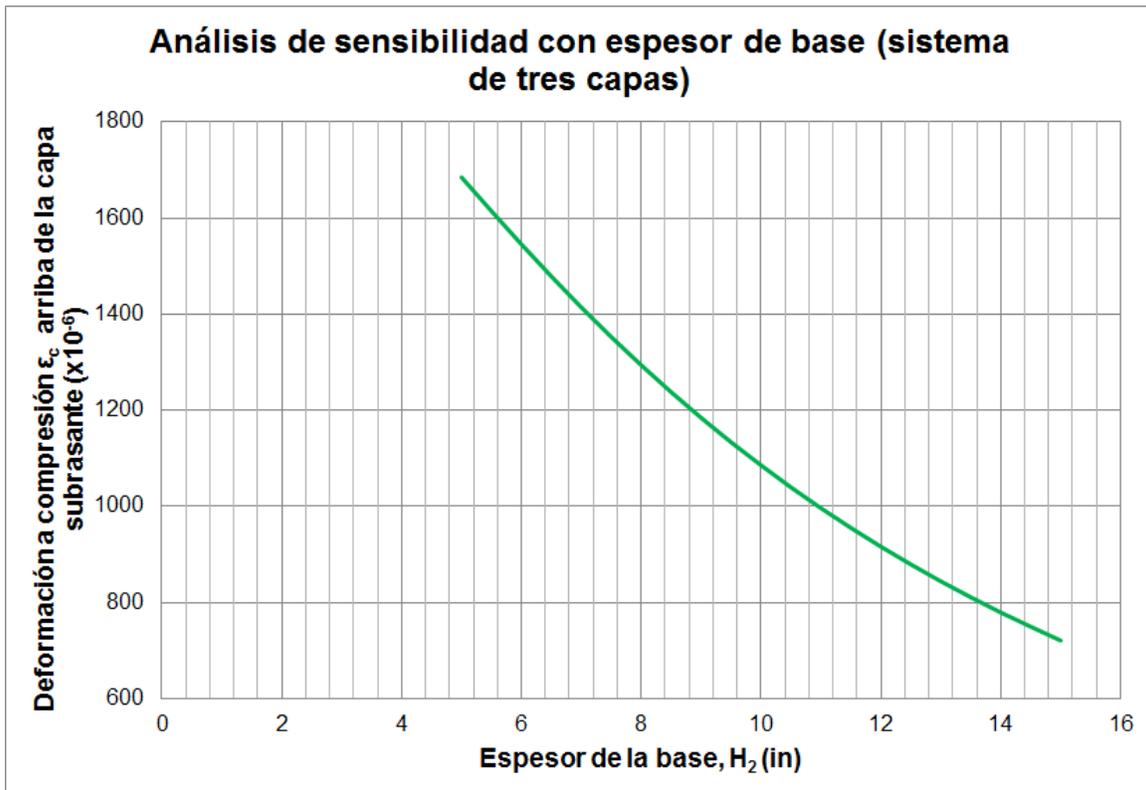
Figura 17.4 Estructura de pavimento flexible para análisis de sensibilidad. Variación del espesor de capa 2 (base hidráulica).

La Figura 17.5 muestra la variación de la deformación a tensión debajo de la capa asfáltica (asociada a la fatiga o agrietamiento piel de cocodrilo). Al aumentar el espesor de la base hidráulica se observa que esta respuesta mecánica disminuye notoriamente, dando como resultado menor daño acumulativo y mayor vida remanente por fatiga en el pavimento.



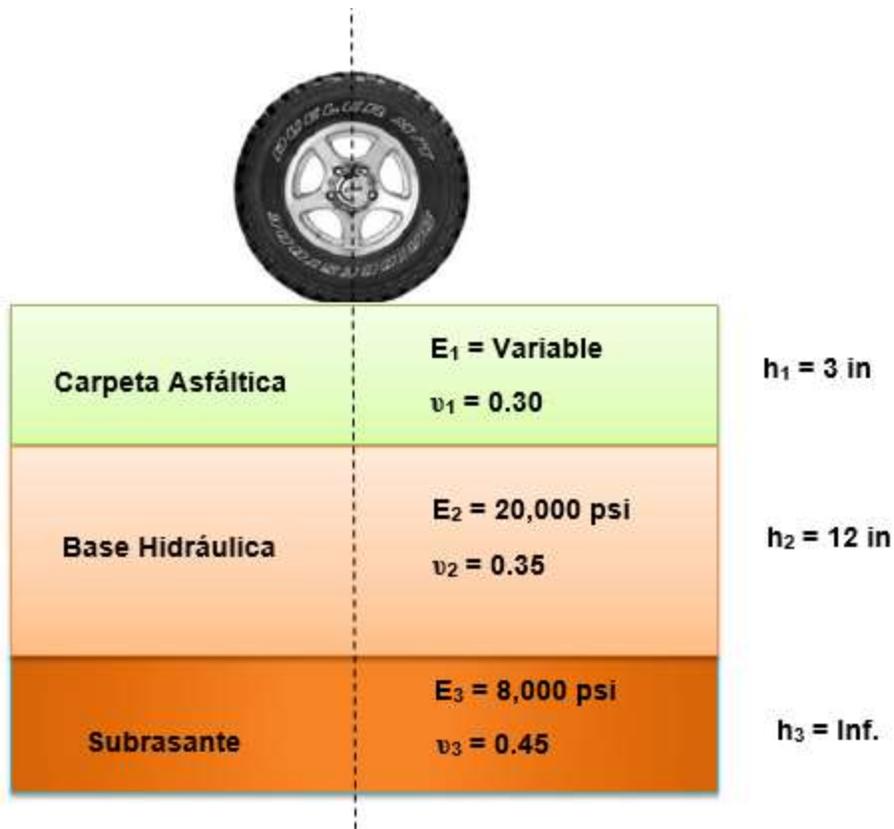
**Figura 17.5 Análisis de sensibilidad por fatiga para sistema tricapa variando espesor de la base hidráulica.**

En la Figura 17.6 se muestra la variación de la deformación a compresión arriba de la capa subrasante. Puede observarse que esta respuesta mecánica disminuye conforme se aumenta el espesor de la base hidráulica, generando con ello menor daño acumulativo y mayor vida por rodera plástica en el pavimento.



**Figura 17.6 Análisis de sensibilidad por deformación permanente para sistema tricapa variando espesor de la base hidráulica.**

La Figura 17.7 muestra ahora el parámetro de módulo elástico de la carpeta asfáltica que se utilizará para el análisis de sensibilidad.



**Figura 17.7 Estructura de pavimento flexible para análisis de sensibilidad. Variación del módulo elástico de la capa 1 (carpeta asfáltica).**

La Figura 17.8 muestra la variación de la deformación a tensión debajo de la capa asfáltica (asociada a la fatiga o agrietamiento piel de cocodrilo). Al aumentar el módulo elástico de la carpeta asfáltica se observa que esta respuesta mecánica disminuye notoriamente, dando como resultado menor daño acumulativo y mayor vida remanente por fatiga en el pavimento.

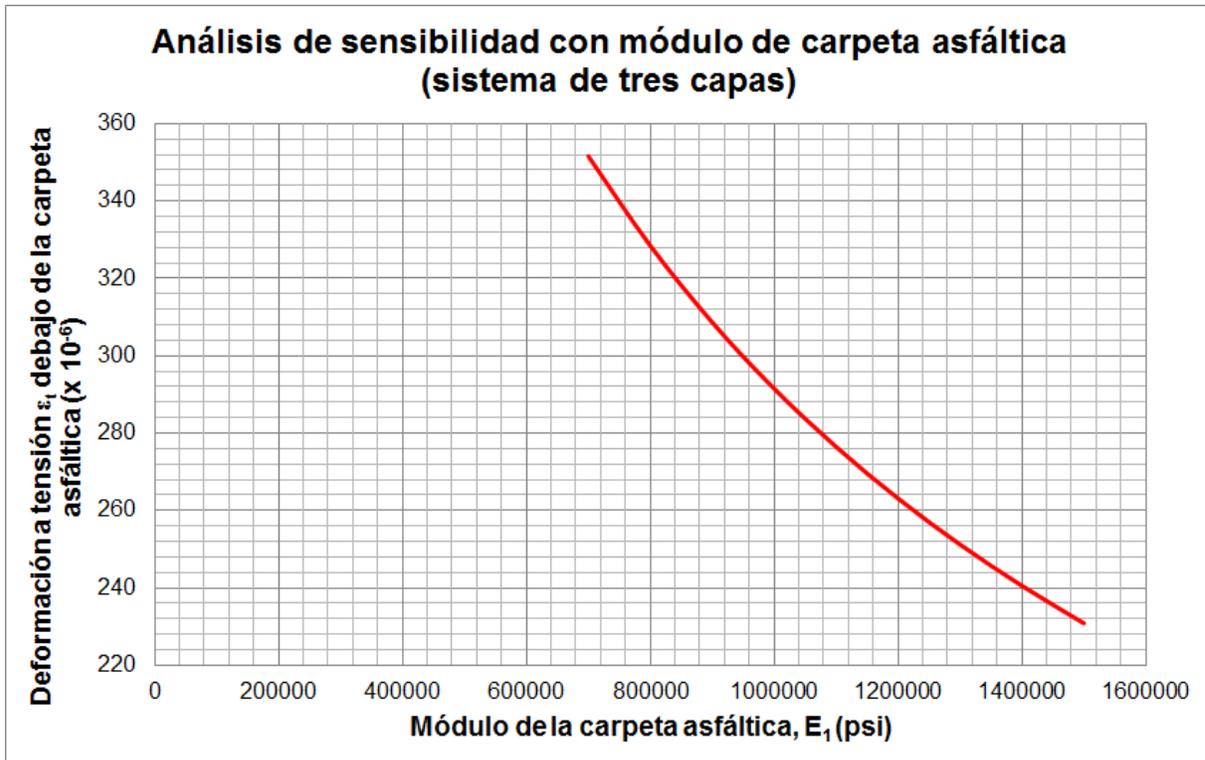
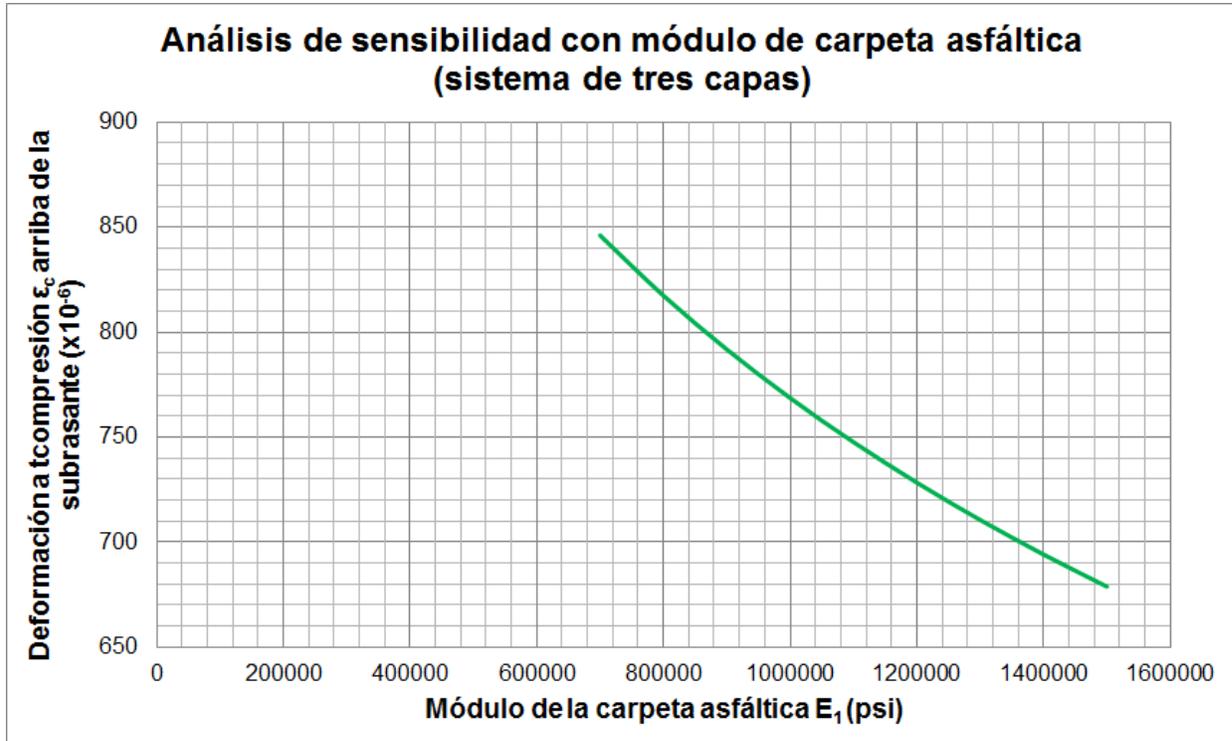


Figura 17.8 Análisis de sensibilidad por fatiga para sistema tricapa variando módulo elástico de la carpeta asfáltica.

En la Figura 17.9 se muestra la variación de la deformación a compresión arriba de la capa subrasante. Puede observarse que esta respuesta mecánica disminuye conforme se aumenta el módulo elástico de la carpeta asfáltica, generando con ello menor daño acumulativo y mayor vida por rodera plástica en el pavimento.



**Figura 17.9 Análisis de sensibilidad por deformación permanente para sistema tricapa variando módulo elástico de la carpeta asfáltica.**

La Figura 17.10 muestra ahora el parámetro de módulo elástico de la base hidráulica que se utilizará para el análisis de sensibilidad.

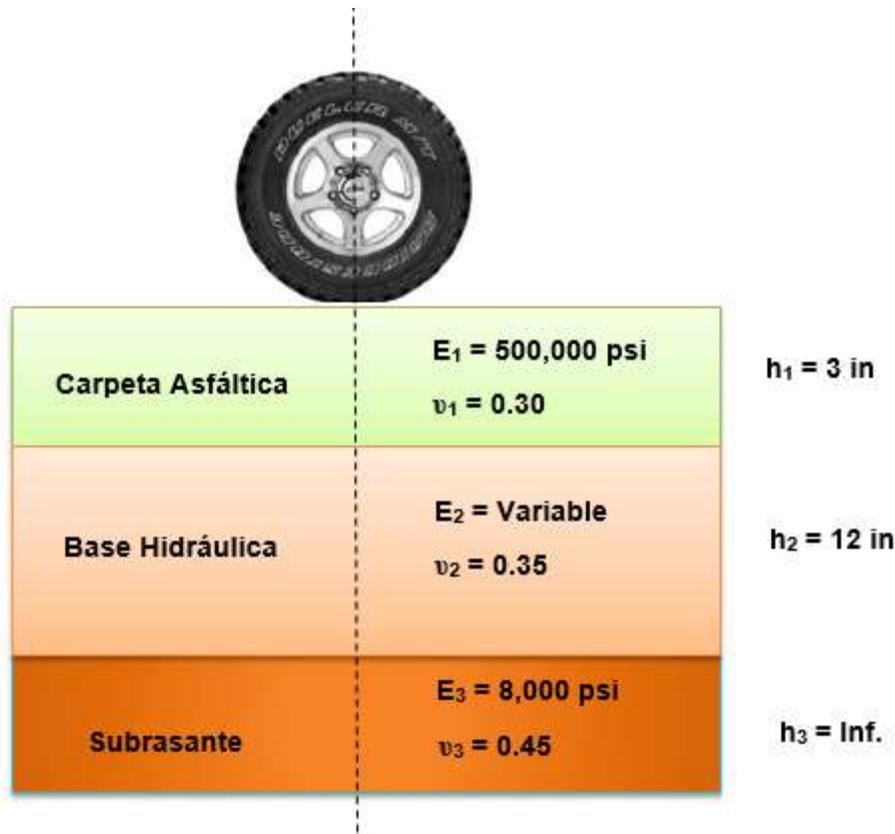
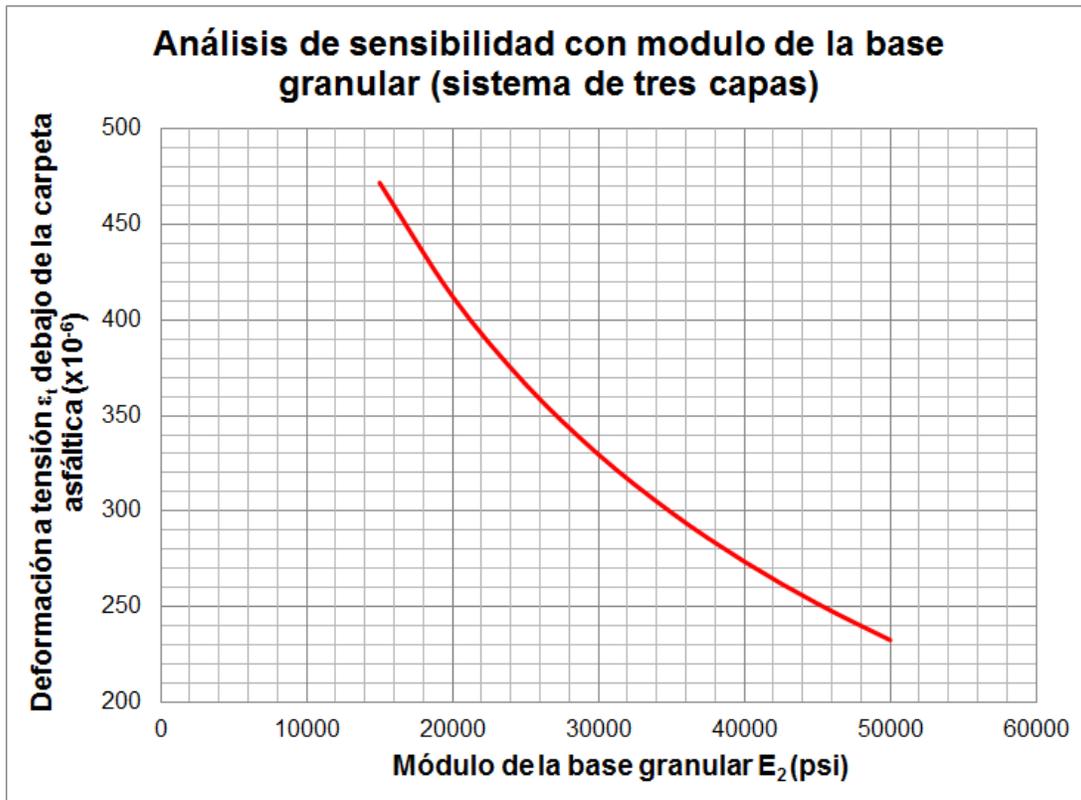


Figura 17.10 Estructura de pavimento flexible para análisis de sensibilidad. Variación del módulo elástico de la capa 2 (base hidráulica).

La Figura 17.11 muestra la variación de la deformación a tensión debajo de la capa asfáltica (asociada a la fatiga o agrietamiento piel de cocodrilo). Al aumentar el módulo elástico de la base hidráulica se observa que esta respuesta mecánica disminuye notoriamente, dando como resultado menor daño acumulativo y mayor vida remanente por fatiga en el pavimento.



**Figura 17.11 Análisis de sensibilidad por fatiga para sistema tricapa variando módulo elástico de la base hidráulica.**

En la Figura 17.12 se muestra la variación de la deformación a compresión arriba de la capa subrasante. Puede observarse que esta respuesta mecánica disminuye conforme se aumenta el módulo elástico de la base hidráulica, generando con ello menor daño acumulativo y mayor vida por rodera plástica en el pavimento.

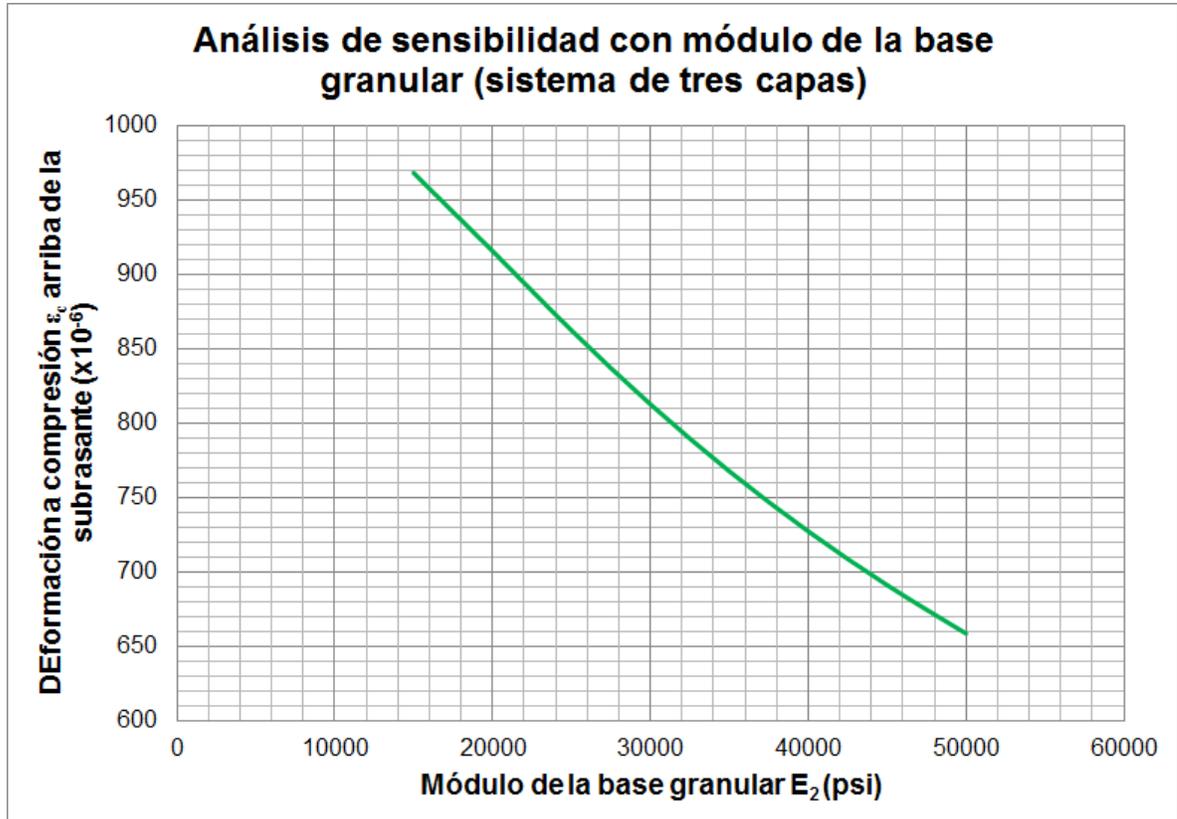
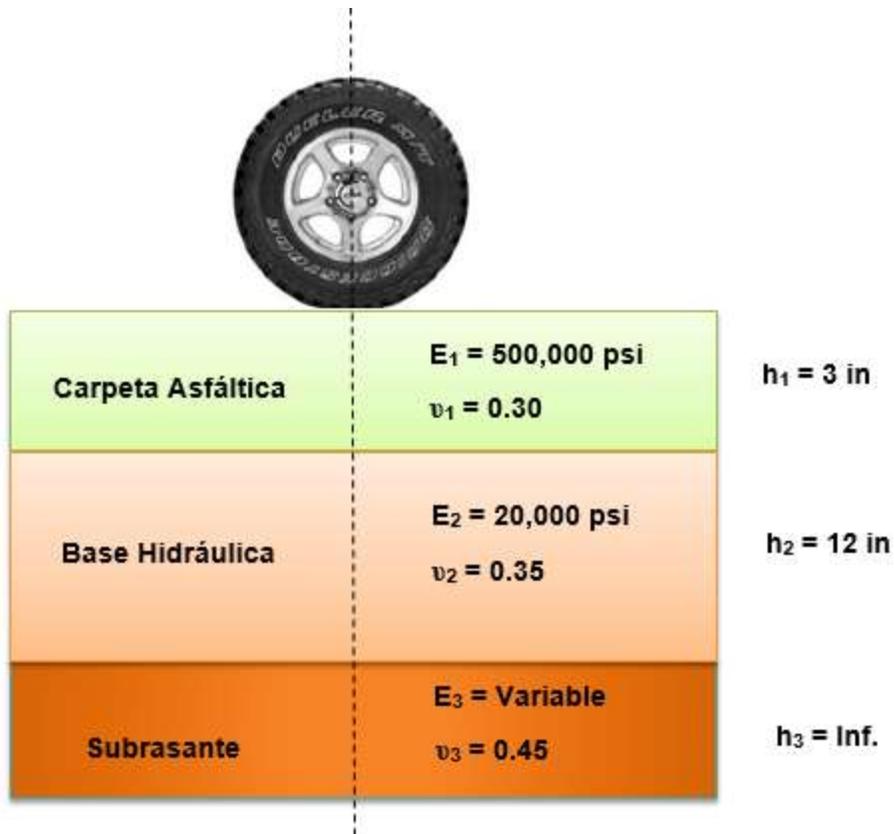


Figura 17.12 Análisis de sensibilidad por deformación permanente para sistema tricapa variando módulo elástico de la base hidráulica.

La Figura 17.13 muestra ahora el parámetro de módulo elástico de la subrasante que se utilizará para el análisis de sensibilidad.



**Figura 17.13 Estructura de pavimento flexible para análisis de sensibilidad. Variación del módulo elástico de la capa 3 (subrasante).**

La Figura 17.14 muestra la variación de la deformación a tensión debajo de la capa asfáltica (asociada a la fatiga o agrietamiento piel de cocodrilo). Al aumentar el módulo elástico de la base hidráulica se observa que esta respuesta mecánica disminuye notoriamente, dando como resultado menor daño acumulativo y mayor vida remanente por fatiga en el pavimento.

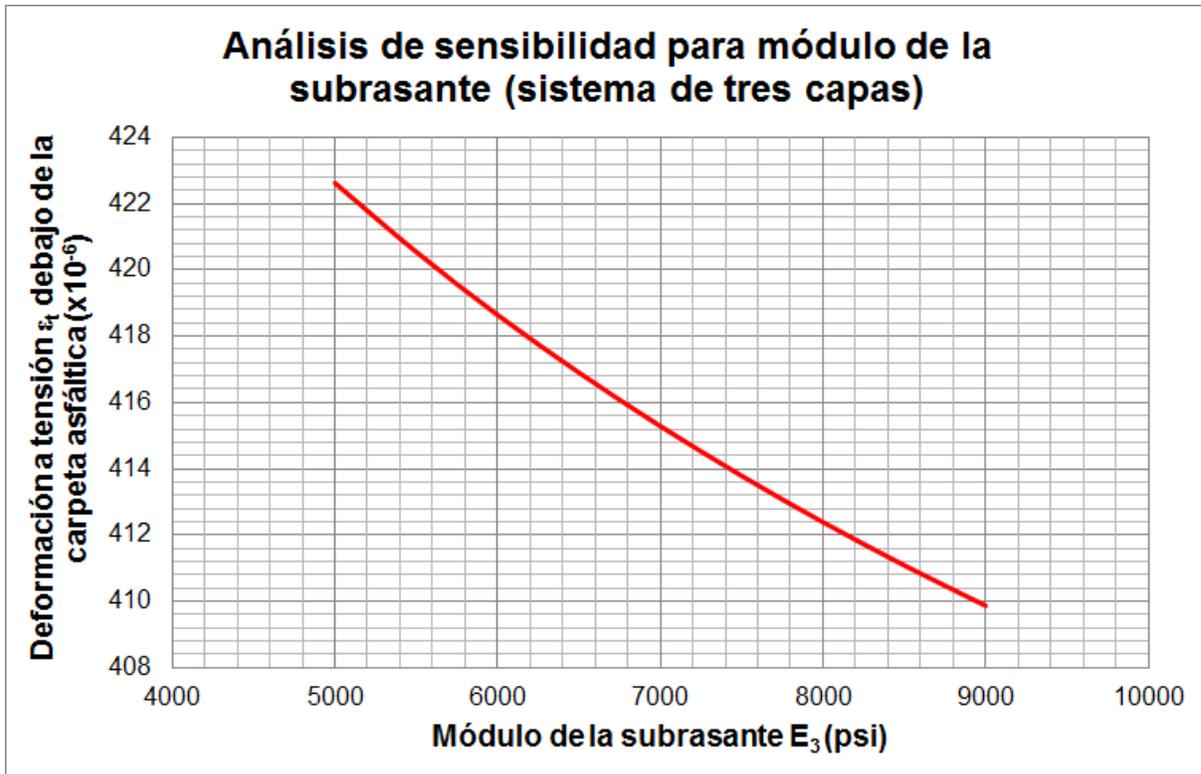
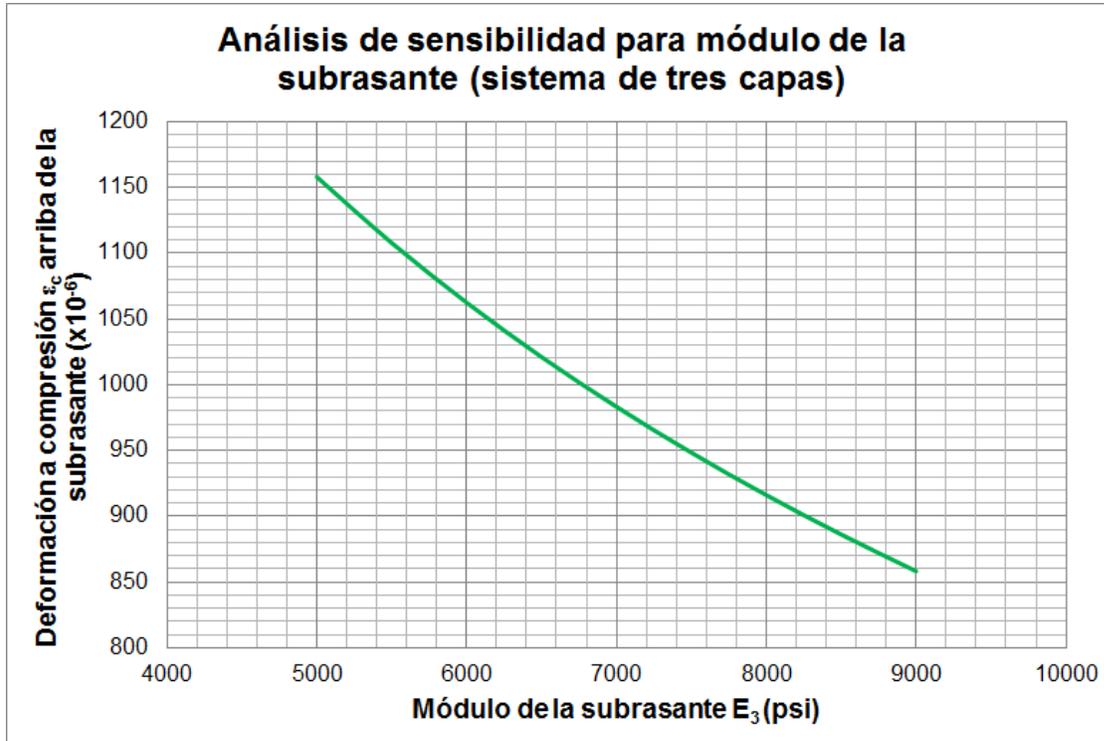


Figura 17.14 Análisis de sensibilidad por fatiga para sistema tricapa variando módulo elástico de la subrasante.

La Figura 17.15 muestra la variación de la deformación a compresión arriba de la capa subrasante. Puede observarse que esta respuesta mecánica disminuye conforme se aumenta el módulo elástico de la base hidráulica, generando con ello menor daño acumulativo y mayor vida por rodera plástica en el pavimento.



**Figura 17.15 Análisis de sensibilidad por deformación permanente para sistema tricapa variando módulo elástico de la subrasante.**

La Figura 17.16 muestra ahora el parámetro de relación de Poisson de la carpeta asfáltica que se utilizará para el análisis de sensibilidad.

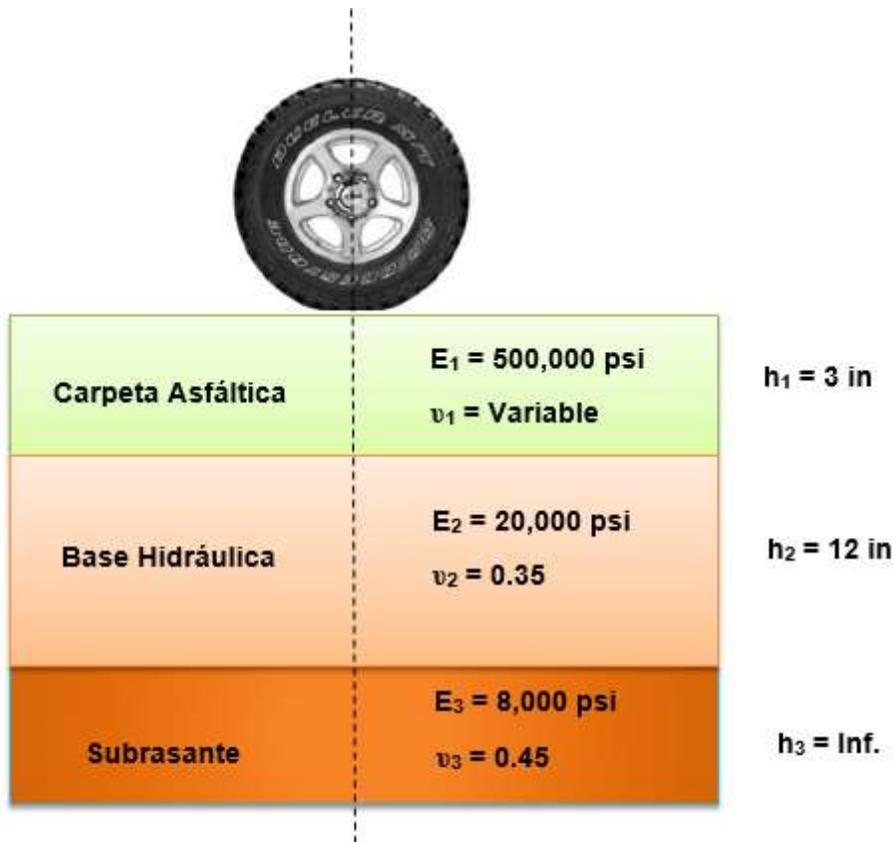
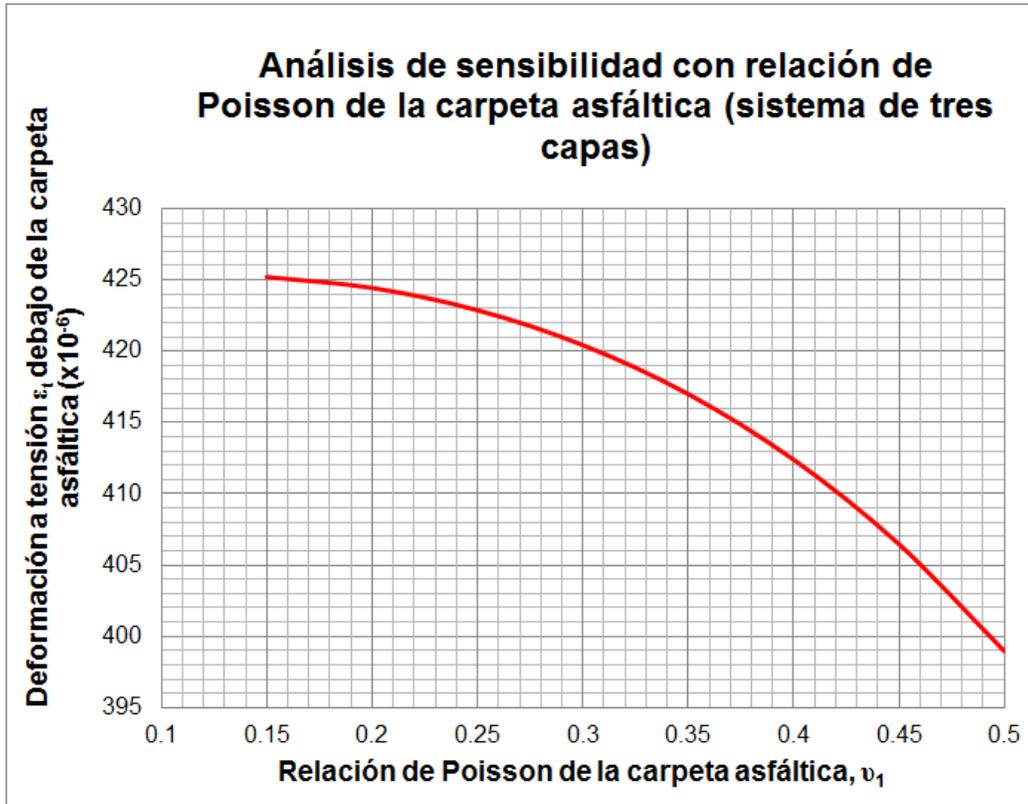


Figura 17.16 Estructura de pavimento flexible para análisis de sensibilidad. Variación de la relación de Poisson de la capa 1 (carpeta asfáltica).

La Figura 17.17 muestra la variación de la deformación a tensión debajo de la capa asfáltica (asociada a la fatiga o agrietamiento piel de cocodrilo). Al aumentar el módulo elástico de la base hidráulica se observa que esta respuesta mecánica disminuye notoriamente, dando como resultado menor daño acumulativo y mayor vida remanente por fatiga en el pavimento.



**Figura 17.17 Análisis de sensibilidad por fatiga para sistema tricapa variando la relación de Poisson de la carpeta asfáltica.**

La Figura 17.18 muestra la variación de la deformación a compresión arriba de la capa subrasante. Puede observarse que esta respuesta mecánica disminuye hasta un valor de relación de Poisson de 0.35, generándose bajo daño acumulativo y vida remanente baja por rodera plástica. Sin embargo cuando el valor toma valores de 0.36 a 0.5, la deformación a compresión aumenta con el consiguiente aumento del daño acumulativo y menor vida remanente por rodera plástica.

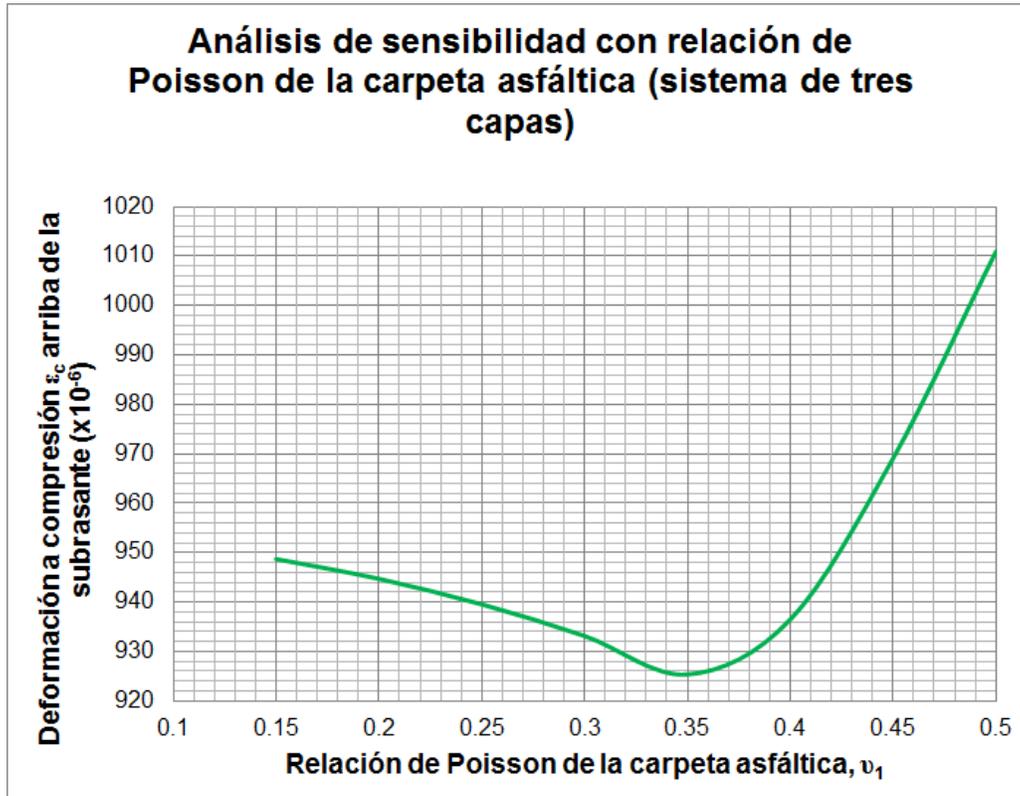


Figura 17.18 Análisis de sensibilidad por deformación permanente para sistema tricapa variando relación de Poisson de la carpeta asfáltica.

La Figura 17.19 muestra ahora el parámetro de relación de Poisson de la base hidráulica que se utilizará para el análisis de sensibilidad.

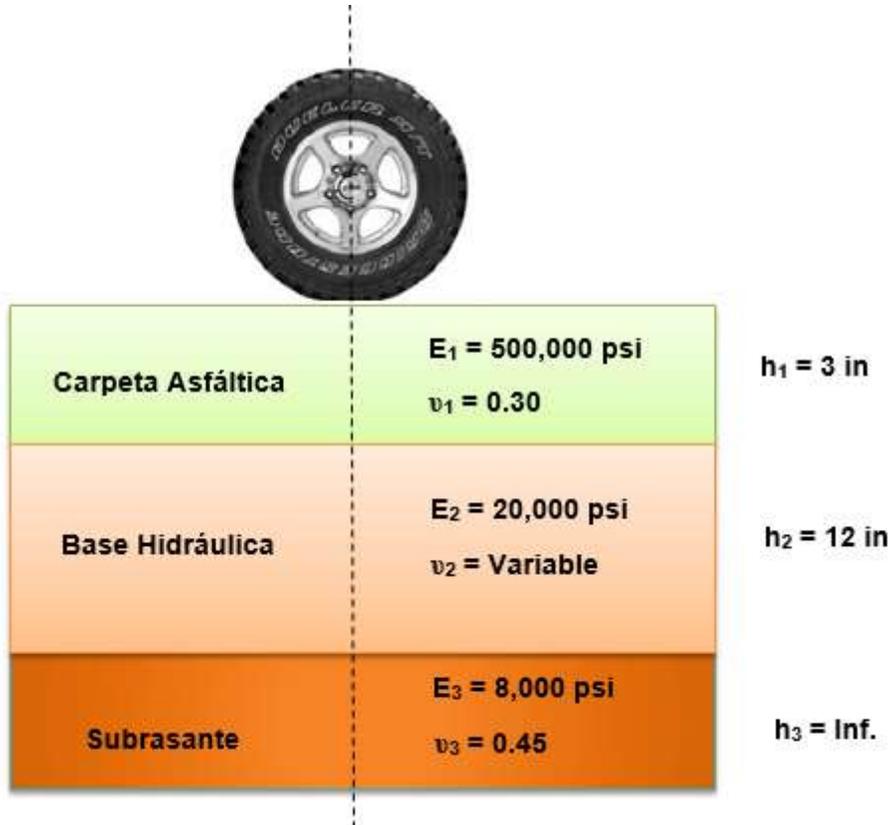


Figura 17.19 Estructura de pavimento flexible para análisis de sensibilidad. Variación de la relación de Poisson de la capa 2 (base hidráulica).

En la Figura 17.20 y Figura 17.21 se observa que al incrementar la relación de Poisson en la base hidráulica se tiene un incremento notorio en las deformaciones por tensión debajo de la carpeta asfáltica y arriba de la capa subrasante respectivamente. Ello trae como consecuencia un aumento en el daño acumulativo y una disminución de la vida remanente por fatiga y deformación permanente en el pavimento.

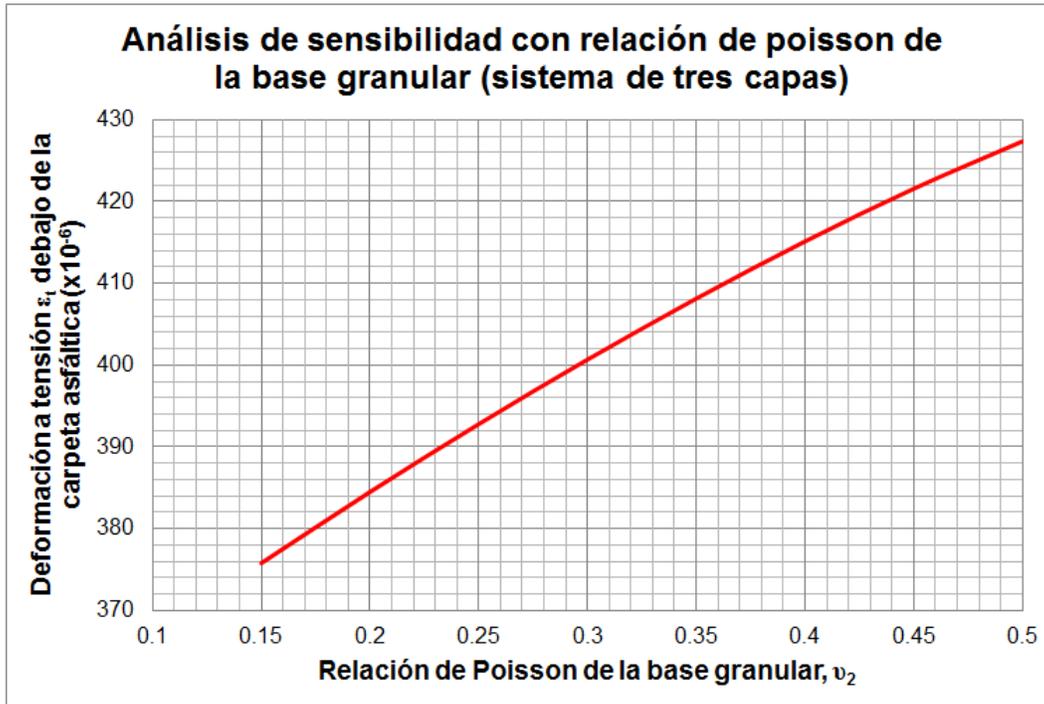
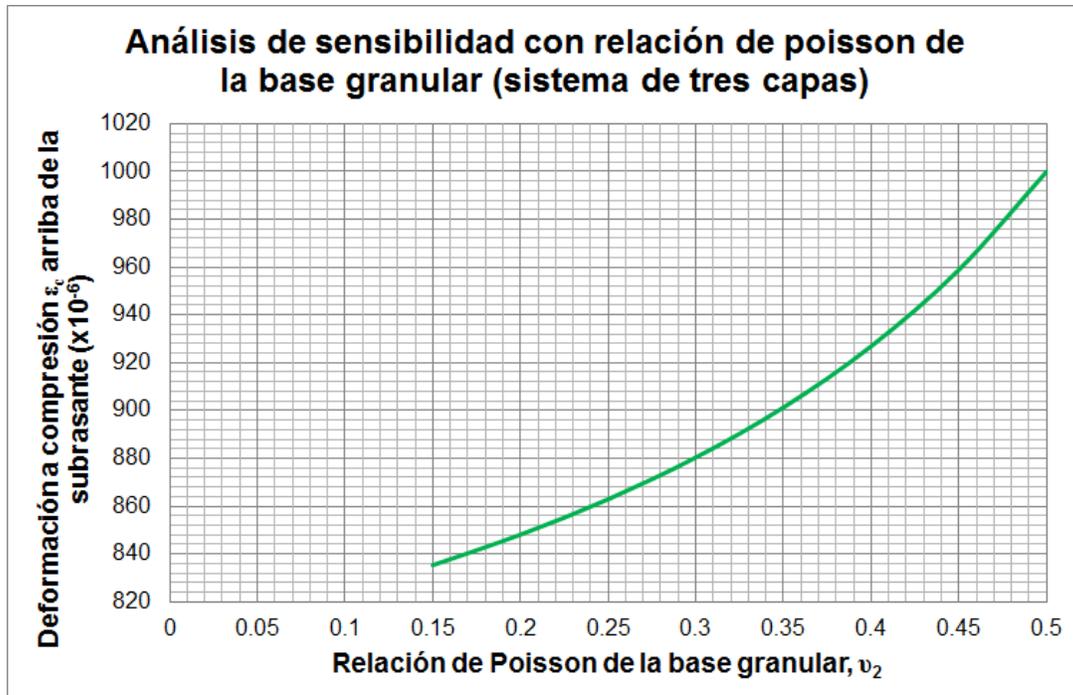


Figura 17.20 Análisis de sensibilidad por fatiga para sistema tricapa variando la relación de Poisson de la base hidráulica.



**Figura 17.21 Análisis de sensibilidad por deformación permanente para sistema tricapa variando relación de Poisson de la base hidráulica.**

La Figura 17.22 muestra ahora el parámetro de relación de Poisson de subrasante que se utilizará para el análisis de sensibilidad.

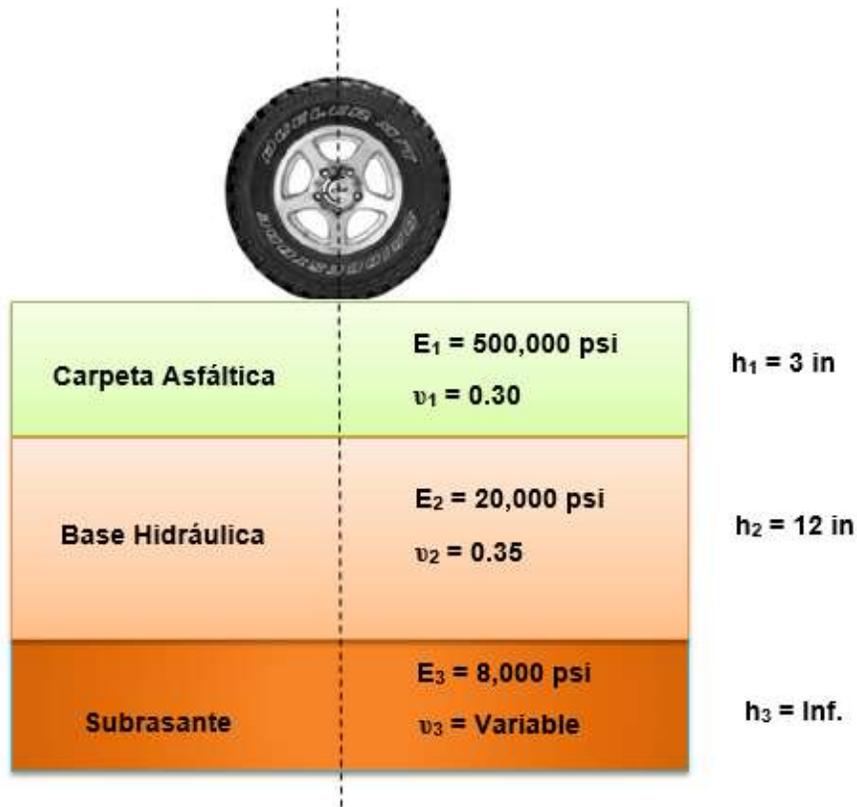
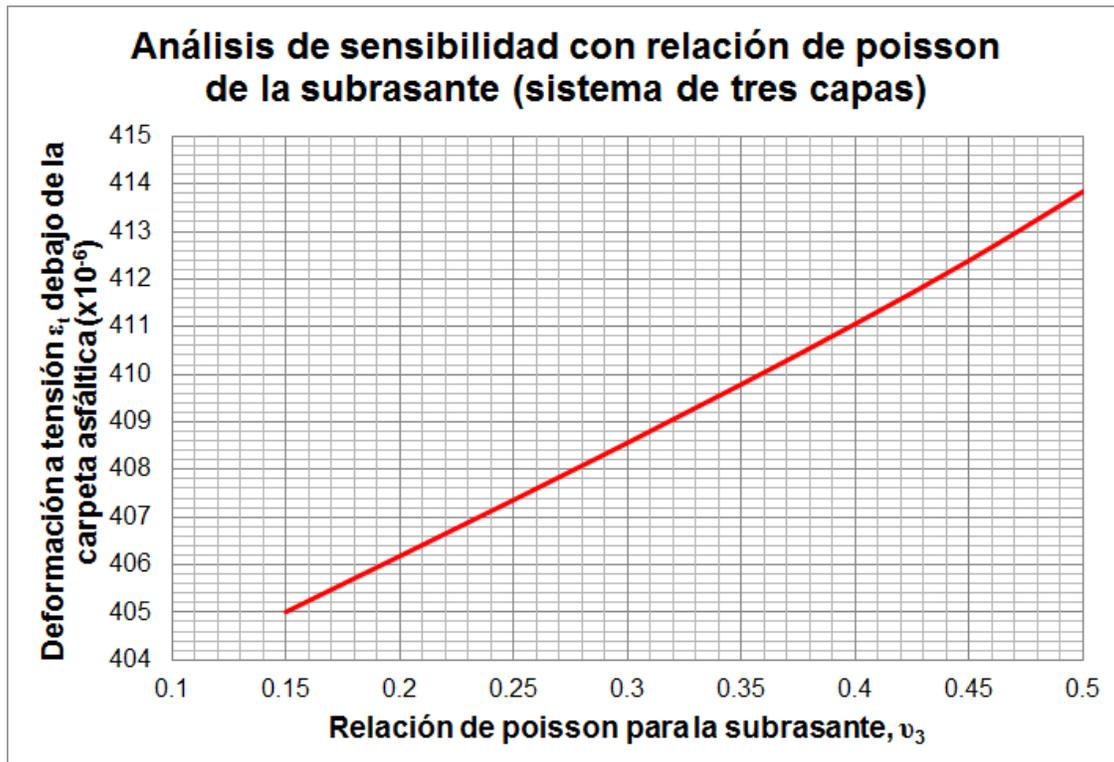


Figura 17.22 Estructura de pavimento flexible para análisis de sensibilidad. Variación de la relación de Poisson de la capa 3 (subrasante).

La Figura 17.23 se observa que al incrementar la relación de Poisson en la subrasante se tiene un incremento notorio en la deformación por tensión debajo de la carpeta asfáltica generando con ello mayor daño acumulativo y menor vida remanente por fatiga.



**Figura 17.23 Análisis de sensibilidad por fatiga para sistema tricapa variando la relación de Poisson de la subrasante.**

La Figura 17.24 muestra la variación de la deformación a compresión arriba de la capa subrasante. Puede observarse que esta respuesta mecánica disminuye conforme se aumenta la relación de Poisson de la subrasante, generando con ello menor daño acumulativo y mayor vida por rodera plástica en el pavimento.

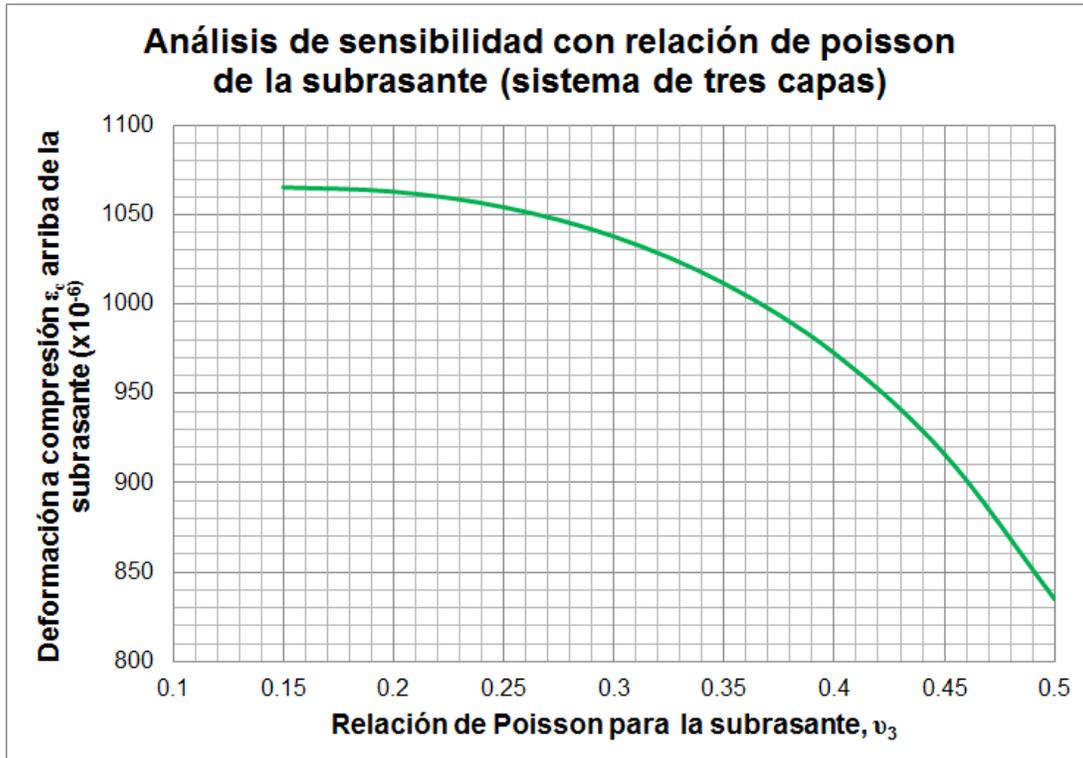
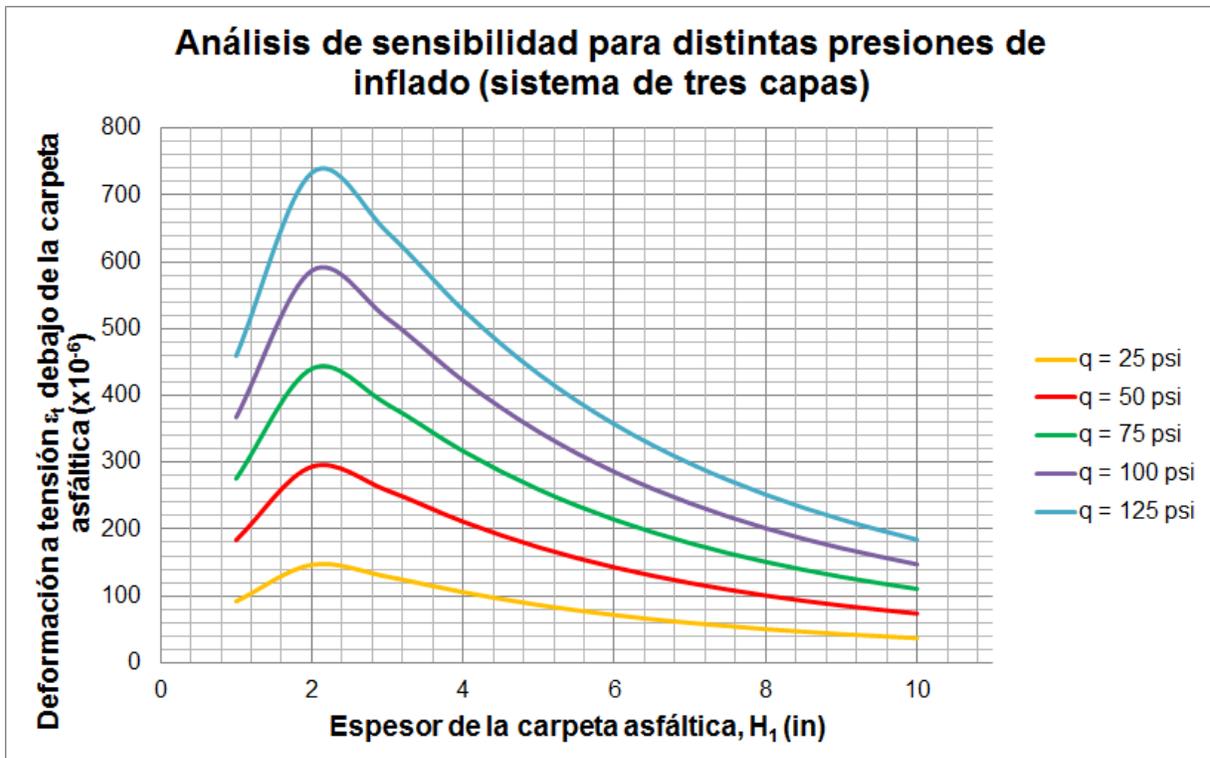


Figura 17.24 Análisis de sensibilidad por deformación permanente para sistema tricapa variando relación de Poisson de la subrasante.

La Figura 17.25 muestra el efecto de la variación de las presiones de inflado o de contacto de los neumáticos con el pavimento. Para un espesor fijo de carpeta asfáltica (por ejemplo 4 in) puede observarse que a medida que se incrementa la presión de inflado se tiene mayor deformación por tensión debajo de la carpeta asfáltica y por tanto se tiene menor vida remanente por fatiga. De manera similar sucede en la Figura 17.26 donde un incremento de presión de inflado con cualquier espesor de carpeta asfáltica trae como consecuencia un incremento en la deformación por compresión arriba de la capa subrasante y por ende mayor daño acumulativo y menor vida remanente por rodera plástica en el pavimento.



**Figura 17.25 Análisis de sensibilidad por fatiga para sistema tricapa variando distintas presiones de inflado y espesores de carpeta asfáltica.**

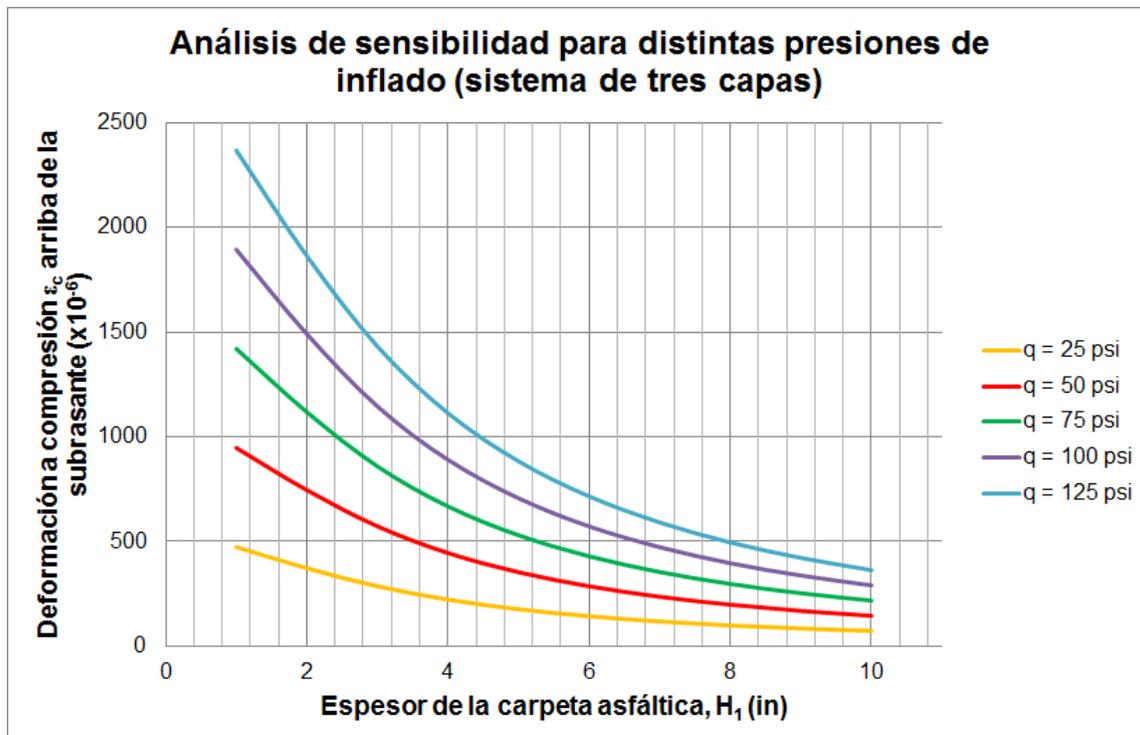


Figura 17.26 Análisis de sensibilidad por deformación permanente para sistema tricapa variando distintas presiones de inflado y espesores de carpeta asfáltica.

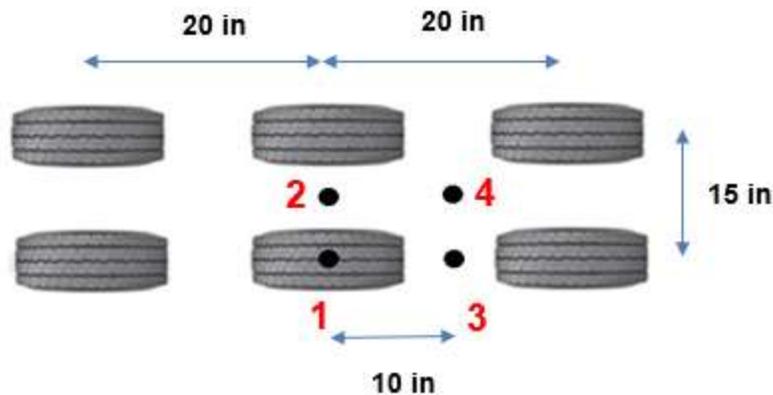
## 17.2 Análisis de sensibilidad 2

La Figura 17.27 y Figura 17.28 muestran una estructura de pavimento de tres capas y un semi-eje trídrem. El objeto de este análisis de sensibilidad es el de ubicar dónde se ubican las deformaciones críticas del pavimento. La primera de ellas es la deformación a tensión en la parte inferior de la carpeta asfáltica y que está asociada al agrietamiento por fatiga o piel de cocodrilo. La segunda respuesta es la deformación a compresión arriba de la capa subrasante, misma que está asociada a la huellamiento o rodadura plástica.



**Figura 17.27 Estructura tricapa para análisis de sensibilidad 2.**

En la Figura 17.28 se muestran 4 puntos de ubicación de respuestas mecánicas y la separación geométrica entre ellas.



**Figura 17.28 Geometría eje semi-trídem para análisis de sensibilidad 2.**

La Tabla 17.1, Tabla 17.2 y Tabla 17.3 muestran los resultados de las deformaciones críticas cuando se toma el valor de módulo dinámico de la carpeta

asfáltica de 500,000, 400,000 y 300,000 psi respectivamente. Puede observarse que la deformación a tensión crítica y que controla la fatiga se encuentra ubicada en el punto 1 (justo debajo del neumático central). La deformación a compresión crítica y que controla la rodera plástica se encuentra ubicada en el punto 2 (justo en el centroide del semi-eje tándem).

**Tabla 17.1 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la carpeta asfáltica de 500,000 psi.**

<b>E<sub>1</sub> = 500,000 psi</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\epsilon_t$	Fatiga	<b>-0.1852E-03</b>	-0.1616E-03	-0.1844E-04	-0.3842E-04
$\epsilon_z$	Deformación permanente	0.56465E-03	<b>0.60629E-03</b>	0.53242E-03	0.57477E-03

**Tabla 17.2 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la carpeta asfáltica de 400,000 psi.**

<b>E<sub>1</sub> = 400,000 psi</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\epsilon_t$	Fatiga	<b>-0.2053E-03</b>	-0.1753E-03	-0.2403E-05	-0.2627E-04
$\epsilon_z$	Deformación permanente	0.59035E-03	<b>0.63997E-03</b>	0.55537E-03	0.60146E-03

**Tabla 17.3 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la carpeta asfáltica de 300,000 psi.**

<b>E<sub>1</sub> = 300,000 psi</b>					
------------------------------------	--	--	--	--	--

Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\varepsilon_t$	Fatiga	<b>-0.2349E-03</b>	-0.1941E-03	0.25209E-04	-0.4766E-05
$\varepsilon_z$	Deformación permanente	0.62307E-03	<b>0.67497E-03</b>	0.58050E-03	0.63246E-03

La Tabla 17.4, Tabla 17.5, Tabla 17.6,

Tabla	17.7,	Tabla	17.8,
-------	-------	-------	-------

Tabla 17.9 y Tabla 17.10 muestran los resultados de las deformaciones críticas cuando se toma el valor de módulo elástico de base hidráulica de 5,000, 10,000, 20,000, 30,000, 50,000, 70,000 y 100,000 psi respectivamente. Puede observarse que la deformación a tensión crítica y que controla la fatiga se encuentra nuevamente ubicada en el punto 1 (justo debajo del neumático central). La deformación a compresión crítica y que controla la rodera plástica nuevamente se encuentra ubicada en el punto 2 (justo en el centroide del semi-eje tándem).

**Tabla 17.4 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la base hidráulica de 5,000 psi.**

<b>E<sub>2</sub> = 5,000 psi</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\epsilon_t$	Fatiga	<b>-0.2550E-03</b>	-0.2337E-03	-0.7353E-04	-0.9706E-04
$\epsilon_z$	Deformación permanente	0.13477E-02	<b>0.14425E-02</b>	0.12839E-02	0.13792E-02

**Tabla 17.5 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la base hidráulica de 10,000 psi.**

<b>E<sub>2</sub> = 10,000 psi</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\epsilon_t$	Fatiga	<b>-0.2207E-03</b>	-0.1982E-03	-0.4531E-04	-0.6721E-04
$\epsilon_z$	Deformación permanente	0.84851E-03	<b>0.91058E-03</b>	0.80433E-03	0.86547E-03

**Tabla 17.6 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la base hidráulica de 20,000 psi.**

<b>E<sub>2</sub> = 20,000 psi</b>					
-----------------------------------	--	--	--	--	--

*Teorías para calcular esfuerzos, deformaciones y deflexiones en pavimentos flexibles: un enfoque mecanicista*

Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\varepsilon_t$	Fatiga	<b>-0.1852E-03</b>	-0.1616E-03	-0.1844E-04	-0.3842E-04
$\varepsilon_z$	Deformación permanente	0.56465E-03	<b>0.60629E-03</b>	0.53242E-03	0.57477E-03

**Tabla 17.7 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la base hidráulica de 30,000 psi.**

<b>E<sub>2</sub> = 30,000 psi</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\varepsilon_t$	Fatiga	<b>-0.1626E-03</b>	-0.1386E-03	-0.3117E-05	-0.2181E-04
$\varepsilon_z$	Deformación permanente	0.45251E-03	<b>0.48714E-03</b>	0.42404E-03	0.45784E-03

**Tabla 17.8 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la base hidráulica de 50,000 psi.**

<b>E<sub>2</sub> = 50,000 psi</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\varepsilon_t$	Fatiga	<b>-0.1322E-03</b>	-0.1081E-03	0.14693E-04	-0.2236E-05
$\varepsilon_z$	Deformación permanente	0.34074E-03	<b>0.36564E-03</b>	0.31772E-03	0.34155E-03

**Tabla 17.9 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la base hidráulica de 70,000 psi.**

<b>E<sub>2</sub> = 70,000 psi</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\epsilon_t$	Fatiga	<b>-0.1116E-03</b>	-0.8779E-04	0.24656E-04	0.89744E-05
$\epsilon_z$	Deformación permanente	0.28106E-03	<b>0.30064E-03</b>	0.26127E-03	0.28009E-03

**Tabla 17.10 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la base hidráulica de 100,000 psi.**

<b>E<sub>2</sub> = 100,000 psi</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\epsilon_t$	Fatiga	<b>-0.8979E-04</b>	-0.6667E-04	0.33063E-04	0.18768E-04
$\epsilon_z$	Deformación permanente	0.22763E-03	<b>0.24254E-03</b>	0.21091E-03	0.22529E-03

La

Tabla

17.11,

Tabla

17.12,

Tabla 17.13, Tabla 17.14, Tabla 17.15 y Tabla 17.16 muestran los resultados de las deformaciones críticas cuando se toma el valor de módulo elástico de la subrasante de 500, 1,000, 3,000, 5,000, 7,000 y 10,000 psi respectivamente. Puede observarse que la deformación a tensión crítica y que controla la fatiga se encuentra nuevamente ubicada en el punto 1 (justo debajo del neumático central). La deformación a compresión crítica y que controla la rodera plástica, a excepción del valor de 500 psi, nuevamente se encuentra ubicada en el punto 2 (justo en el centroide del semi-eje tándem).

**Tabla 17.11 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la subrasante de 500 psi.**

<b>E<sub>3</sub> = 500 psi</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\varepsilon_t$	Fatiga	<b>-0.3145E-03</b>	-0.2928E-03	-0.1410E-03	-0.1627E-03
$\varepsilon_z$	Deformación permanente	0.10228E-02	0.10755E-02	<b>0.97709E-03</b>	0.10273E-02

**Tabla 17.12 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la subrasante de 1,000 psi.**

<b>E<sub>3</sub> = 1,000 psi</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\varepsilon_t$	Fatiga	<b>-0.2725E-03</b>	-0.2504E-03	-0.1006E-03	-0.1219E-03
$\varepsilon_z$	Deformación permanente	0.85709E-03	<b>0.90779E-03</b>	0.81468E-03	0.86302E-03

**Tabla 17.13 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la subrasante de 3,000 psi.**

<b>E<sub>3</sub> = 3,000 psi</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\epsilon_t$	Fatiga	<b>-0.2103E-03</b>	-0.1872E-03	-0.4177E-04	-0.6224E-04
$\epsilon_z$	Deformación permanente	0.63984E-03	<b>0.68690E-03</b>	0.60457E-03	0.64844E-03

**Tabla 17.14 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la subrasante de 5,000 psi.**

<b>E<sub>3</sub> = 5,000 psi</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\epsilon_t$	Fatiga	<b>-0.1852E-03</b>	-0.1616E-03	-0.1844E-04	-0.3842E-04
$\epsilon_z$	Deformación permanente	0.56465E-03	<b>0.60629E-03</b>	0.53242E-03	0.57477E-03

**Tabla 17.15 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la subrasante de 7,000 psi.**

<b><math>E_3 = 7,000</math> psi</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\epsilon_t$	Fatiga	<b>-0.1706E-03</b>	-0.1467E-03	-0.5029E-05	-0.2467E-04
$\epsilon_z$	Deformación permanente	0.52585E-03	<b>0.56699E-03</b>	0.49537E-03	0.53709E-03

**Tabla 17.16 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con módulo elástico de la subrasante de 10,000 psi.**

<b><math>E_3 = 10,000</math> psi</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\epsilon_t$	Fatiga	<b>-0.1572E-03</b>	-0.1328E-03	0.72982E-05	-0.1199E-04
$\epsilon_z$	Deformación permanente	0.49439E-03	<b>0.53921E-03</b>	0.46568E-03	0.50705E-03

La

Tabla

17.17,

Tabla

17.18,

Tabla 17.19, Tabla 17.20 y

Tabla 17.21 muestran los resultados de las deformaciones críticas cuando se toma el valor de espesor de la carpeta asfáltica de 2, 3, 4, 5 y 6 in respectivamente. Puede observarse que la deformación a tensión crítica y que controla la fatiga se encuentra nuevamente ubicada en el punto 1 (justo debajo del neumático central). La deformación a compresión crítica y que controla la rodera plástica, nuevamente se encuentra ubicada en el punto 2 (justo en el centroide del semi-eje tándem).

**Tabla 17.17 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la carpeta asfáltica de 2 in.**

<b><math>h_1 = 2</math> in</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\varepsilon_t$	Fatiga	<b>-0.4798E-03</b>	-0.2517E-03	0.29957E-03	0.19805E-03
$\varepsilon_z$	Deformación permanente	0.87977E-03	<b>0.93009E-03</b>	0.73483E-03	0.79259E-03

**Tabla 17.18 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la carpeta asfáltica de 3 in.**

<b><math>h_1 = 3</math> in</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\varepsilon_t$	Fatiga	<b>-0.3388E-03</b>	-0.2229E-03	0.17638E-03	0.12018E-03
$\varepsilon_z$	Deformación permanente	0.78565E-03	<b>0.85551E-03</b>	0.70543E-03	0.77193E-03

**Tabla 17.19 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la carpeta asfáltica de 4 in.**

h <sub>1</sub> = 4 in					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\epsilon_t$	Fatiga	<b>-0.2573E-03</b>	-0.1909E-03	0.79568E-04	0.43192E-04
$\epsilon_z$	Deformación permanente	0.70851E-03	<b>0.77215E-03</b>	0.65370E-03	0.71483E-03

**Tabla 17.20 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la carpeta asfáltica de 5 in.**

h <sub>1</sub> = 5 in					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\epsilon_t$	Fatiga	<b>-0.2127E-03</b>	-0.1731E-03	0.18787E-04	-0.7815E-05
$\epsilon_z$	Deformación permanente	0.63504E-03	<b>0.68882E-03</b>	0.59202E-03	0.64581E-03

**Tabla 17.21 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la carpeta asfáltica de 6 in.**

<b><math>h_1 = 6</math> in</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\varepsilon_t$	Fatiga	<b>-0.1852E-03</b>	-0.1616E-03	-0.1844E-04	-0.3842E-04
$\varepsilon_z$	Deformación permanente	0.56465E-03	<b>0.60629E-03</b>	0.53242E-03	0.57477E-03

La

Tabla

17.22,

Tabla

17.23,

Tabla

17.24,

Tabla 17.25 y Tabla 17.26 muestran los resultados de las deformaciones críticas cuando se toma el valor de espesor de la base hidráulica de 8, 10, 12, 15 y 20 in respectivamente. Puede observarse que la deformación a tensión crítica y que controla la fatiga se encuentra nuevamente ubicada en el punto 1 (justo debajo del neumático central). La deformación a compresión crítica y que controla la rodera plástica, nuevamente se encuentra ubicada en el punto 2 (justo en el centroide del semi-eje tándem).

**Tabla 17.22 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la base hidráulica de 8 in.**

<b><math>h_2 = 8</math> in</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\epsilon_t$	Fatiga	<b>-0.2050E-03</b>	-0.1823E-03	-0.3678E-04	-0.5756E-04
$\epsilon_z$	Deformación permanente	0.63515E-03	<b>0.67906E-03</b>	0.57654E-03	0.62088E-03

**Tabla 17.23 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la base hidráulica de 10 in.**

h <sub>2</sub> = 10 in					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\epsilon_t$	Fatiga	<b>-0.1945E-03</b>	-0.1713E-03	-0.2704E-04	-0.4738E-04
$\epsilon_z$	Deformación permanente	0.60114E-03	<b>0.64672E-03</b>	0.55623E-03	0.60301E-03

**Tabla 17.24 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la base hidráulica de 12 in.**

h <sub>2</sub> = 12 in					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\epsilon_t$	Fatiga	<b>-0.1852E-03</b>	-0.1616E-03	-0.1844E-04	-0.3842E-04
$\epsilon_z$	Deformación permanente	0.56465E-03	<b>0.60629E-03</b>	0.53242E-03	0.57477E-03

**Tabla 17.25 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la base hidráulica de 15 in.**

<b><math>h_2 = 15</math> in</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\epsilon_t$	Fatiga	<b>-0.1735E-03</b>	-0.1495E-03	-0.7708E-05	-0.2727E-04
$\epsilon_z$	Deformación permanente	0.51494E-03	<b>0.55284E-03</b>	0.49018E-03	0.52716E-03

**Tabla 17.26 Ubicación de puntos críticos por tensión en la carpeta asfáltica y por deformación arriba de la subrasante con espesor de la base hidráulica de 20 in.**

<b><math>h_2 = 20</math> in</b>					
Respuesta mecánica	Daño	Puntos críticos			
		1	2	3	4
$\epsilon_t$	Fatiga	<b>-0.1593E-03</b>	-0.1348E-03	0.53189E-05	-0.1382E-04
$\epsilon_z$	Deformación permanente	0.43907E-03	<b>0.46883E-03</b>	0.41940E-03	0.44871E-03

En los últimos años en varios países pero sobre todo en varios estados de la unión americana ha tenido gran impulso el desarrollo de pistas de prueba donde se llevan a cabo pruebas aceleradas de campo para verificar las respuestas críticas del pavimento NCAT.

Varios estudios (Timm, 1999) han confirmado que existen variaciones significativas de los resultados teóricos respecto de los resultados prácticos. Timm considera que las deformaciones encontradas en tramos experimentales son mayores a los resultados dados por los programa multicapa. Esto se debe a la enorme variabilidad que existe durante la ejecución del ensayo: maniobras del conductor, velocidad, hora del día, temperatura, colocación de los dispositivos de medición, etc.



## **18 Discusión de las respuestas teóricas con las respuestas hechas en pistas de ensaye (CEDEX, MnROAD, LCPC)**

---

Varias agencias alrededor del mundo han construido pistas a escala real para llevar a cabo pruebas aceleradas en pavimentos APT (Accelerated Pavement Test) simulando los efectos de cargas, materiales y climas representativos. Algunas de ellas son la pista del National Center for Asphalt Technology (NCAT) en Auburn, Alabama; MnROAD en Minnesota, WestTrack en Nevada, CEDEX en Madrid España, LCPC en Nantes Francia, Pista aeronáutica de la Federal Aviation Administration (FAA) en Atlantic City, Nueva Jersey, entre otras.

En 1987 la Federal Highway Administration (FHWA) comenzó el “Programa de Desempeño del Pavimento a Largo Plazo (Long-Term Pavement Performance Program LTPP), el cual tenía el objeto de estudiar, en un periodo de 20 años, 2400 secciones de pavimentos flexibles y rígidos de Estados Unidos y Canadá. Estas secciones de pavimento cubrían un enorme universo de tipos de materiales, volúmenes de tránsito y condiciones ambientales.

El LTPP fue diseñado como una alianza entre las provincias norteamericanas y canadienses con el objeto de ayudar a estas a tomar decisiones sobre la construcción eficiente y racional de pavimentos.

Algunos de los datos que han sido recolectados del programa LTPP son los siguientes:

- Mediciones anuales de rugosidad.
- Mediciones anuales de fricción.
- Mediciones anuales de evaluación estructural no destructiva con el deflectómetro de impacto HWD.
- Extracción de muestras y ensayos en laboratorio.

Cabe mencionar que algunos de los datos del LTPP han sido usados en el desarrollo de la guía empírico mecanicista DarWIN-AASHTO 2008. Lo más sobresaliente de ello ha sido la calibración de sus modelos de deterioro en la predicción del desempeño de la o las estructuras de pavimento.

Actualmente en el Instituto Mexicano del Transporte se tiene un Simulador de Carga Pesada (HVS) para efectuar ensayos acelerados en estructuras de pavimentos flexibles (Ver Figura 18.1 y Figura 18.2).



**Figura 18.1 Simulador HVS en el Instituto Mexicano del Transporte (IMT).**



**Figura 18.2 Simulador HVS en el Instituto Mexicano del Transporte (IMT) (continuación).**

Los ensayos acelerados en pavimentos a escala real, han demostrado ser una herramienta valiosa que llena el espacio que hay entre los modelos de

comportamiento, pruebas de laboratorio y las pruebas de largo plazo en pavimentos en servicio. Se utilizan para comprender mejor el comportamiento de los pavimentos, tratamiento de materiales alternativos, evaluación de nuevos materiales y aditivos, nuevas técnicas de construcción y nuevos tipos de estructuras (IMT).

Desde la perspectiva de la estructura del pavimento, estos estudios pueden clasificarse en:

- Determinación de capas débiles en una sección de pavimento y su modo de falla.
- Evaluación de la influencia ambiental en el desempeño, (temperatura o humedad).
- Pruebas comparativas modificando una sola variable en dos secciones de pruebas idénticas.
- Identificar y resaltar las deficiencias en prácticas constructivas actuales.
- Evaluar nuevos materiales de construcción, aditivos y mejoradores de desempeño en materiales de pavimentación.
- Revisar especificaciones y normas de construcción antes de una implementación a gran escala.
- Calibrar y validar modelos de deterioro para el diseño estructural.
- Comparar procedimientos constructivos
- Vincular pruebas de laboratorio con los resultados observados en campo
- Evaluar el impacto de nuevas ruedas, límites de carga
- Evaluación de vida remanente en pavimentos en operación (IMT).



## 19 Conclusiones

---

Las teorías para el cálculo de esfuerzos y deformaciones en pavimentos flexibles han ido evolucionando a lo largo del tiempo con los nuevos desarrollos tecnológicos de los materiales. Hoy en día los métodos empírico-mecanicistas de diseño de pavimentos consideran dos deformaciones críticas: la deformación a tensión debajo de la capa asfáltica asociada a la fatiga o piel de cocodrilo así como la deformación a compresión arriba de la subrasante asociada a la rodera plástica. Estas respuestas son el objeto del cálculo de esfuerzos y deformaciones en pavimentos flexibles.

Para poder llevar a cabo el cálculo de estas respuestas mecánicas es necesario conocer aspectos teóricos y técnicos de la teoría de la elasticidad como los módulos elásticos y las relaciones de Poisson de los materiales empleados.

Para llevar a cabo el cálculo de respuestas mecánicas se pueden llevar a cabo distintos enfoques mecánicos: el análisis lineal, correspondiente a condiciones elásticas de los materiales; análisis no lineal, correspondiente a la rigidez de los materiales en función del nivel de esfuerzo al que estará sometido; análisis viscoelástico, correspondiente al tiempo y temperatura a la cual estará sometido los materiales tratados con asfalto y el análisis con elemento finito que nos permite utilizar condiciones de frontera en el medio.

A lo largo del documento se han ido comentando teorías elementales para calcular estas respuestas mecánicas. La teoría elemental es la teoría de Boussinesq para medios homogéneos, elásticos e isotrópicos. Derivado de estos trabajos Burmister desarrollo la teoría elástica multicapa en la cual cada del sistema se considera elástica, homogénea e isotrópica; con espesores finitos las primeras capas a excepción de la última que tiene espesor infinito. Foster-Ahlvin (1954), Huang (1959), Kirk (1966), Jones (1962), entre otros, desarrollaron expresiones gráficas y tabulares para encontrar distintas expresiones de esfuerzos, deformaciones y deflexiones para sistemas de dos a tres capas. Para más de tres capas resulto difícil establecer soluciones de forma tabular y más de forma gráfica.

Otra teoría muy empleada son las estructuras equivalentes, las cuales representan las mismas respuestas mecánicas entre sistemas de pavimentos flexibles. El método de Odemark, Thenn de Barros, Palmer-Barber, entre otros, presentan artificios interesantes para analizar estructuras de pavimento bajo el esquema de "equivalencia" entre espesores y módulos elásticos de las capas de pavimento.

Se han hecho análisis de sensibilidad numérica para verificar aquellos elementos que contribuyen a modificar las respuestas mecánicas de los pavimentos. Se ha discutido el empleo de software especializado en la obtención de campos de esfuerzos y de los estudios que se han hecho a escala real en varios laboratorios de investigación y de transporte en el mundo.

Están resueltos una serie de ejercicios de una manera muy práctica y sencilla y se recomiendan otros para su resolución y análisis.

Se busca contribuir con el medio carretero con este documento técnico para que estudiantes de licenciatura y de posgrado, técnicos, laboratoristas, diseñadores, supervisores, constructores y evaluadores conozcan los aspectos teóricos y técnicos en el quehacer del día con día de la Ingeniería de Pavimentos.

Sanfandila Querétaro, Mayo del 2018

Los Autores

## Bibliografía

---

American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO) (2012). ***"Determining the Resilient Modulus of Soils and Aggregate Materials."*** Standard Method of Test T 307-99 (2012). AASHTO, Washington DC, EUA.

Acum W.E.A. and Fox L. (1950). ***"Computation of load stresses in a three layer elastic system"***, Geotechnique, Vol. 2, No. 4, pp. 293-300.

Ahlvin R.G., Chou Y.T. and Hutchinson R.L. (1973). ***"The principle of superposition in pavement analysis"***, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 466, pp. 153-162, Washington D.C, EUA.

Ahlvin R.G and Ullery H.H (1962). ***"Tabulated Values for Determining the Complete Pattern of Stresses, Strains, and Deflections Beneath a Uniform Circular Load on a Homogeneous Half Space"*** In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 342, pp. 1-13, Washington D.C, EUA.

Ali G. A., Krizek R.J. and Osterberg O. (1970). ***"Influence of Poisson's on the surface deflection of layered systems"***, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 337, pp. 1-10, Washington D.C, EUA.

AMADEUS (2000). ***"Advanced models for analytical design of European pavement structures"***, Report number RO-97-SC 2137 prepared for the European Commission.

Arnold G., Hughes D., Dawson A. and Robinson D. (2003). ***"Design of granular pavements"***, In Transportation Research Record TRB, Issue 1819, pp. 194-200, Washington D.C, EUA.

Barber E.S. (1963). ***"Shear Loads on Pavements"***, Proceedings International Conference on the structural design of asphalt pavements, University of Michigan, Ann Arbor, EUA.

Barksdale R.D. (1970). **“A nonlinear theory for predicting the performance of flexible highway pavements”**, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 337, pp. 22-39, Washington D.C, EUA.

Brown S.F. (1972). **“Computation of stresses and strains for the design of flexible pavements”**, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 407, pp. 55-64, Washington D.C, EUA.

Burmister D. (1943). **“The General Theory of Stresses and displacements in layered soil systems”** In Transportation Research Board (TRB), Washington D.C, EUA.

Charyulu M.K. and Sheeler J.B. (1968). **“Theoretical Stress Distribution in an Elastic Multi-Layered System”**, In Transportation Research Board (TRB), No. 228, pp. 11-17, Washington D.C, EUA.

Chen D., Zaman M., Laguros J. and Soltani A. (1995). **“Assessment of computer programs for analysis of flexible pavement structure”**, In Transportation Research Record TRB, Issue 1482, pp. 123-133, Washington D.C, EUA.

Coria C. (2013). **“Modelo de respuesta estructural multicapa para diseño de pavimentos flexibles”**, Tesis de Maestría, Maestría en Infraestructura del Transporte en la Rama de las Vías Terrestres, División de estudios de posgrado de la facultad de Ingeniería Civil, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH), Morelia Michoacán México.

Damy J. and Casales G. (1985). **“Soil stresses under a polygonal area uniformly loaded”**, Proceedings of the eleventh international conference on soil mechanics and foundation engineering, San Francisco California, EUA.

Damy J. (1985). **“Integración de las superficies de Boussinesq, Westergaard y Fröhlich, sobre superficies poligonales de cualquier forma, cargadas con fuerzas verticales uniformemente repartidas”**, Conferencia en la Sociedad Mexicana de Ingeniería Geotécnica (SMIG), México DF.

Das B.M (2001). **“Fundamentos de Ingeniería Geotécnica”**, Editorial Thompson, Primera edición, EUA.

Das B.M. (2008). **“Advanced Soil Mechanics”**, Taylor & Francis, 3ra edición, Nueva York, EUA.

Deen R.C., Southgate H.F. and Havens J.H. (1971). **“Structural analysis of bituminous concrete pavements”**, In Transportation Research Board (TRB), Issue 407, pp. 22-35, Washington D.C, EUA.

Dormon G.M. and Metcalf C.T. (1965). **“Design Curves for Flexible Pavements Based on Layered System Theory”**, In Transportation Research Record TRB, Issue 71, pp. 69-84, Washington D.C, EUA.

Drennon C.B. and Kenis W.J. (1970). **“Response of a flexible pavement to repetitive and static loads”**, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 337, pp. 40-54, Washington D.C, EUA.

Duncan J.M., Monismith C.L. and Wilson E.L. (1968). **“Theoretical stress distribution in an elastic multi-layered system”**, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 228, pp. 18-33, Washington D.C, EUA.

EVERSTRESS (2005). **“EVERSERIES: User’s guide Pavement Analysis Computer Software and Cases Studies”**, Washington State Department of Transportation, Washington D.C EE.UU.

Federal Highway Administration (FHWA) (2002). **“Introduction to Mechanistic-Empirical Design of New and Rehabilitated Pavements”**, National Highway Institute, NHI Curso No. 131064, Washington DC, EUA.

Foster C.R. and Ahlvin R.G. (1954). **“Stresses and deflections induced by a uniform circular load”**, In Proceedings Transportation Research Board (TRB), Vol. 33, pp. 467-470, Washington D.C, EUA.

Fox L. (1948). **“Computation of traffic stresses in a simple road structure”**, Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference on soil mechanics and foundation engineering, No 2, pp. 1-27, EUA.

Freitag D.R. and Green J. (1962). **“Distribution of stress on an unyielding surface beneath a pneumatic tire”**, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 342, pp. 14-40, Washington D.C, EUA.

Galal A., Krizek R. and Osterberg J. (1970). **“Influence of Poisson’s ratio on the surface deflection of layered systems”**, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 337, pp. 1-10, Washington D.C, EUA.

Garnica P., Gómez J.A (2002), **“Mecánica de Materiales para Pavimentos”**, Publicación Técnica No. 197, Instituto Mexicano del Transporte, Sanfandila Querétaro México.

Garnica P. y Hernández R. (2013). **“Manual de usuario IMT PAVE 1.1”**, Documento Técnico No. 53, Instituto Mexicano del Transporte (IMT), Sanfandila Querétaro México.

Gerrard C.M. (1969). **“The analysis of a homogeneous, cross-anisotropic elastic half space undergoing deformations that possess a vertical plane of symmetry”**, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 282, pp. 41-47, Washington D.C, EUA.

Gerrard C.M. (1969). **“Tables of stresses, strains and displacements in two-layer elastic systems under various traffic loads”**, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 282, pp. 41-47, Washington D.C, EUA.

Hagstrom J., Chambers R. and Tons E. (1965). **“Low Modulus Pavement on elastic foundation”**, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 71, pp. 172-192, Washington D.C, EUA.

Han H.C.S., Hirst T.J. and Fang H.Y. (1972). **“Determination of the elastic moduli of flexible pavement components”**, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 407, pp. 36-38, Washington D.C, EUA.

Hank R.J. and Scrivner F.H. (1948). **“Some numerical solutions of stress in two and three layered systems”**, Proceedings Transportation Research Board (TRB), No. 28, pp. 457-468, Washington D.C., EUA.

Hejal S.S., Yoder S.R. and Oppenlander J.C. (1969). **“Optimal design of flexible pavement sections”**, Indiana Department of Transportation and Purdue University, FHWA 69/29, pp. 86-98, EUA.

Higuera C. (2007). **“Mecánica de pavimentos. Principios básicos”**, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), GRINFRAVIAL, Boyacá, Colombia.

Huang Y.H. (1967). **“Stresses and displacements in viscoelastic layered systems under circular loaded areas”**, 2nd International Conference

Structural Design Asphalt Pavements, University of Michigan, Ann Arbor, pp. 170-188, EUA

Huang Y.H. (1968). **“Stresses and Displacements in Nonlinear Soil Media”**, Proceedings ASCE, Vol. 94, SM1, pp.1-19, EUA.

Huang Y.H. (1969). **“Computation of equivalent single-wheel loads using layered theory”**, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 291, pp. 144-155, Washington D.C, EUA.

Huang Y.H. (1970). **“Stress distribution in rectangular concrete slabs under wheel loads”**, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 337, pp. 70-72, Washington D.C, EUA.

Huang Y.H. (1993). **“Pavement Analysis and Design”**, Prentice Hall, New Jersey.

Hwang D. and Witczak M. (1979) **“DAMA: User’s manual”**, Department of civil engineering, University of Maryland, EE.UU.

ICAFIR (2006). **“Manual de Usuario”**, Instrucción para el diseño de firmes de la red de carreteras de Andalucía, España.

Instituto Mexicano del Transporte IMT (2015). **“Análisis y Diseño Mecanicista de Pavimentos en Carreteras Mexicanas”**, *Curso de Actualización Post-profesional*, Sanfandila Querétaro, México.

Ioannides A. (1991). **“Theoretical Implications of the AASHTO 1986 Nondestructive Testing Method 2 for Pavement Evaluation”** In Transportation Research Board (TRB), No. 1307, pp. 211-220, Washington D.C, EUA.

Kawa I., Brill D. and Hayhoe G. (2007). **“FAARFIELD: New FAA Airport thickness design software”**, FAA Worldwide Airport Technology Transfer Conference, Atlantic City, New Jersey, EUA.

Killingsworth B. and Zollinger D. (1995) **“Sensitivity Analysis of Input Parameters for pavement design and reliability”**, In Transportation Research Record TRB, Issue 1482, pp. 111-122, Washington D.C, EUA.

Kumlai S., Sangpetngam B. and Chalermpong S. (2014). “**Development of equations for determining layer elastic moduli using pavement deflection characteristics**”, In Transportation Research Board (TRB), Washington D.C, EUA.

Jeuffroy G. and Bachelez J. (1962). “**Note on a method of analysis for pavements**”, Proceedings Ann Arbor Conference.

Jones A. (1962). “**Tables of stresses in three-layer elastic systems**”, In Transportation Research Board (TRB), No. 342, pp. 176-214, Washington D.C, EUA.

Jooste F.J. and Fernando E.G. (1994). “**Modeling of pavement response under superheavy loads**”, In Transportation Research Record TRB, Issue 1448, pp. 69-74, Washington D.C, EUA.

Jung F.W., Kher R. and Phang W.A. (1975). “**A performance prediction subsystem, flexible pavement**”, Ontario Ministry of Transportation & Communications, 16 p., Ontario Canada.

Kaniraj S. (1988). “**Design aids in soil mechanics and foundation engineering**”, Tata McGraw Hill, New Delhi, India.

Khazanovich L. and Wang Q. (2007). “**MnLayer: High-Performance Layered Elastic Analysis Program**” Transportation Research Board (TRB), No. 2037, pp. 63-75, Washington D.C, EUA.

Kim M. and Tutumluer E. (2008). “**Multiple wheel-load interaction in flexible pavements**”, In Transportation Research Record TRB, Issue 2068, pp. 49-60, Washington D.C, EUA.

Kirk J.M. (1966). “**Tables of radial stresses in top layer of three-layer elastic system at distance from load axis**”, In Transportation Research Record TRB, Issue 145, pp. 128-155, Washington D.C, EUA.

Lemer A.C. and Moavenzadeh F. (1970). “**The analysis of highway pavement systems**”, In Transportation Research Board (TRB), Issue 337, pp. 78-85, Washington D.C, EUA.

Lemer A.C. and Moavenzadeh F. (1969). ***“An integrated approach to analysis and design of pavement structure”***, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 291, pp. 173-185, Washington D.C, EUA.

Levey J.R. and Barenberg E. J. (1970). ***“A procedure for evaluating pavements with non-uniform paving materials”***, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 337, pp. 55-69, Washington D.C, EUA.

Lilli F. and Lockhart J. (1999). ***“Aporte estructural de las capas drenantes”***, 10° Congreso Ibero-Latinoamericano del Asfalto, Tomo III, Sesión G, Sevilla España.

Londoño C. (1991). ***“Funcionamiento de los pavimentos”***, Instituto Colombiano de Productores de Cemento (ICPC), Notas técnicas, Serie 4 No. 23, Medellín Colombia.

Long Richard P., and Delgado Maria G. (1991). ***“Resilient Modulus of Subgrades”***. Report JHR 91-199, Storrs, Connecticut: Joint Highway Research Advisory Council (JHRAC) of the University of Connecticut.

Loría G., Aguiar J. and Rojas F. (2015). ***“PITRA PAVE: Software de Multicapa Elástica”***, Laboratorio Nacional de Materiales y Modelos Estructurales (LANAMME), Programa de Infraestructura del Transporte (PITRA), Universidad de Costa Rica, San José de Costa Rica.

Mateos A. (2003). ***“Modelización numérica de la respuesta estructural de los firmes flexibles a partir de medidas experimentales en pista de ensayo a escala real”***, Tesis doctoral, Departamento de Mecánica de medios continuos y teoría de estructuras, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, canales y puertos, Madrid España.

McCullough B.F. and Boedecker K.J. (1969). ***“Use of linear-elastic layered theory for the design of CRCP overlays”***, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 291, pp. 1-13, Washington D.C, EUA.

McCullough B.F. and Monismith C.L. (1970). ***“A pavement overlay design system considering wheel loads, temperature changes, and performance”***, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 330, pp. 64-82, Washington D.C, EUA.

McDowell C. (1962). **“Flexible pavement design: A complex combination of theory, testing and evaluation of materials”**, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 321, 81 pp, Washington D.C, EUA.

McLeod N.W. (1963). **“Some notes on pavement structural design”**, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 13, pp. 66-141, Washington D.C, EUA.

Mehta M.R. and Veletsos A.S. (1959). **“Stresses and displacements in layered systems”**, University of Illinois, Structural Research Series, No. 178, 116 p., Illinois, EUA.

Michelow J. (1963). **“Analysis of Stresses and Displacements in an N-Layered Elastic System under a Load Uniformly Distributed on a circular Area”**, California Research Corporation, 14 p, Richmond, California.

Montejo A. (2008). **“Ingeniería de Pavimentos: Evaluación estructural, obras de mejoramiento y nuevas tecnologías”**, Universidad Católica de Colombia, 3ra edición, Tomo 2, Bogotá Colombia.

Nataatmadja A., Tao S.Y. and Chim K. (2012). **“Design subgrade CBR for flexible pavements: comparison of predictive methods”**, In 25<sup>th</sup> ARRB Conference Shaping the future: Linking policy, research and outcomes, Perth Australia.

Nikolaides A. (2015). **“Highway Engineering: Pavements, Materials and Control of Quality”**, CRC Press, Taylor & Francis Group, Londres, Reino Unido.

Noureldin S., Zhu K., Harris D. and Li S. (2005). **“Non-Destructive estimation of pavement thickness, structural number and subgrade resilience along Indiana Department of Transportation highways”**, Final report FHWA/IN/JTRP-2004/35, Indiana Department of Transportation, EE.UU.

Odemark N. (1949). **“Investigations as to the elastic properties of soil and design of pavements according to the theory of elasticity”**, Meddelande 77, Statens Vaginstitut; Stockholm, Sweden. (Traducido al ingles por A. Ioannides en 1989).

Palmer L.A and Barber E.S (1940). **“Soil displacement under a circular loaded area”**, Proceedings Transportation Research Board (TRB), No. 20, pp. 279-286, Washington D.C, EUA.

Peattie K. R. (1962). **“Stress and strain factors for three layer elastic systems”**, In Transportation Research Board (TRB), No. 342, pp. 215-253, Washington D.C, EUA.

Peutz M.G.F., Van Kempen H.P.M. and Jones A. (1968). **“Layered Systems under normal surface loads”**, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 228, pp. 34-45, Washington D.C, EUA.

Pidwerbesky B. (1995). **“Strain Response and Performance of Subgrades and Flexible Pavements Under Various Loading Conditions”**, In Transportation Research Record TRB, Issue 1482, pp. 87-93, Washington D.C, EUA.

Poulos H. and Davis E., (1974). **“Elastic solutions for soil and rock mechanics”**, John Wiley & Sons Inc., Nueva York, EUA.

Pronk A. (1994). **“Equivalent layer theories: state of the art report”**, Dienst Weg-en Waterbouwkunde, Holanda.

Puppala A. (2008). **“Estimating Stiffness of subgrade and unbound materials for pavement design”**, National Cooperative Highway Research Program (NCHRP) synthesis 382, EUA.

Raad L. and Marhamo L. (1991). **“Evaluation of Two Layer Pavements Using Dimensional Analysis”**, In Transportation Research Record TRB, Issue 1307, pp. 99-110, Washington D.C, EUA.

Reyes F. (2012). **“Diseño Racional de Pavimentos”**, Escuela Colombiana de Ingeniería, Centro Editorial Javeriano, Cuarta reimpresión, Colombia.

Reyes F. and Parra N. (1999). **“Modelación por elementos finitos de una estructural de pavimento usando el programa ABAQUS”**, 10° Congreso Ibero-Latinoamericano del Asfalto, Tomo III, Sesión G, Sevilla España.

Reza, A. and Ziaie (2015). “**NonPAS: A program for Nonlinear Analysis of Flexible Pavements**”, *International Journal of Integrated Engineering*, Vol. 7, pp. 21-28, Malasia.

Sanborn J.L. (1963). “**Stress and deflection in an elastic mass under semi-ellipsoidal loads**”, 2<sup>nd</sup> International Conference Structure Design asphalt pavements, Ann Arbor, Michigan EUA.

Schiffman R. (1962). “**General Solution of Stress and Displacements in Layered Elastic Systems**” International Conference on the structural design of asphalt pavement, Proceedings, University of Michigan, Michigan, EUA.

Schiffman R. (1969). “**The influence of adhesion on the stresses and displacements in an Elastic Half-Space**”, In Transportation Research Board (TRB), No. 282, pp. 17-24, Washington D.C, EUA.

Schiffman R. (1957). “**The numerical solution for stresses and displacements in a three-layer soil system**”, In Proceedings of the 4<sup>th</sup> International conference on soil mechanics and foundation engineering, Vol. 2, pp. 169-173.

Secretaría de Comunicaciones y Transporte SCT (2014). “**Sobre el peso y dimensiones máximas con los que pueden circular los vehículos de autotransporte que transitan en las vías generales de comunicación de jurisdicción federal**”, Norma Oficial Mexicana NOM-012-SCT-2-2014, México, DF.

Southgate H.F. (1991). “**Distributions of strain components and work within flexible pavement structures**”, In Transportation Research Record TRB, Issue 1307, pp. 39-50, Washington D.C, EUA.

Sowers G.F. and Vesic A.B. (1962). “**Vertical stresses in subgrades beneath statically loaded flexible pavements**”, In Transportation Research Board (TRB), No. 342, pp. 90-123, Washington D.C, EUA.

Sridharan A; Gandhi N.S.V.V.S.J and Suresh S. (1990). “**Stiffness coefficients of layered soil systems**”, *Journal of Geotechnical Engineering*, Issue 4, Volume 116, pp. 604-624.

---

Swift G. (1972). "**An Empirical equation for calculating deflections on the surface of a two layer elastic system**", Instituto de Transporte de Texas, Report No. 136-4, Texas, EUA.

Thenn de Barros S. (1966). "**Deflection factor charts for two and three-layer elastic systems**", In Transportation Research Board (TRB), No. 145, pp. 83-108, Washington D.C, EUA.

Thenn de Barros S. (1965). "**A Critical Review of present knowledge of the problem of rational thickness design of flexible pavements**", In Transportation Research Board (TRB), No. 71, pp. 105-127, Washington D.C, EUA.

Thenoux G. and Gaete R. (1999). "**Análisis mecanicista de estructuras de pavimentos utilizadas en Chile diseñadas por el método AASHTO-93**", 10° Congreso Ibero-Latinoamericano del Asfalto, Tomo II, Sesión G, Sevilla España.

Tutumluer E. and Barksdale R. (). "**Inverted Flexible Pavement Response and Performance**", In Transportation Research Record TRB, Issue 1482, pp. 102-110, Washington D.C, EUA.

Ueshita K. and Meyerhoff G.G. (1968). "**Surface displacement of an elastic layer under uniformly distributed loads**", In Transportation Research Board (TRB), No. 228, pp. 1-10, Washington D.C, EUA.

Ueshita K. and Meyerhof G.G. (1967). "**Elastic displacement of multilayer soil systems**", Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, No. 144, pp. 20-26, Japón.

Ueshita K. and Meyerhof G.G. (1967). "**Deflection of multilayer soil systems**", Journal of soil mechanics and foundation division (ASCE), Vol. 93, pp. 257-282, EUA.

Ullidtz P. and Forlag P. (1998). "**Modelling Flexible Pavement Response and Performance**", Technical University of Denmark, Narayana Press.

Vakili J. (2008). "**A simplified method for evaluation of pavement layers moduli using surface deflection data**", The 12<sup>th</sup> International Conference of

International Association for computer methods and advances in Geomechanics (IACMAG), Goa India.

Valle R. (1958). **“Carreteras, calles y aeropistas: Principios generales de la mecánica de suelos aplicados a la pavimentación y métodos para el cálculo de pavimentos flexibles”**, Editorial e Inmobiliaria “El Ateneo, Tercera edición, Buenos Aires, Argentina.

Van Gurp C. (1995). **“Characterization of seasonal influences on asphalt pavements with the use of falling weight deflectometers”**, Dienst Weg-en Waterbouwkunde, Holanda.

Vazquez L. (2007), “WINDEPAV 2.0: Interface en Windows del programa DEPAVF para el análisis de sistemas multicapa elásticos”, XVI Simposio Colombiano sobre Ingeniería de Pavimentos, Manizales, Colombia.

Verstraeten J. (1968). **“Stresses and displacements in elastic layered systems”**, Proceedings 2<sup>nd</sup> International Conference on the structural design of asphalt pavements, University of Michigan, pp. 227-290, Michigan EUA.

Vesic A. B. (1963). **“The validity of layered solid theories for flexible pavements”**, Proc., Inter. Conf. on the structural design of asphalt pavements, Univ. of Michigan.

Warren H. and Dieckmann W.L. (1963). **“Numerical computation of stresses and strains in a multiple-layered asphalt pavement design”**, California Research Corporation, 1-6 pp., Richmond, California.

WESLEA for Windows Version 3.0 (1999) developed by David Timm, Bjorn Birgisson and Dave Newcomb.

Westmann R.A. (1968). **“Stress analysis by finite elements”**, In Transportation Research Board (TRB), Bulletin 228, pp. 46-58, Washington D.C, EUA.

WinJULEA (Windows Jacob Uzan Layered Elastic Analysis) developed by Dr. Jacob Uzan, Technion University Israel.

Yanqui C. (1997). **“Cálculo aproximado de los esfuerzos en un sistema multicapa aplicado al diseño de pavimentos asfálticos”**, 9no Congreso Ibero-Latinoamericano del Asfalto (CILA), Asunción, Paraguay.

Yoder E.J. (1969). **“Selection of soil strength values for the design of flexible pavements”**, In Transportation Research Board (TRB), No. 7, pp. 1-13, Washington D.C, EUA.

Yoder E.J and Witczak M.W. (1975). **“Principles of Pavement Design”**, John Wiley & Sons, Second Edition, EUA.



# Anexos

---

## Anexo 1. Resolución de ecuaciones mediante la teoría elástica multicapa de Burmister (1943)

A manera de entender la complejidad de la resolución de las ecuaciones multicapa de Burmister vista y analizada en este documento, a continuación se presenta la solución matemática y los fundamentos de cálculo necesarios para desarrollar la solución exacta de los sistemas estructurales de pavimentos flexibles

La ecuación de compatibilidad para el comportamiento linealmente elástico de un cuerpo continuo en coordenadas cilíndricas es:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \varphi(r, z) = 0$$

O

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi(r, z) = 0$$

Donde:

$z$  = Eje vertical, positivo hacia abajo

$r$  = radio a partir del eje vertical en el plano horizontal

(Esfuerzos y deformaciones son constantes en el plano horizontal para cualquier  $r$  y  $z$ )

$\varphi(r, z)$  es la función esfuerzo que satisface las ecuaciones de equilibrio tal que:

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left( (2 - \nu) \nabla^2 \varphi(r, z) - \frac{\partial^2 \varphi(r, z)}{\partial z^2} \right)$$

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \varphi(r, z) - \frac{\partial^2 \varphi(r, z)}{\partial r^2} \right)$$

$$\sigma_t = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \varphi(r, z) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(r, z)}{\partial r} \right)$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left( (1 - \nu) \nabla^2 \varphi(r, z) - \frac{\partial^2 \varphi(r, z)}{\partial z^2} \right)$$

$$w = \frac{1 + \nu}{E} \left( 2(1 - \nu) \nabla^2 \varphi(r, z) - \frac{\partial^2 \varphi(r, z)}{\partial z^2} \right)$$

$$u = - \left( \frac{1 + \nu}{E} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi(r, z)}{\partial r \partial z} \right)$$

Donde:

$\sigma_z$  = Esfuerzo vertical o normal

$\sigma_r$  = Esfuerzo radial en el plano horizontal

$\sigma_t$  = Esfuerzo tangencial en el plano horizontal (perpendicular a  $\sigma_r$ )

$\tau_{rz}$  = Esfuerzo cortante

$w$  = Desplazamiento vertical (deflexión)

$u$  = Desplazamiento radial

$E$  = Módulo de Young

$\nu$  = Relación de Poisson

Cuando la función esfuerzo satisface la ecuación de compatibilidad se cumplen las siguientes condiciones:

- El Desplazamiento en todo el cuerpo es continuo;
- Cada parte elemental del cuerpo está en equilibrio; y
- El esfuerzo y al deformación están relacionadas con la Ley de Hooke.

La ecuación dada es correcta para las fuerzas internas del cuerpo como la gravedad pero no para los casos en que las fuerzas del cuerpo varían con  $r$  o  $z$ .

El problema ahora es encontrar una función de esfuerzo que satisfaga la ecuación de compatibilidad. Después de que se ha encontrado la función de esfuerzo, debe ser sustituida en las ecuaciones de esfuerzo y desplazamiento para obtener soluciones numéricas.

Para encontrar la función esfuerzo, se toma la transformación de Hankel de orden cero de la ecuación de compatibilidad. Esto reduce la ecuación de compatibilidad a una ecuación algebraica en la variable de transformación ( $\alpha$ ) y con diferenciales en  $z$ . El par de transformaciones de Hankel de orden cero es:

$$f_H(\alpha) = \int_0^{\infty} F(r) r J_0(\alpha r) dr$$

$$F(r) = \int_0^{\infty} f_H(\alpha) \alpha J_0(\alpha r) d\alpha$$

Donde  $J_0$  es la función de Bessel de orden cero.

La transformación de Hankel de la ecuación de compatibilidad es:

$$\begin{aligned} & \left( -\alpha^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \left( -\alpha^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) v_H(\alpha, z) = 0 \\ & \left( -\alpha^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \left( -\alpha^2 v_H(\alpha, z) + \frac{d^2 v_H(\alpha, z)}{dz^2} \right) = 0 \\ & \left( \alpha^4 v_H(\alpha, z) - 2\alpha^2 \frac{d^2 v_H(\alpha, z)}{dz^2} + \frac{d^4 v_H(\alpha, z)}{dz^4} \right) = 0 \end{aligned} \quad (A-1)$$

Donde  $v_H(\alpha, z)$  es la transformada de Hankel con respecto a  $r$ .

Al realizar las operaciones indicadas, se obtiene una ecuación diferencial ordinaria en  $z$

$$\frac{d^4 v_H(\alpha, z)}{dz^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 v_H(\alpha, z)}{dz^2} + \alpha^4 v_H(\alpha, z) = 0 \quad (A-2)$$

Ahora resolviendo mediante la Transformada de Laplace se obtiene

$$\begin{aligned} & s^4 v_H(\alpha, s) - s^3 v_H(\alpha, 0) - s^2 v_H'(\alpha, 0) - s v_H''(\alpha, 0) - v_H'''(\alpha, 0) \\ & - s^2 2\alpha^2 v_H(\alpha, s) + s 2\alpha^2 v_H(\alpha, 0) + 2\alpha^2 v_H'(\alpha, 0) \\ & + \alpha^4 v_H(\alpha, s) = 0 \end{aligned} \quad (A-3)$$

Donde  $v_H(\alpha, 0)$ ,  $v_H'(\alpha, 0)$ , etc., son las condiciones iniciales de  $v_H(\alpha, z)$ ,  $\frac{dv_H(\alpha, z)}{dz}$ , etc.

Por lo tanto:

$$(s^4 - 2\alpha^2 s^2 + \alpha^4) v_H(\alpha, s) = A^* s^3 + B^* s^2 + C^* s + D^* \quad (A-4)$$

$$\begin{aligned}
v_H(\alpha, 0) &= A^* \\
v'_H(\alpha, 0) &= B^* \\
v''_H(\alpha, 0) &= C^* + 2\alpha^2 A^* \\
v'''_H(\alpha, 0) &= D^* + 2\alpha^2 B^*
\end{aligned} \tag{A-5}$$

y

$$\begin{aligned}
v_H(\alpha, s) &= \frac{A^* s^3 + B^* s^2 + C^* s + D^*}{s^4 - 2\alpha^2 s^2 + \alpha^4} \\
&= \frac{A^* s^3 + B^* s^2 + C^* s + D^*}{(s^2 - \alpha^2)^2}
\end{aligned} \tag{A-6}$$

Resolviendo para cada término en el lado derecho y haciendo uso de identidades matemáticas se tiene:

$$\frac{s^3}{(s^2 - \alpha^2)^2} = \frac{1}{2(s - \alpha)} + \frac{1}{2(s + \alpha)} + \frac{\alpha}{4(s - \alpha)^2} - \frac{\alpha}{4(s + \alpha)^2}$$

y

$$\begin{aligned}
F(\alpha, z) &= \frac{1}{2}(e^{\alpha z} + e^{-\alpha z}) + \frac{1}{4}\alpha z(e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}) \\
&= \cosh(\alpha z) + \frac{1}{2}\alpha z \sinh(\alpha z)
\end{aligned}$$

Dadas:

$$\begin{aligned}
v_H(\alpha, z) &= \frac{A^*}{2}(e^{\alpha z} + e^{-\alpha z}) + \frac{A^* \alpha z}{4}(e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}) - \frac{B^*}{4\alpha}(e^{\alpha z} + e^{-\alpha z}) + \frac{B^* z}{4}(e^{\alpha z} + e^{-\alpha z}) \\
&\quad + \frac{C^* z}{4}(e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}) - \frac{D^*}{4\alpha}(e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}) + \frac{D^* z}{4}(e^{\alpha z} - e^{-\alpha z})
\end{aligned} \tag{A-7}$$

O, expresadas en funciones hiperbólicas:

$$\begin{aligned}
 v_H(\alpha, z) = & A^* \cosh(\alpha z) + \frac{A^* \alpha z}{2} \sinh(\alpha z) \\
 & - \frac{B^*}{2\alpha} \cosh(\alpha z) + \frac{(B^* + D^*)z}{2} \cosh(\alpha z) \\
 & - \frac{D^*}{2\alpha} \sinh(\alpha z) + \frac{C^* z}{2} \sinh(\alpha z)
 \end{aligned} \tag{A-8}$$

Sin embargo, dado que las constantes con asterisco son funciones indeterminadas de  $\alpha$ , la ecuación (A-8) se puede simplificar a:

$$v_H(\alpha, z) = Ae^{\alpha z} + Be^{-\alpha z} + Cze^{\alpha z} + Dze^{-\alpha z} \tag{A-9}$$

La función esfuerzo puede ahora encontrarse con la transformación inversa de Hankel:

$$\begin{aligned}
 \phi(r, z) = & \int_0^{\infty} v_H(\alpha, z) \alpha J_0(\alpha r) d\alpha \\
 = & \int_0^{\infty} (Ae^{\alpha z} + Be^{-\alpha z} + Cze^{\alpha z} + Dze^{-\alpha z}) \alpha J_0(\alpha r) d\alpha
 \end{aligned} \tag{A-10}$$

La ecuación (A-10) no tiene una solución analítica y debe resolverse numéricamente para los valores de  $\alpha$  y  $z$ . Las constantes A, B, C y D se encuentran a partir de las condiciones de entorno. Las constantes son funciones de  $\alpha$  y se deben encontrar nuevos valores en cada paso de la integración, lo que significa que no se puede usar la función esfuerzo de manera completa para encontrar las constantes. Sin embargo, todas las operaciones de la ecuación de compatibilidad se realizan dentro del signo integral de la función esfuerzo y cada parte elemental de la integración es, en sí misma una función de esfuerzo que satisface la ecuación de compatibilidad. El integrando, por lo tanto, puede ser sustituido en las ecuaciones de esfuerzo y desplazamiento para encontrar las constantes en cada valor de  $\alpha$ . Sustituir el integrando en las ecuaciones por esfuerzos verticales y cortantes y por desplazamientos verticales y radiales produce esfuerzos y desplazamientos “elementales”.

$$\begin{aligned}
\sigma_z^* &= \alpha^3 J_0(\alpha r) \left\{ [-A\alpha + C(1-2\nu-\alpha z)]e^{\alpha z} + [B\alpha + D(1-2\nu+\alpha z)]e^{-\alpha z} \right\} \\
\tau_{rz}^* &= \alpha^3 J_1(\alpha r) \left\{ [A\alpha + C(2\nu+\alpha z)]e^{\alpha z} + [B\alpha - D(2\nu-\alpha z)]e^{-\alpha z} \right\} \\
w^* &= \frac{1+\nu}{E} \alpha^2 J_0(\alpha r) \left\{ [-A\alpha + C(2-4\nu-\alpha z)]e^{\alpha z} - [B\alpha + D(2-4\nu+\alpha z)]e^{-\alpha z} \right\} \\
u^* &= \frac{1+\nu}{E} \alpha^2 J_1(\alpha r) \left\{ [A\alpha + C(1+\alpha z)]e^{\alpha z} - [B\alpha - D(1-\alpha z)]e^{-\alpha z} \right\}
\end{aligned} \tag{A-11}$$

Y los esfuerzos y desplazamientos completos, escritos y mostrados en la forma de Hankel son:

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= \int_0^\infty \alpha^2 \left\{ [-A\alpha + C(1-2\nu-\alpha z)]e^{\alpha z} + [B\alpha + D(1-2\nu+\alpha z)]e^{-\alpha z} \right\} \alpha J_0(\alpha r) d\alpha \\
\tau_{rz} &= \int_0^\infty \frac{\alpha^2 J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha r)} \left\{ [A\alpha + C(2\nu+\alpha z)]e^{\alpha z} + [B\alpha - D(2\nu-\alpha z)]e^{-\alpha z} \right\} \alpha J_0(\alpha r) d\alpha \\
w &= \frac{1+\nu}{E} \int_0^\infty \alpha \left\{ [-A\alpha + C(2-4\nu-\alpha z)]e^{\alpha z} - [B\alpha + D(2-4\nu+\alpha z)]e^{-\alpha z} \right\} \alpha J_0(\alpha r) d\alpha \\
u &= \frac{1+\nu}{E} \int_0^\infty \frac{\alpha J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha r)} \left\{ [A\alpha + C(1+\alpha z)]e^{\alpha z} - [B\alpha - D(1-\alpha z)]e^{-\alpha z} \right\} \alpha J_0(\alpha r) d\alpha
\end{aligned} \tag{A-12}$$

Teniendo en cuenta que la capa superior, que es un caso especial que tiene una carga circular vertical prescrita  $p(r)$  y esfuerzo de cizallamiento cero en la superficie, los esfuerzos completos cuando  $z = 0$  son:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \alpha^2 \{ -A\alpha + C(1-2\nu) + B\alpha + D(1-2\nu) \} \alpha J_0(\alpha r) d\alpha &= p(r) \\
\int_0^\infty \frac{\alpha^2 J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha r)} \{ A\alpha + 2C\nu + B\alpha - 2D\nu \} \alpha J_0(\alpha r) d\alpha &= 0
\end{aligned} \tag{A-13}$$

La transformada de Hankel de la carga circular  $q$  en el origen y radio  $a$  es (por tensión positiva):

$$H(p(r)) = -\frac{qa}{\alpha} J_1(\alpha a) \tag{A-14}$$

En consecuencia, las transformaciones de Hankel de las ecuaciones verticales y de tensión de corte en  $z = 0$  son:

$$\alpha^2(-A\alpha + C(1-2\nu) + B\alpha + D(1-2\nu)) = \frac{-qa}{\alpha} J_1(\alpha a) \quad (\text{A-15})$$

$$\frac{\alpha^2 J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha r)} (A\alpha + 2C\nu + B\alpha - 2D\nu) = 0$$

y:

$$-A\alpha + C(1-2\nu) + B\alpha + D(1-2\nu) = \frac{-qa}{\alpha^3} J_1(\alpha a) \quad (\text{A-16})$$

$$A\alpha + 2C\nu + B - 2D\alpha\nu = 0$$

Las constantes para la capa superior se expresan por lo tanto como funciones de  $P(\alpha a) = \frac{qa}{\alpha^3} J_1(\alpha a)$ , donde dos ecuaciones se pueden escribir en cuatro incógnitas (las constantes). Escribir las ecuaciones de esfuerzo y desplazamientos a cada lado de las interfaces restantes conduce a una serie de cuatro ecuaciones con ocho incógnitas (las constantes de las dos capas) que satisfacen las condiciones de contorno. Satisfacer las condiciones de contorno en cada interfaz relaciona las constantes de cada capa con las de la capa superior. Todas las constantes son por lo tanto funciones de  $P(\alpha a)$ . Al escribir las ecuaciones en forma de matriz y sintetizar la eliminación gaussiana, se puede mostrar que cada constante es un múltiplo simple de  $P(\alpha a)$ . Por lo tanto, si se desea, se puede mover a las ecuaciones de esfuerzos elementales y el primer elemento del vector del lado derecho se establece en un valor de uno.

Las condiciones de entorno para la parte inferior de la capa inferior, requieren un tratamiento especial de la misma manera que la parte superior de la capa superior. Si la capa inferior es de extensión infinita, se pueden encontrar dos de las constantes multiplicando las transformaciones de Hankel de las ecuaciones verticales y de tensión de corte por  $e^{-\alpha z}$ , y reorganizando:

$$\frac{H(\sigma_z)e^{-\alpha z}}{\alpha^2} = \left\{ -A\alpha + C(1-2\nu - \alpha z) + [B\alpha + D(1-2\nu + \alpha z)]e^{-2\alpha z} \right\} \quad (\text{A-17})$$

$$\frac{H(\tau_z)J_0(\alpha r)e^{-\alpha z}}{\alpha^2 J_1(\alpha r)} = A\alpha + C(2\nu + \alpha z) + [B\alpha - D(2\nu - \alpha z)]e^{-2\alpha z}$$





$$A + 2C\nu + B - 2D\nu = 0 \quad (\text{A-24})$$

El esfuerzo vertical es:

$$\sigma_z = \int_0^\infty \alpha^2 \left[ (-A + C(1 - 2\nu))e^{\alpha z} - C\alpha z e^{\alpha z} + (B + D(1 - 2\nu))e^{-\alpha z} + D\alpha z e^{-\alpha z} \right] \alpha J_0(\alpha r) d\alpha \quad (\text{A-25})$$

Para una solución cuando  $z = \infty$ ,  $A = C = 0$ , resolviendo las ecuaciones con las condiciones de frontera para B y D dadas:

$$B = -2\nu \frac{qa}{\alpha^3} J_1(\alpha a) \quad \text{and} \quad D = -\frac{qa}{\alpha^3} J_1(\alpha a) \quad (\text{A-26})$$

Sustituyendo dentro de la ecuación vertical de esfuerzo (A-25) y ajustando  $r = 0$  dado:

$$\sigma_z = -qa \int_0^\infty e^{-\alpha z} J_1(\alpha a) d\alpha - qa \int_0^\infty \alpha z e^{-\alpha z} J_1(\alpha a) d\alpha \quad (\text{A-27})$$

Usando las relaciones de Boussinesq:

$$\sigma_z = -qa \left( \frac{(z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} - z}{a(z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = -qa \left( \frac{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - z^3 - a^2 z}{a(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{az}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (\text{A-28})$$

y reorganizando:

$$\sigma_z = -q \left( 1 - \frac{z^3}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (\text{A-29})$$

que está de acuerdo con la solución de Boussinesq (A-22)



## Anexo 2. Tablas de Ahlvin y Ulery

Tabla 0.1 Función "A" del método de Ahlvin y Ulery (1962).

FUNCIÓN "A"																		
	r/a																	
z/a	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14
0	1	1	1	1	1	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.9005	0.89748	0.88679	0.86126	0.78797	0.43015	0.09645	0.02787	0.00856	0.00211	0.00084	0.00042						
0.2	0.80388	0.79824	0.77884	0.73483	0.63014	0.38269	0.15433	0.05251	0.0168	0.00419	0.00167	0.00083	0.00048	0.0003	0.0002			
0.3	0.71265	0.70518	0.68316	0.6269	0.52081	0.34375	0.17964	0.07199	0.0244	0.00622	0.0025							
0.4	0.62861	0.62015	0.59241	0.53767	0.44329	0.31048	0.18709	0.08593	0.03118									
0.5	0.55279	0.54403	0.51622	0.46448	0.3839	0.28156	0.18556	0.09499	0.03701	0.01013	0.00407	0.00209	0.00118	0.00071	0.00053	0.00025	0.00014	0.00009
0.6	0.4855	0.47691	0.45078	0.40427	0.33676	0.25588	0.17952	0.1001										
0.7	0.42654	0.41874	0.39491	0.35428	0.29833	0.21727	0.17124	0.10228	0.04558									
0.8	0.37531	0.36832	0.34729	0.31243	0.26581	0.21297	0.16206	0.01236										
0.9	0.33104	0.32492	0.30669	0.27707	0.23832	0.19488	0.15253	0.10094										
1	0.29289	0.28763	0.27005	0.24697	0.21468	0.17868	0.14329	0.09849	0.05185	0.01742	0.00761	0.00393	0.00226	0.00143	0.00097	0.0005	0.00029	0.00018
1.2	0.23178	0.22795	0.21662	0.1989	0.17626	0.15101	0.1257	0.09192	0.0526	0.01935	0.00871	0.00459	0.00269	0.00171	0.00115			
1.5	0.16795	0.16552	0.15877	0.14804	0.13436	0.11892	0.10296	0.08048	0.05116	0.02142	0.01013	0.00548	0.00325	0.0021	0.00141	0.00073	0.00043	0.00027
2	0.10557	0.10453	0.1014	0.09647	0.09011	0.08269	0.07471	0.06275	0.04496	0.02221	0.0116	0.00659	0.00399	0.00264	0.0018	0.00094	0.00056	0.00036
2.5	0.07152	0.07098	0.06947	0.06698	0.06373	0.05974	0.05555	0.0488	0.03787	0.02143	0.01221	0.00732	0.00463	0.00308	0.00214	0.00115	0.00068	0.00043
3	0.05132	0.05101	0.05022	0.04886	0.04707	0.04487	0.04241	0.03839	0.0315	0.0198	0.0122	0.0077	0.00505	0.00346	0.00242	0.00132	0.00079	0.00051
4	0.02986	0.02976	0.02907	0.02802	0.02832	0.02749	0.02651	0.0249	0.02193	0.01592	0.01109	0.00768	0.00536	0.00384	0.00282	0.0016	0.00099	0.00065
5	0.01942	0.01938				0.01835			0.01573	0.01249	0.00949	0.00708	0.00527	0.00394	0.00298	0.00179	0.00113	0.00075

6	0.01361					0.01307			0.01168	0.00983	0.00795	0.00628	0.00492	0.00384	0.00299	0.00188	0.00124	0.00084
7	0.01005					0.00976			0.00894	0.00784	0.00661	0.00548	0.00445	0.0036	0.00291	0.00193	0.0013	0.00091
8	0.00772					0.00755			0.00703	0.00635	0.00554	0.00472	0.00398	0.00332	0.00276	0.00189	0.00134	0.00094
9	0.00612					0.006			0.00566	0.0052	0.00466	0.00409	0.00353	0.00301	0.00256	0.00184	0.00133	0.00096
10								0.00477	0.00465	0.00438	0.00397	0.00352	0.00326	0.00273	0.00241			

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 0.2 Función "B" del método de Ahlvin y Ullery (1962).**

FUNCIÓN "B"																	
	r/a																
z/a	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	8	10	12	14
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.1	0.09850	0.10100	0.11130	0.13420	0.01880	0.05380	-0.07899	-0.02672	-0.00845	-0.00210	-0.00084	-0.00042					
0.2	0.18850	0.19300	0.20770	0.23520	0.25980	0.08510	-0.07759	-0.04448	-0.01593	-0.00412	-0.00166	-0.00083	-0.00024	-0.00010			
0.3	0.28360	0.26780	0.28010	0.29480	0.27250	0.10750	-0.04316	-0.04999	-0.02166	-0.00599	-0.00245						
0.4	0.32010	0.32250	0.32740	0.32270	0.26920	0.12400	-0.00766	-0.04535	-0.02522								
0.5	0.35770	0.35750	0.35320	0.33100	0.26230	0.13590	0.02165	-0.03455	-0.02651	-0.00991	-0.00388	-0.00199	-0.00116	-0.00049	-0.00025	-0.00014	-0.00009
0.6	0.37830	0.37530	0.36300	0.32820	0.25410	0.14440	0.04457	-0.02101									
0.7	0.38480	0.37960	0.36070	0.31920	0.24630	0.14980	0.06209	-0.00702	-0.02329								
0.8	0.38090	0.37400	0.35130	0.30690	0.23770	0.15290	0.07530	0.00614									
0.9	0.36960	0.36270	0.33730	0.29290	0.22890	0.15400	0.08507	0.01795									
1	0.35350	0.34550	0.32070	0.27810	0.21970	0.15350	0.09210	0.02814	-0.01005	-0.01115	-0.00608	-0.00344	-0.00210	-0.00092	-0.00048	-0.00028	-0.00018
1.2	0.31480	0.30730	0.28480	0.24830	0.20110	0.14910	0.10002	0.04378	0.00023	-0.00995	-0.00632	-0.00378	-0.00236	-0.00107			
1.5	0.25600	0.25020	0.23330	0.20690	0.17360	0.13730	0.10193	0.05745	0.01385	-0.00669	-0.00600	-0.00401	-0.00265	-0.00126	-0.00068	-0.00040	-0.00026
2	0.17880	0.18140	0.16640	0.15190	0.13370	0.11330	0.09254	0.06371	0.02836	0.00028	-0.00410	-0.00371	-0.00278	-0.00148	-0.00084	-0.00050	-0.00033
2.5	0.12800	0.12630	0.12120	0.11320	0.10290	0.09130	0.07896	0.06022	0.03429	0.00661	-0.00130	-0.00271	-0.00250	-0.00156	-0.00094	-0.00059	-0.00039
3	0.09480	0.09390	0.09090	0.08630	0.08030	0.07320	0.06551	0.05354	0.03511	0.01112	0.00157	-0.00134	-0.00192	-0.00151	-0.00099	-0.00065	-0.00046
4	0.05700	0.05660	0.05560	0.05380	0.05140	0.04770	0.04532	0.03995	0.03066	0.01515	0.00595	0.00155	-0.00029	-0.00109	-0.00094	-0.00068	-0.00050
5	0.03770	0.03760				0.03380			0.02474	0.01522	0.00810	0.00371	0.00132	-0.00043	-0.00070	-0.00068	-0.00049
6	0.02660					0.02460			0.01968	0.01380	0.00867	0.00496	0.00254	0.00028	-0.00037	-0.00047	-0.00045
7	0.01980					0.01860			0.01577	0.01204	0.00842	0.00547	0.00332	0.00093	0.00000	-0.00029	-0.00037
8	0.01526					0.01450			0.01279	0.01034	0.00779	0.00554	0.00372	0.00141	0.00035	-0.00008	-0.00025
9	0.01212					0.01170			0.01054	0.00880	0.00705	0.00533	0.00386	0.00178	0.00066	0.00012	-0.00012
10								0.00924	0.00879	0.00764	0.00631	0.00501	0.00382	0.00199			

**Tabla 0.3 Función "C" del método de Ahlvin y Ullery (1962).**

FUNCIÓN "C"																	
	r/a																
z/a	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	-0.04926	-0.0514	-0.059	-0.0771	-0.1211	0.02247	0.12007	0.04475	0.01536	0.00403	0.00164	0.00082					
0.2	-0.09429	-0.0976	-0.1087	-0.1298	-0.1455	0.02419	0.14896	0.07892	0.02951	0.00796	0.00325	0.00164	0.00094	0.00059	0.00039		
0.3	-0.13181	-0.1348	-0.1442	-0.1502	-0.1299	0.01988	0.13394	0.09816	0.04148	0.01169	0.00483						
0.4	-0.16008	-0.1619	-0.1652	-0.1599	-0.1117	0.01292	0.11014	0.10422	0.05067								
0.5	-0.17889	-0.1784	-0.175	-0.1563	-0.0983	0.00483	0.0873	0.10125	0.0569	0.01824	0.00778	0.00399	0.00231	0.00146	0.00098	0.0005	0.00029
0.6	-0.18915	-0.1866	-0.1734	-0.1493	-0.0897	-0.00304	0.06731	0.09313									
0.7	-0.19244	-0.1883	-0.1739	-0.1415	-0.0841	-0.01061	0.05028	0.08253	0.06129								
0.8	-0.19046	-0.1848	-0.1678	-0.1339	-0.0807	-0.0174	0.03582	0.07114									
0.9	-0.18481	-0.1784	-0.1602	-0.1266	-0.0783	-0.0234	0.02359	0.05993									
1	-0.17678	-0.1705	-0.1519	-0.12	-0.0763	-0.0284	0.01331	0.04939	0.05429	0.02726	0.01333	0.00726	0.00433	0.00278	0.00188	0.00098	0.00057
1.2	-0.15742	-0.1512	-0.1347	-0.1076	-0.0729	-0.0358	-0.0025	0.03107	0.04552	0.02791	0.01467	0.00824	0.00501	0.00324	0.00221		
1.5	-0.12801	-0.1228	-0.111	-0.0915	-0.0671	-0.0412	-0.017	0.01088	0.03154	0.02652	0.0157	0.00933	0.00585	0.00386	0.00266	0.00141	0.00083
2	-0.08944	-0.0849	-0.0798	-0.0693	-0.0556	-0.0414	-0.0269	-0.0078	0.01267	0.0207	0.01527	0.01013	0.00321	0.00462	0.00327	0.00179	0.00107
2.5	-0.06403	-0.0607	-0.0584	-0.0526	-0.0452	-0.0361	-0.028	-0.0154	0.00103	0.01384	0.01314	0.00987	0.00707	0.00506	0.00369	0.00209	0.00128
3	-0.04744	-0.0456	-0.0434	-0.0409	-0.0364	-0.0313	-0.0259	-0.0175	-0.0053	0.00792	0.0103	0.00888	0.00689	0.0052	0.00392	0.00232	0.00145
4	-0.02854	-0.0274	-0.0256	-0.0259	-0.0242	-0.0211	-0.0196	-0.0159	-0.0096	0.00038	0.00492	0.00602	0.00561	0.00476	0.00389	0.00254	0.00168
5	-0.01886	-0.0181				-0.0157			-0.0094	-0.0029	-0.0013	0.00329	0.00391	0.0038	0.00341	0.0025	0.00177
6	-0.01333					-0.0112			-0.0082	-0.0041	-0.0008	0.00129	0.00234	0.00272	0.00272	0.00227	0.00173
7	-0.0099					-0.009			-0.0068	-0.0042	-0.0018	-4E-05	0.00113	0.00174	0.002	0.00193	0.00161
8	-0.00763					-0.007			-0.0055	-0.0039	-0.0023	-0.0008	0.00029	0.00096	0.00134	0.00157	0.00143
9	-0.00607					-0.0042			-0.0045	-0.0035	-0.0024	-0.0012	-0.0003	0.00037	0.00082	0.00124	0.00122
10								-0.0038	-0.0037	-0.0031	-0.0023	-0.0014	-0.0006	0.0003	0.0004		

**Tabla 0.4 Función "D" del método de Ahlvin y Ullery (1962).**

FUNCIÓN "D"																	
z/a	r/a																
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	8	10	12	14
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.04926	0.04998	0.05235	0.05716	0.06687	0.07635	0.04108	0.01803	0.00691	0.00193	0.00080	0.00410					
0.2	0.09429	0.09552	0.09900	0.10546	0.11431	0.10932	0.07139	0.03444	0.01359	0.00384	0.00159	0.00081	0.00047	0.00020			
0.3	0.13181	0.13305	0.14051	0.14062	0.14267	0.12745	0.09078	0.04817	0.01982	0.00927	0.00238						
0.4	0.16008	0.16070	0.16229	0.16288	0.15756	0.13696	0.10248	0.05887	0.02545								
0.5	0.17889	0.17017	0.17826	0.17481	0.16403	0.14074	0.10894	0.06670	0.03039	0.00921	0.00390	0.00200	0.00116	0.00049	0.00025	0.00015	0.00009
0.6	0.18915	0.18867	0.18573	0.17887	0.16489	0.14137	0.11196	0.07212									
0.7	0.19244	0.19132	0.18679	0.17782	0.16229	0.13926	0.11237	0.07551	0.03801								
0.8	0.19046	0.18927	0.18348	0.17306	0.15714	0.13548	0.11115	0.07728									
0.9	0.18481	0.18349	0.17709	0.16635	0.15063	0.13067	0.10866	0.07788									
1	0.17678	0.17503	0.16886	0.16824	0.14344	0.13513	0.10540	0.07753	0.04456	0.01611	0.00250	0.00382	0.00224	0.00096	0.00050	0.00029	0.00018
1.2	0.15742	0.15618	0.15014	0.14073	0.12823	0.11340	0.09757	0.07484	0.04575	0.01796	0.00835	0.00446	0.00264	0.00114			
1.5	0.12801	0.12754	0.12237	0.11549	0.10657	0.09608	0.08491	0.06833	0.04539	0.01983	0.00970	0.00532	0.00320	0.00140	0.00073	0.00043	0.00027
2	0.08944	0.09080	0.08668	0.08273	0.07814	0.07187	0.06566	0.05589	0.04103	0.02098	0.01117	0.00643	0.00398	0.00179	0.00095	0.00056	0.00036
2.5	0.06403	0.06565	0.06284	0.06078	0.05777	0.05525	0.05069	0.04486	0.03502	0.02045	0.01183	0.00717	0.00457	0.00213	0.00115	0.00068	0.00052
3	0.04744	0.04834	0.04760	0.04548	0.04391	0.04195	0.03963	0.03606	0.02983	0.01904	0.01187	0.00755	0.00497	0.00242	0.00133	0.00080	0.00065
4	0.02854	0.02928	0.02996	0.02798	0.02724	0.02661	0.02568	0.02408	0.02110	0.01552	0.01087	0.00757	0.00533	0.00280	0.00160	0.00010	0.00077
5	0.01886	0.01950				0.01816			0.01535	0.01230	0.00939	0.00700	0.00523	0.00299	0.00180	0.00114	0.00086
6	0.01333					0.01351			0.01149	0.00976	0.00788	0.00625	0.00488	0.00301	0.00190	0.00124	0.00092
7	0.00990					0.00966			0.00899	0.00787	0.00662	0.00542	0.00445	0.00292	0.00192	0.00130	0.00096
8	0.00763					0.00759			0.00727	0.00641	0.00554	0.00477	0.00402	0.00275	0.00192	0.00131	0.00099
9	0.00607					0.00746			0.00601	0.00533	0.00470	0.00415	0.00358	0.00260	0.00187	0.00133	
10								0.00542	0.00506	0.00450	0.00398	0.00346	0.00319	0.00239			

Tabla 0.5 Función "E" del método de Ahlvin y Ullery (1962).

FUNCIÓN "E"																	
-------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

z/a	r/a																
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	8	10	12	14
0	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.34722	0.22222	0.12500	0.05556	0.03125	0.02000	0.01389	0.00781	0.00500	0.00347	0.00255
0.1	0.45025	0.44949	0.44698	0.44173	0.43008	0.39198	0.30445	0.20399	0.11806	0.05362	0.03045	0.01959					
0.2	0.40194	0.40043	0.39591	0.38660	0.36789	0.32802	0.26598	0.18633	0.11121	0.05170	0.02965	0.01919	0.01342	0.00762			
0.3	0.35633	0.35428	0.33809	0.33674	0.31578	0.28003	0.23311	0.16967	0.10450	0.04979	0.02886						
0.4	0.31431	0.31214	0.30541	0.29298	0.27243	0.24200	0.20526	0.15428	0.09801								
0.5	0.27639	0.27407	0.26732	0.25511	0.23639	0.21119	0.18168	0.14028	0.09180	0.04608	0.02727	0.01800	0.01272	0.00734	0.00475	0.00332	0.00246
0.6	0.24275	0.24247	0.23411	0.22289	0.20634	0.18520	0.16155	0.12759									
0.7	0.21327	0.21112	0.20535	0.19525	0.18093	0.16356	0.14421	0.11620	0.08027								
0.8	0.18765	0.18550	0.18049	0.17190	0.15977	0.14523	0.12928	0.10602									
0.9	0.16552	0.16337	0.15921	0.15179	0.14168	0.12954	0.11634	0.09686									
1	0.14645	0.14483	0.14610	0.13472	0.12618	0.11611	0.10510	0.08865	0.06552	0.03736	0.02352	0.01600	0.01157	0.00683	0.00450	0.00318	0.00246
1.2	0.11589	0.11435	0.11201	0.10741	0.10140	0.09431	0.08657	0.07476	0.05728	0.03425	0.02208	0.01527	0.01113	0.00640			
1.5	0.08398	0.08356	0.08159	0.07885	0.07517	0.07088	0.06611	0.05871	0.04703	0.03003	0.02008	0.01429	0.01049	0.00664	0.00450	0.00304	0.00228
2	0.05279	0.05105	0.05146	0.05034	0.04850	0.04675	0.04442	0.04078	0.03454	0.02410	0.01706	0.01248	0.00943	0.00590	0.00401	0.00290	0.00228
2.5	0.03576	0.03426	0.03489	0.03435	0.03360	0.03211	0.03150	0.02953	0.02599	0.01945	0.01447	0.01096	0.00850	0.00546	0.00038	0.00276	0.00210
3	0.02566	0.02519	0.02470	0.02491	0.02444	0.02389	0.02330	0.02216	0.02007	0.01585	0.01230	0.00962	0.00763	0.00505	0.00355	0.00263	0.00201
4	0.01493	0.01452	0.01495	0.01526	0.01446	0.01418	0.01395	0.01356	0.01281	0.01084	0.00900	0.00742	0.00612	0.00443	0.00313	0.00237	0.00185
5	0.00971	0.00927				0.00929			0.00873	0.00774	0.00673	0.00579	0.00495	0.00364	0.00275	0.00213	0.00168
6	0.00680					0.00632			0.00629	0.00574	0.00517	0.00457	0.00404	0.00309	0.00241	0.00192	0.00154
7	0.00503					0.00493			0.00466	0.00438	0.00404	0.00370	0.00330	0.00264	0.00213	0.00172	0.00140
8	0.00386					0.00377			0.00354	0.00344	0.00325	0.00297	0.00273	0.00228	0.00185	0.00166	0.00127
9	0.00306					0.00227			0.00225	0.00273	0.00264	0.00246	0.00229	0.00194	0.00163	0.00139	0.00116
10								0.00210	0.00220	0.00225	0.00221	0.00203	0.00200	0.00171			

Tabla 0.6 Función "F" del método de Ahlvin y Ullery (1962).

FUNCIÓN "F"

z/a	r/a																
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	8	10	12	14
0	0.50000	0.50000	0.50000	0.5000 0	0.5000 0	0.00000	-0.34720	0.22 220	0.1250 0	-0.05550	-0.03120	-0.02000	-0.01380	-0.00780	0.0050 0	0.0037 0	0.0025 0
0.1	0.45020	0.44790	0.43980	0.4195 0	0.3578 0	0.03810	-0.20800	0.17 610	0.1095 0	-0.05150	-0.02960	-0.01910					
0.2	0.40190	0.39780	0.38290	0.3482 0	0.2621 0	0.05460	-0.11160	0.13 380	0.0944 0	-0.04350	-0.02790	-0.01830	-0.01290	-0.00740			
0.3	0.35630	0.35090	0.34500	0.2901 0	0.2050 0	0.06370	-0.05340	0.09 760	0.0801 0	-0.04350	-0.02630						
0.4	0.31430	0.30800	0.28680	0.2446 0	0.1708 0	0.06840	-0.01810	0.06 830	0.0668 0								
0.5	0.27630	0.26990	0.24890	0.2093 0	0.1475 0	0.07030	0.00280	0.04 520	0.0547 0	-0.03590	-0.02320	-0.01590	-0.01150	-0.00680	0.0045 0	0.0031 0	0.0023 0
0.6	0.24270	0.23440	0.21660	0.1813 0	0.1304 0	0.07060	0.01790	0.02 740									
0.7	0.21320	0.20760	0.18950	0.1590 0	0.1174 0	0.06970	0.02700	0.01 390	0.0346 0								
0.8	0.18760	0.18280	0.16670	0.1405 0	0.1160 0	0.06770	0.03270	0.00 360									
0.9	0.16550	0.16150	0.14740	0.1252 0	0.0966 0	0.06530	0.03610	0.00 400									
1	0.14640	0.14280	0.12340	0.1122 0	0.0885 0	0.06250	0.03810	0.00 980	0.0136 0	-0.01990	-0.01590	-0.01200	-0.00930	-0.00580	0.0040 0	0.0028 0	0.0021 0
1.2	0.11589	0.11360	0.10460	0.0944 9	0.0748 6	0.05670	0.03913	0.01 716	0.0045 0	-0.01490	-0.01330	-0.01060	-0.00840	-0.00550			
1.5	0.08398	0.08196	0.07719	0.0691 8	0.0591 9	0.04804	0.36860	0.02 177	0.0041 3	-0.00879	-0.00995	-0.00870	-0.00723	-0.00495	0.0035 3	0.0026 1	0.0020 1
2	0.05279	0.05348	0.04994	0.0461 4	0.0416 2	0.03593	0.03089	0.02 197	0.0104 3	-0.00189	-0.00546	-0.00589	-0.00544	-0.00410	0.0030 7	0.0023 3	0.0018 3
2.5	0.03576	0.03730	0.03459	0.0326 3	0.0301 4	0.02762	0.02406	0.01 927	0.0118 8	0.00198	-0.00226	-0.00340	-0.00386	-0.00332	0.0026 3	0.0020 8	0.0016 6
3	0.02560	0.02586	0.02255	0.0239 5	0.0226 3	0.02097	0.01911	0.01 623	0.0114 4	0.00396	-0.00010	-0.00192	-0.00258	-0.00263	0.0022 3	0.0018 3	0.0015 0
4	0.01493	0.01536	0.01412	0.0125 9	0.0138 6	0.01331	0.01256	0.01 134	0.0091 2	0.00508	0.00209	0.00026	-0.00076	-0.00148	0.0015 3	0.0013 7	0.0012 0
5	0.00971	0.01011				0.00905			0.0070 0	0.00475	0.00277	0.00129	0.00031	-0.00066	0.0009 6	0.0009 9	0.0009 3
6	0.00680					0.00675			0.0053 8	0.00409	0.00278	0.00170	0.00088	-0.00010	0.0005	0.0006	0.0007

															3	6	0
7	0.00503					0.00483		0.00428	0.00346	0.00258	0.00178	0.00114	0.00027	0.00020	-	-	-
8	0.00386					0.00380		0.00350	0.00291	0.00229	0.00174	0.00125	0.00048	0.00003	0.00020	-	-
9	0.00306					0.00374		0.00291	0.00247	0.00203	0.00163	0.00124	0.00062	0.00020	0.00005	-	-
10							0.00267	0.00246	0.00231	0.00176	0.00149	0.00126	0.00070				

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 0.7 Función "G" del método de Ahlvin y Ullery (1962).**

FUNCIÓN "G"																	
	r/a																
z/a	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	8	10	12	14
0	0.0000 0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.31 831	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.0000 0	0.0000 0	0.0000 0	0.0000 0	0.00000	0.0000 0
0.1	0.0000 0	0.00315	0.00802	0.01951	0.06682	0.31 405	0.05555	0.00865	0.00159	0.00023	0.00007	0.0000 3					
0.2	0.0000 0	0.01163	0.02877	0.06441	0.16214	0.30 474	0.13592	0.03060	0.00614	0.00091	0.00026	0.0001 0	0.0000 5	0.0002 0			
0.3	0.0000 0	0.02301	0.05475	0.11072	0.21465	0.29 228	0.18216	0.05747	0.01302	0.00201	0.00059						
0.4	0.0000 0	0.03460	0.07883	0.14477	0.23442	0.27 779	0.20195	0.08233	0.02138								
0.5	0.0000 0	0.04429	0.09618	0.16426	0.23652	0.26 216	0.20731	0.10185	0.03033	0.00528	0.00158	0.0006 3	0.0003 0	0.0009 0	0.0000 4	0.00002	0.0000 1
0.6	0.0000 0	0.04966	0.10729	0.17192	0.22949	0.24 574	0.20496	0.11541									
0.7	0.0000 0	0.05484	0.11256	0.17126	0.21772	0.22 924	0.19840	0.12373	0.04718								
0.8	0.0000 0	0.05590	0.11225	0.16534	0.20381	0.21 295	0.18653	0.12855									
0.9	0.0000 0	0.05496	0.10856	0.15628	0.18904	0.19 712	0.17945	0.28881									
1	0.0000 0	0.05266	0.10274	0.14566	0.17419	0.18 198	0.16884	0.12745	0.06434	0.01646	0.00555	0.0023 3	0.0011 3	0.0003 6	0.0001 5	0.00007	0.0000 4
1.2	0.0000 0	0.04585	0.08831	0.12323	0.14615	0.15 408	0.14755	0.12045	0.06967	0.02077	0.00743	0.0032 0	0.0015 9	0.0005 1			
1.5	0.0000 0	0.03485	0.06688	0.09293	0.11071	0.11 904	0.11830	0.12038	0.07075	0.02599	0.01021	0.0046 0	0.0023 3	0.0007 8	0.0003 3	0.00016	0.0000 9
2	0.0000 0	0.02102	0.04069	0.05721	0.06948	0.07 738	0.08067	0.10477	0.06275	0.03062	0.01409	0.0069 2	0.0036 9	0.0012 9	0.0005 5	0.00027	0.0001 5
2.5	0.0000 0	0.01293	0.02534	0.03611	0.04484	0.05 119	0.05509	0.07804	0.05117	0.03099	0.01650	0.0088 6	0.0049 9	0.0018 5	0.0008 2	0.00041	0.0002 3
3	0.0000 0	0.00840	0.01638	0.02376	0.02994	0.03 485	0.03843	0.05668	0.04039	0.02886	0.01745	0.0102 2	0.0061 0	0.0024 1	0.0011 0	0.00057	0.0003 2
4	0.0000 0	0.00382	0.00772	0.01149	0.01480	0.01 764	0.02004	0.04124	0.02475	0.02215	0.01639	0.0111 8	0.0074 5	0.0034 0	0.0016 7	0.00090	0.0005 2
5	0.0000 0	0.00214				0.00 992		0.02271	0.01551	0.01601	0.01364	0.0110 5	0.0082 0	0.0040 4	0.0021 6	0.00122	0.0007 3
6	0.0000 0					0.00 602		0.01343	0.01014	0.01148	0.01082	0.0091 7	0.0073 3	0.0043 2	0.0024 3	0.00150	0.0009 2
7	0.0000 0					0.00 396		0.00845	0.00687	0.00830	0.00842	0.0077 0	0.0065 6	0.0043 2	0.0027 2	0.00171	0.0011 0
8	0.0000 0					0.00 270			0.00481	0.00612	0.00646	0.0063 1	0.0056 8	0.0041 3	0.0027 8	0.00185	0.0012 4
9	0.0000 0					0.00 177			0.00347	0.00459	0.00513	0.0051 5	0.0048 5	0.0038 1	0.0027 4	0.00192	0.0013 3
10	0.0000 0							0.00199	0.00258	0.00351	0.00407	0.0042 0	0.0041 1	0.0034 6			

**Tabla 0.8 Función "H" del método de Ahlvin y Ullery (1962).**

FUNCIÓN "H"																	
	r/a																
z/a	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	8	10	12	14
0	2.0000	1.97987	1.91751	1.80575	1.62553	1.27319	0.93676	0.71185	0.51671	0.33815	0.25200	0.20045	0.16626	0.12576	0.09918	0.08346	0.07023
0.1	1.80998	1.79018	1.72886	1.61961	1.44711	1.18107	0.92670	0.70888	0.51627	0.33794	0.25184	0.20081					
0.2	1.63961	1.62068	1.56242	1.46001	1.30614	1.09996	0.90098	0.70074	0.51382	0.33726	0.25120	0.20072	0.16688	0.12512			
0.3	1.48806	1.47044	1.40979	1.32442	1.19210	1.02740	0.86726	0.68823	0.50966	0.33638	0.25124						
0.4	1.35407	1.33802	1.28963	1.20822	1.09555	0.96202	0.83042	0.67238	0.50412								
0.5	1.23607	1.22176	1.17894	1.10830	1.01312	0.90298	0.79308	0.65429	0.49728	0.33293	0.24996	0.19982	0.16668	0.12493	0.09996	0.08295	0.07123
0.6	1.13238	1.11998	1.08350	1.02154	0.94120	0.84917	0.75653	0.63469									
0.7	1.04131	1.03037	0.99794	0.91049	0.87742	0.80030	0.72143	0.61442	0.48061								
0.8	0.96125	0.95175	0.92386	0.87928	0.82136	0.75571	0.68809	0.59398									
0.9	0.89072	0.88251	0.85856	0.82616	0.77950	0.71495	0.65677	0.57361									
1	0.82843	0.85005	0.80456	0.76809	0.72587	0.67769	0.62701	0.55364	0.45122	0.31877	0.24386	0.19673	0.16516	0.12394	0.09952	0.08292	0.07104
1.2	0.72410	0.71882	0.70370	0.67937	0.64814	0.61187	0.57329	0.51552	0.43013	0.31162	0.24070	0.19520	0.16369	0.12350			
1.5	0.60555	0.60233	0.57246	0.57633	0.55559	0.53138	0.50496	0.46379	0.39872	0.29945	0.23495	0.19053	0.16199	0.12281	0.09876	0.08270	0.07064
2	0.47214	0.47022	0.44512	0.45656	0.44502	0.43202	0.41702	0.39242	0.35054	0.27740	0.22418	0.18618	0.15846	0.12124	0.09792	0.08196	0.07026
2.5	0.38518	0.38403	0.38098	0.37608	0.36940	0.36155	0.35243	0.33698	0.30913	0.25550	0.21208	0.17898	0.15395	0.11928	0.09700	0.08115	0.06980
3	0.32457	0.32403	0.32184	0.31887	0.31464	0.30969	0.30381	0.29364	0.27453	0.23487	0.19977	0.17154	0.14919	0.11694	0.09558	0.08061	0.06897
4	0.24620	0.24588	0.24820	0.25128	0.24168	0.23932	0.23668	0.23164	0.22188	0.19908	0.17640	0.15596	0.13864	0.11172	0.09300	0.07864	0.06848
5	0.19805	0.19785				0.19455			0.18450	0.17080	0.15575	0.14130	0.12785	0.10585	0.08915	0.07675	0.06695
6	0.16554					0.16326			0.15750	0.14868	0.13842	0.12792	0.11778	0.09990	0.08562	0.07452	0.06522
7	0.14217					0.14077			0.13699	0.13097	0.12404	0.11620	0.10843	0.09387	0.08197	0.07210	0.06377
8	0.12448					0.12352			0.12112	0.11680	0.11176	0.10600	0.09976	0.08885	0.07800	0.06928	0.06200
9	0.11079					0.10989			0.10854	0.10548	0.10161	0.09792	0.09234	0.08289	0.07407	0.06678	0.05976
10								0.09900	0.09820	0.09510	0.09290	0.08980	0.08300	0.07710			

Anexo 3. Tablas Jones

Tabla 0.9 Factores de esfuerzo de Jones (1962).

		k1 =2				k1 =20				k1 =200				
H	k2	A	ZZ1	ZZ2	(ZZ1-RR1)	(ZZ2-RR2)	ZZ1	ZZ2	(ZZ1-RR1)	(ZZ2-RR2)	ZZ1	ZZ2	(ZZ1-RR1)	(ZZ2-RR2)
0.125	2	0.1	0.42950	0.00896	0.70622	0.01716	0.14529	0.00810	1.81178	0.01542	0.03481	0.00549	3.02259	0.00969
		0.2	0.78424	0.03493	0.97956	0.06647	0.38799	0.03170	3.76886	0.06003	0.11491	0.02167	8.02452	0.03812
		0.4	0.98044	0.12667	0.70970	0.23531	0.78651	0.11650	5.16717	0.21640	0.33218	0.08229	17.64175	0.14286
		0.8	0.99434	0.36932	0.22319	0.63003	1.02218	0.34941	3.43631	0.60493	0.72695	0.27307	27.27701	0.45208
		1.6	0.99364	0.72113	-0.19982	0.97707	0.99060	0.69014	1.15211	0.97146	1.00203	0.63916	23.38638	0.90861
		3.2	0.99922	0.96148	-0.28916	0.84030	0.99893	0.93487	-0.06894	0.88358	1.00828	0.92560	11.87014	0.91469
	20	0.1	0.43022	0.00228	0.69332	0.03467	0.14447	0.00182	1.80664	0.02985	0.03336	0.00128	3.17763	0.01980
		0.2	0.78414	0.00899	0.92086	0.13541	0.38469	0.00716	3.74573	0.11697	0.10928	0.00509	8.66097	0.07827
		0.4	0.97493	0.03392	0.46583	0.49523	0.77394	0.02710	5.05489	0.43263	0.31094	0.01972	20.12259	0.29887
		0.8	0.97806	0.11350	-0.66535	1.49612	0.98610	0.09061	2.92533	1.33736	0.65934	0.07045	36.29943	1.01694
		1.6	0.96921	0.31263	-2.82859	3.28512	0.93712	0.24528	-1.27093	2.99215	0.87931	0.20963	49.40857	2.64313
		3.2	0.98591	0.68433	-5.27906	5.05952	0.96330	0.55490	-7.35384	5.06489	0.93309	0.49938	57.84369	4.89895
0.250	2	0.1	0.15524	0.00710	0.28362	0.01353	0.04381	0.00530	0.63215	0.00962	0.00909	0.00259	0.96553	0.00407
		0.2	0.42809	0.02783	0.70225	0.05278	0.14282	0.02091	1.83766	0.03781	0.03269	0.01027	3.10763	0.01611
		0.4	0.77939	0.10306	0.96634	0.19178	0.37882	0.07933	3.86779	0.14159	0.10684	0.04000	8.37852	0.06221
		0.8	0.96703	0.31771	0.66885	0.55211	0.75904	0.26278	5.50796	0.44710	0.30477	0.14513	18.95534	0.21860
		1.6	0.98156	0.66753	0.17331	0.95080	0.98743	0.61673	4.24281	0.90115	0.66786	0.42940	31.18909	0.58553
		3.2	0.99840	0.93798	-0.05691	0.89390	1.00064	0.91258	1.97494	0.93254	0.98447	0.84545	28.98500	0.89191
	20	0.1	0.15436	0.00179	0.25780	0.02728	0.04236	0.00123	0.65003	0.01930	0.00776	0.00065	1.08738	0.00861
		0.2	0.42462	0.00706	0.67115	0.10710	0.13708	0.00488	1.90693	0.07623	0.02741	0.00257	3.59448	0.03421
		0.4	0.76647	0.02697	0.84462	0.39919	0.35716	0.01888	4.13976	0.29072	0.08634	0.01014	10.30923	0.13365
		0.8	0.92757	0.09285	0.21951	1.26565	0.68947	0.06741	6.48948	0.98565	0.23137	0.03844	26.41442	0.49135

		1.6	0.91393	0.26454	-1.22411	2.94860	0.85490	0.20115	6.95639	2.55231	0.46835	0.13148	57.46409	1.53833
		3.2	0.95243	0.60754	-3.04320	4.89878	0.90325	0.48647	6.05854	4.76234	0.71083	0.37342	99.29034	3.60964

Fuente: Elaboración propia.

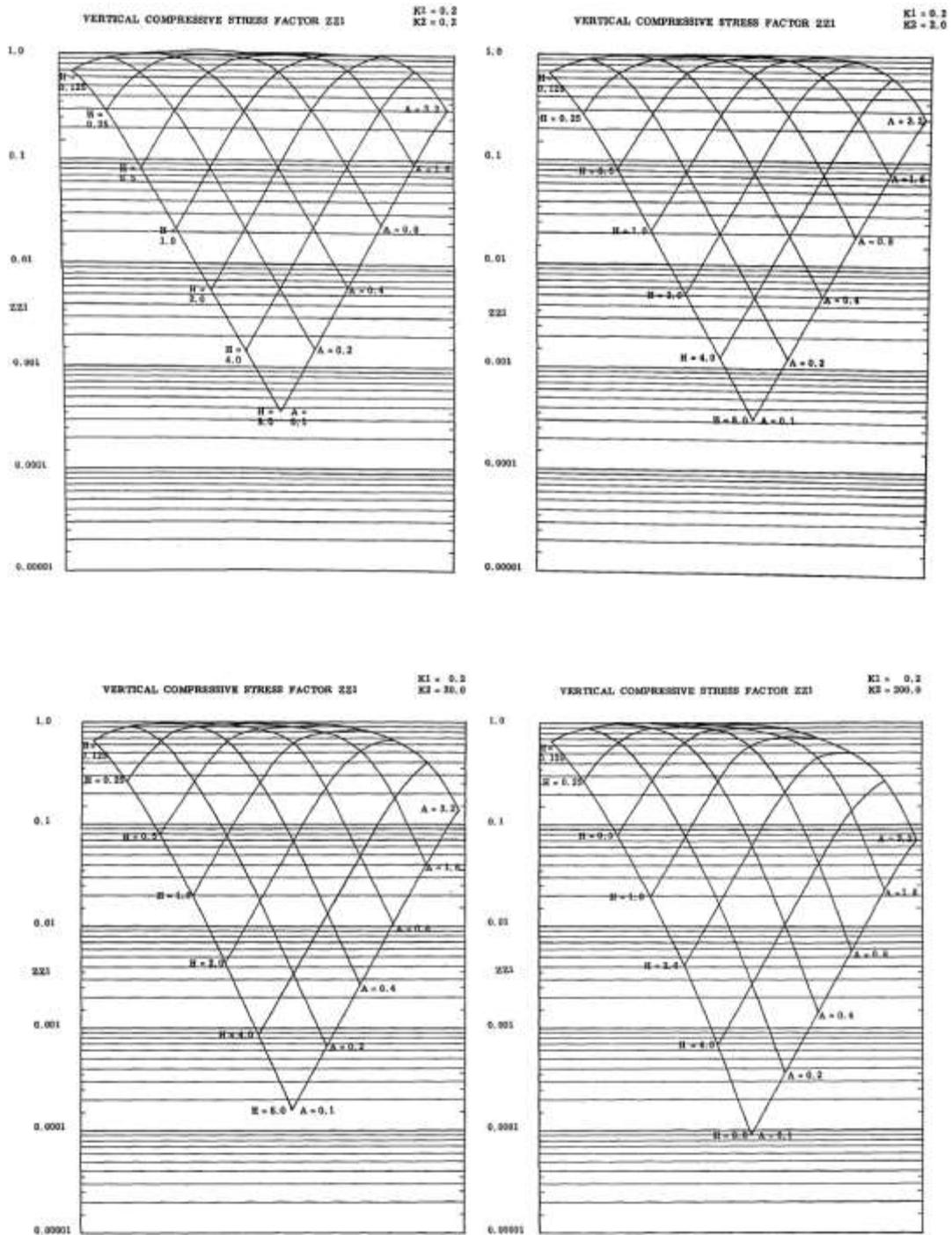
**Tabla 0.10 Factores de esfuerzo de Jones (1962) (Continuación).**

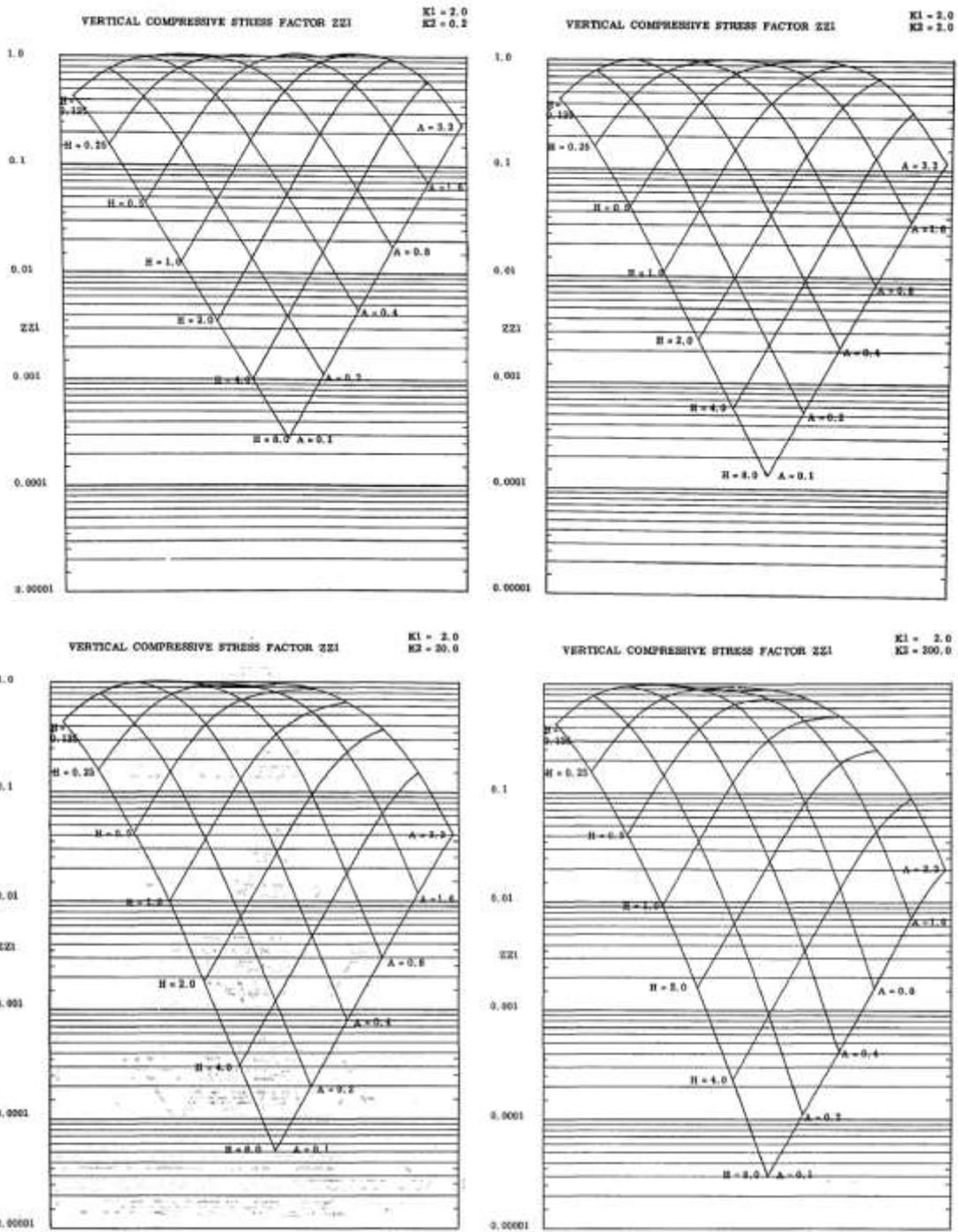
H	k2	A	k1 =2				k1 =20				k1 =200			
			ZZ1	ZZ2	(ZZ1-RR1)	(ZZ2-RR2)	ZZ1	ZZ2	(ZZ1-RR1)	(ZZ2-RR2)	ZZ1	ZZ2	(ZZ1-RR1)	(ZZ2-RR2)
0.50	2	0.1	0.04330	0.00465	0.08250	0.00878	0.01122	0.00259	0.17997	0.00440	0.00215	0.00094	0.26620	0.00128
		0.2	0.15325	0.01836	0.28318	0.03454	0.04172	0.01028	0.64779	0.01744	0.00826	0.00373	0.98772	0.00509
		0.4	0.42077	0.06974	0.70119	0.12954	0.13480	0.03998	1.89817	0.06722	0.02946	0.01474	3.19580	0.01996
		0.8	0.75683	0.23256	0.96681	0.41187	0.35175	0.14419	4.09592	0.23476	0.09508	0.05622	8.71973	0.07434
		1.6	0.93447	0.56298	0.70726	0.85930	0.70221	0.42106	6.22002	0.62046	0.27135	0.19358	20.15765	0.23838
		3.2	0.98801	0.88655	0.33878	0.96353	0.97420	0.82256	5.41828	0.93831	0.62399	0.52912	34.25229	0.54931
	20	0.1	0.04193	0.00117	0.08044	0.01778	0.00990	0.00063	0.19872	0.00911	0.00149	0.00023	0.31847	0.00257
		0.2	0.14808	0.00464	0.27574	0.07027	0.03648	0.00251	0.72264	0.03620	0.00564	0.00094	1.19598	0.01025
		0.4	0.40086	0.01799	0.67174	0.26817	0.11448	0.00988	2.19520	0.14116	0.01911	0.00372	1.02732	0.04047
		0.8	0.69098	0.06476	0.86191	0.91168	0.27934	0.03731	5.24726	0.51585	0.05574	0.01453	12.00885	0.15452
		1.6	0.79338	0.19803	0.39588	2.38377	0.50790	0.12654	10.30212	1.59341	0.13946	0.05399	32.77028	0.53836
		3.2	0.85940	0.49238	-0.41078	4.47022	0.70903	0.35807	16.38520	3.69109	0.30247	0.18091	77.62943	1.56409
1	2	0.1	0.01083	0.00241	0.02179	0.00453	0.00263	0.00100	0.04751	0.00160	0.00049	0.00029	0.06883	0.00035
		0.2	0.04176	0.00958	0.08337	0.01797	0.01029	0.00347	0.18481	0.00637	0.00195	0.00116	0.26966	0.00138
		0.4	0.14665	0.03724	0.28491	0.06934	0.03810	0.01565	0.66727	0.02498	0.00746	0.00460	1.00131	0.00545
		0.8	0.39942	0.13401	0.71341	0.24250	0.12173	0.05938	1.97428	0.09268	0.02647	0.01797	3.24971	0.02092
		1.6	0.71032	0.38690	1.02680	0.63631	0.31575	0.20098	4.37407	0.29253	0.08556	0.06671	8.92442	0.07335
		3.2	0.92112	0.75805	0.90482	0.97509	0.66041	0.53398	6.97695	0.65446	0.25186	0.22047	20.83387	0.21288
	20	0.1	0.00963	0.00061	0.02249	0.00920	0.00193	0.00024	0.05737	0.00322	0.00027	0.00007	0.08469	0.00062
		0.2	0.03697	0.00241	0.08618	0.03654	0.00751	0.00098	0.22418	0.01283	0.00104	0.00028	0.33312	0.00248
		0.4	0.12805	0.00950	0.29640	0.14241	0.02713	0.00387	0.82430	0.05063	0.00384	0.00110	1.25495	0.00985
		0.8	0.33263	0.03578	0.76292	0.51815	0.08027	0.01507	2.59672	0.19267	0.01236	0.00436	4.26100	0.03825
		1.6	0.52721	0.12007	1.25168	1.56503	0.17961	0.05549	6.77014	0.66326	0.03379	0.01683	12.91809	0.13989
		3.2	0.65530	0.33669	1.70723	3.51128	0.34355	0.18344	15.23252	1.88634	0.08859	0.06167	36.04291	0.45544

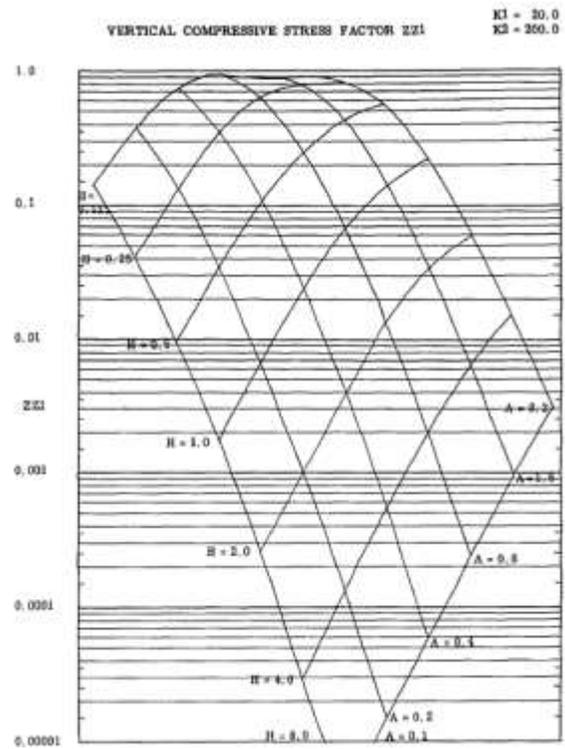
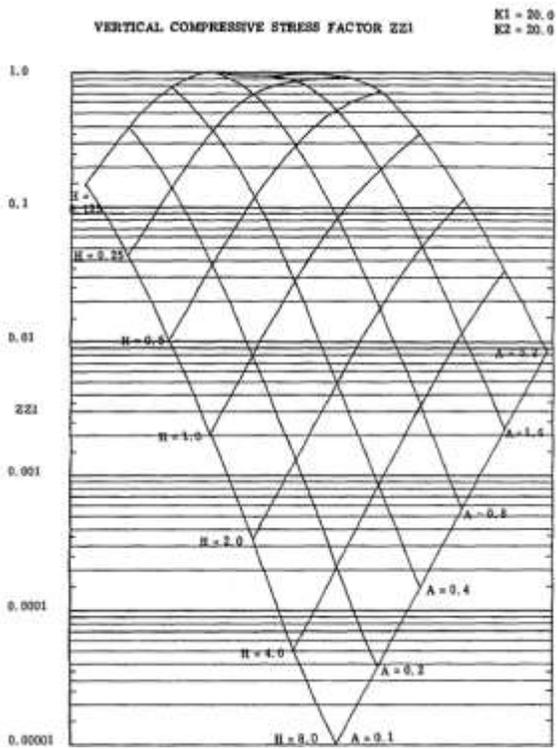
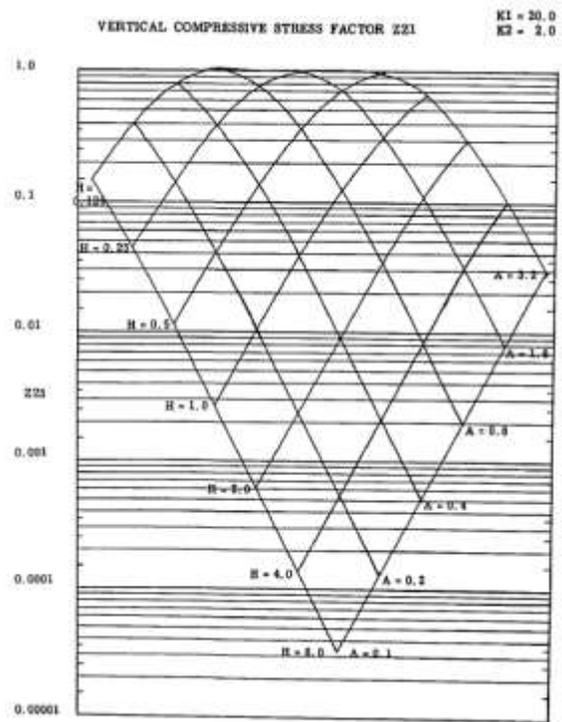
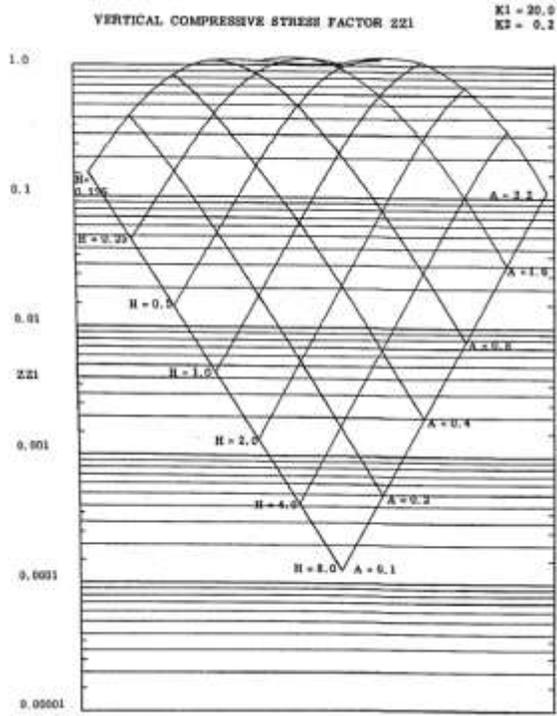
**Tabla 0.11 Factores de esfuerzo de Jones (1962) (Continuación).**

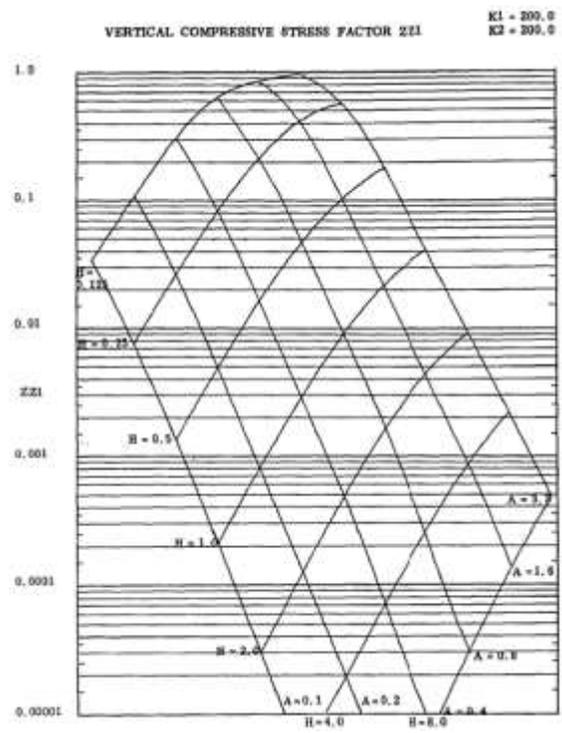
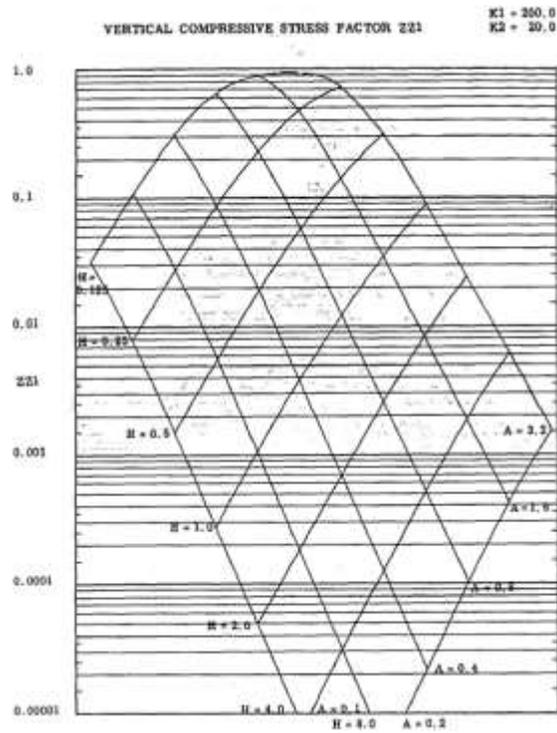
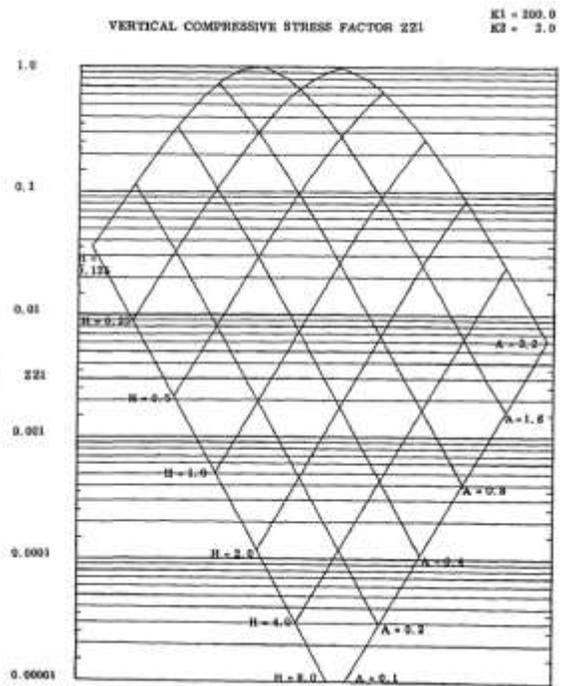
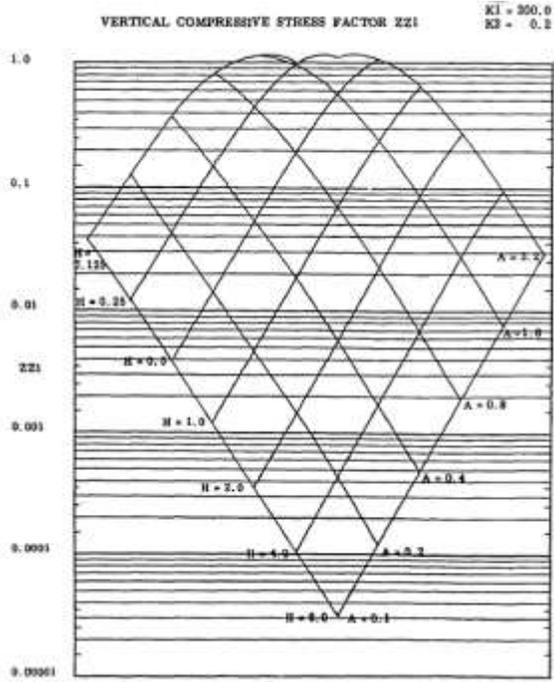
H	k2	A	k1 =2				k1 =20				k1 =200			
			ZZ1	ZZ2	(ZZ1-RR1)	(ZZ2-RR2)	ZZ1	ZZ2	(ZZ1-RR1)	(ZZ2-RR2)	ZZ1	ZZ2	(ZZ1-RR1)	(ZZ2-RR2)
2	2	0.1	0.00250	0.00100	0.00555	0.00188	0.00059	0.00033	0.01219	0.00051	0.00011	0.00008	0.01737	0.00009
		0.2	0.00991	0.00397	0.02199	0.00750	0.00235	0.00130	0.04843	0.00203	0.00045	0.00033	0.06913	0.00036
		0.4	0.03832	0.01569	0.08465	0.02950	0.00922	0.00518	0.18857	0.00803	0.00179	0.00131	0.27103	0.00142
		0.8	0.13516	0.05974	0.29365	0.11080	0.03412	0.02023	0.68382	0.03093	0.00685	0.00520	1.00808	0.00553
		1.6	0.36644	0.20145	0.75087	0.35515	0.10918	0.07444	2.04134	0.10864	0.02441	0.02003	3.27590	0.02043
		3.2	0.67384	0.51156	1.17294	0.77434	0.29183	0.23852	4.60426	0.30709	0.08061	0.07248	9.02195	0.06638
	20	0.1	0.00181	0.00025	0.00652	0.00378	0.00033	0.00008	0.01568	0.00094	0.00005	0.00002	0.02160	0.00014
		0.2	0.00716	0.00099	0.02586	0.01507	0.00130	0.00031	0.06236	0.00374	0.00018	0.00007	0.08604	0.00058
		0.4	0.02746	0.00394	0.10017	0.05958	0.00503	0.00123	0.24425	0.01486	0.00071	0.00030	0.33866	0.00229
		0.8	0.09396	0.01535	0.35641	0.22795	0.01782	0.00485	0.90594	0.05789	0.00261	0.00119	1.27835	0.00901
		1.6	0.23065	0.05599	1.00785	0.78347	0.05012	0.01862	2.91994	0.21190	0.00819	0.00467	4.35311	0.03390
		3.2	0.37001	0.17843	2.16033	2.13215	0.11331	0.06728	7.95104	0.67732	0.02341	0.01784	13.26873	0.11666
4	2	0.1	0.00057	0.00034	0.00147	0.00065	0.00013	0.00010	0.00312	0.00015	0.00003	0.00002	0.00437	0.00002
		0.2	0.00228	0.00137	0.00587	0.00260	0.00054	0.00039	0.01245	0.00029	0.00011	0.00009	0.01746	0.00009
		0.4	0.00905	0.00544	0.02324	0.01032	0.00214	0.00154	0.04944	0.00235	0.00042	0.00036	0.06947	0.00036
		0.8	0.03500	0.02135	0.08957	0.04031	0.00837	0.00610	0.19247	0.00924	0.00168	0.00142	0.27221	0.00144
		1.6	0.12354	0.07972	0.31215	0.14735	0.03109	0.02358	0.69749	0.03488	0.00646	0.00560	1.01140	0.00553
		3.2	0.34121	0.25441	0.81908	0.43632	0.10140	0.08444	2.09049	0.11553	0.02332	0.02126	3.28913	0.01951
	20	0.1	0.00030	0.00008	0.00201	0.00128	0.00005	0.00002	0.00413	0.00025	0.00001	0.00000	0.00545	0.00003
		0.2	0.00119	0.00034	0.00803	0.00510	0.00021	0.00009	0.01651	0.00099	0.00003	0.00002	0.02178	0.00014
		0.4	0.00469	0.00134	0.03191	0.02032	0.00083	0.00035	0.06569	0.00396	0.00013	0.00008	0.08673	0.00054
		0.8	0.01790	0.00532	0.12427	0.07991	0.00321	0.00138	0.25739	0.01565	0.00050	0.00031	0.34131	0.00215
		1.6	0.06045	0.02049	0.45100	0.29991	0.01130	0.00542	0.95622	0.05993	0.00186	0.00124	1.28773	0.00833
		3.2	0.14979	0.07294	1.36427	0.97701	0.03258	0.02061	3.10980	0.20906	0.00612	0.00483	4.38974	0.03010

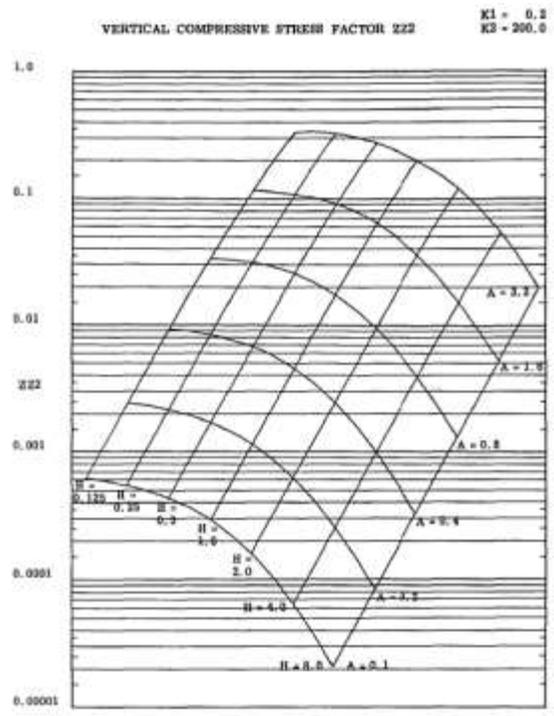
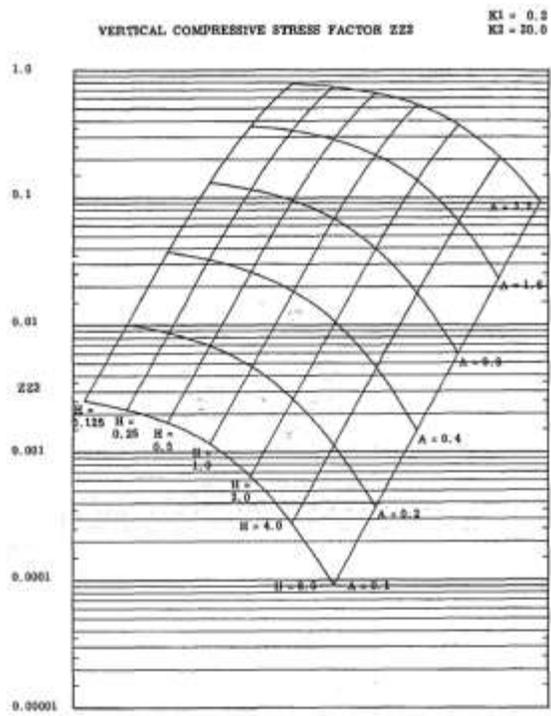
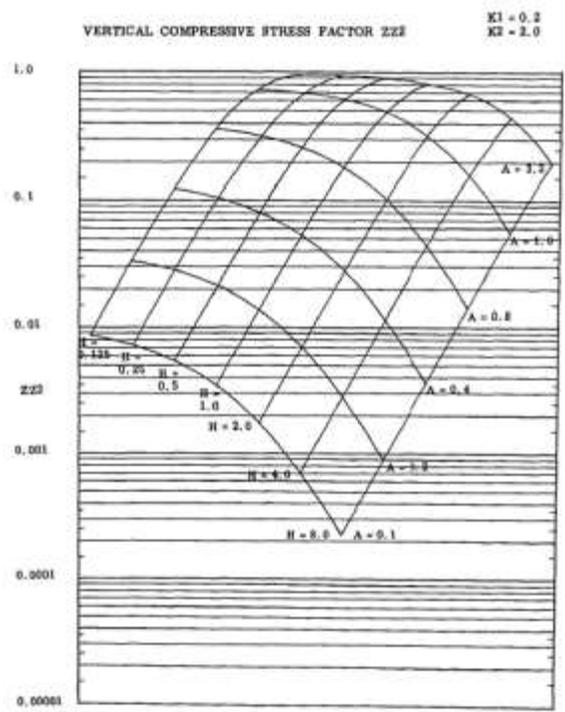
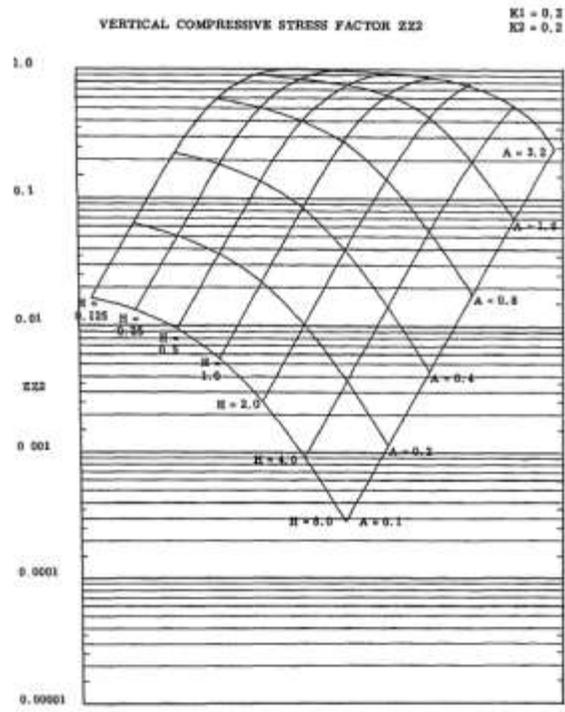
Anexo 4. Gráficos de Peattie.

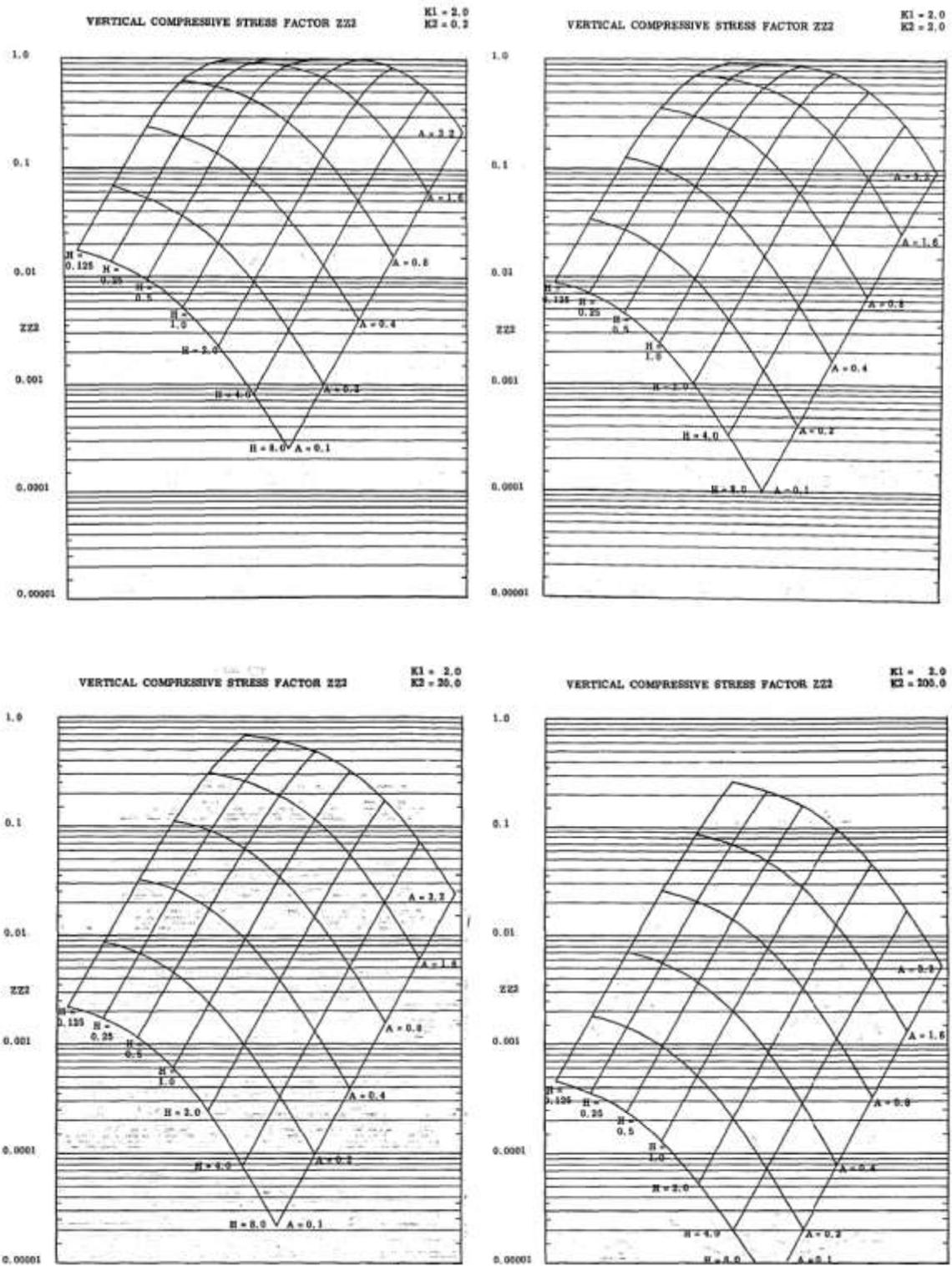


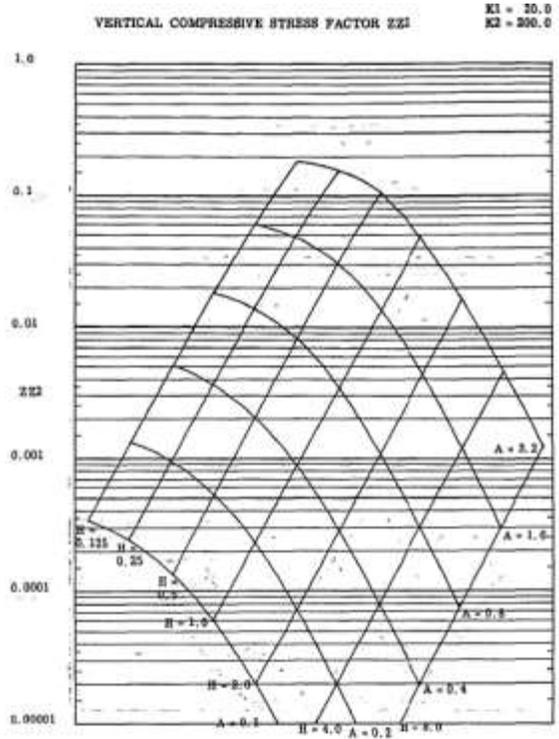
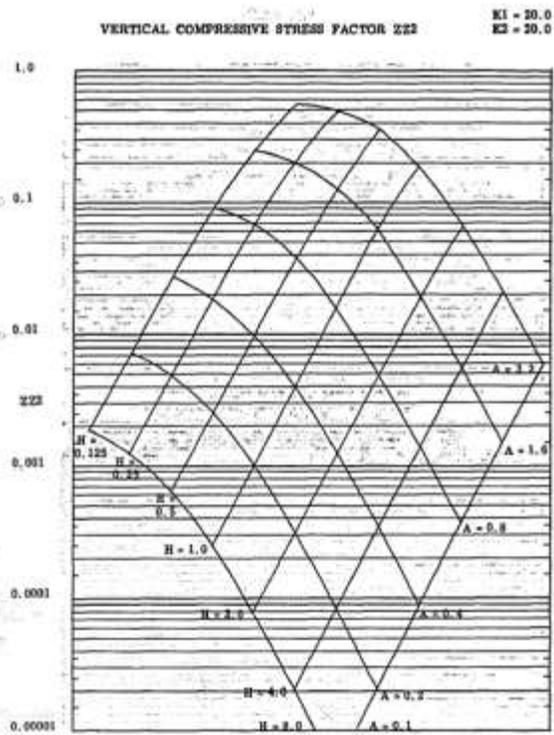
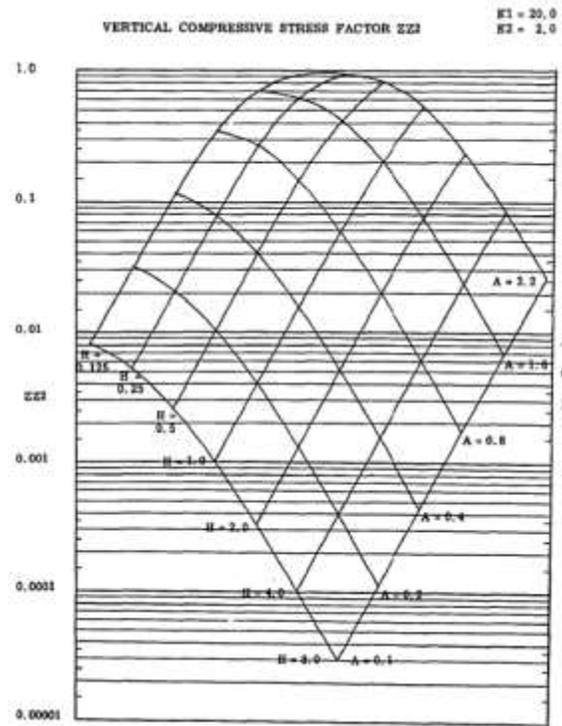
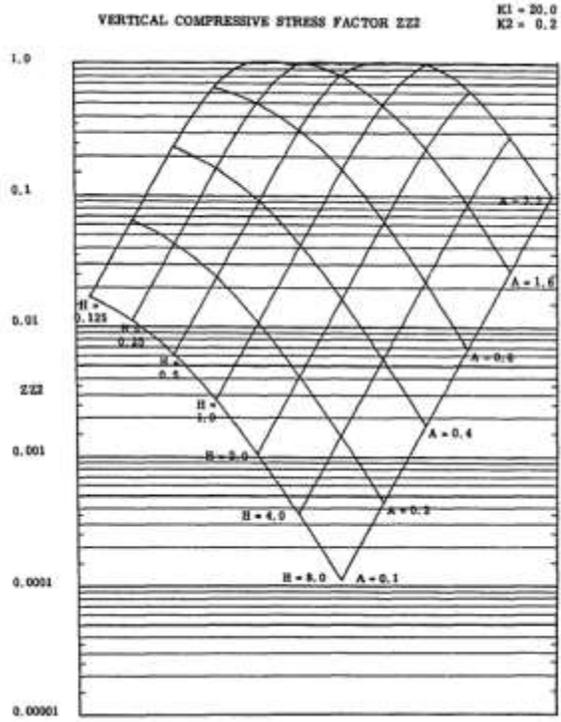


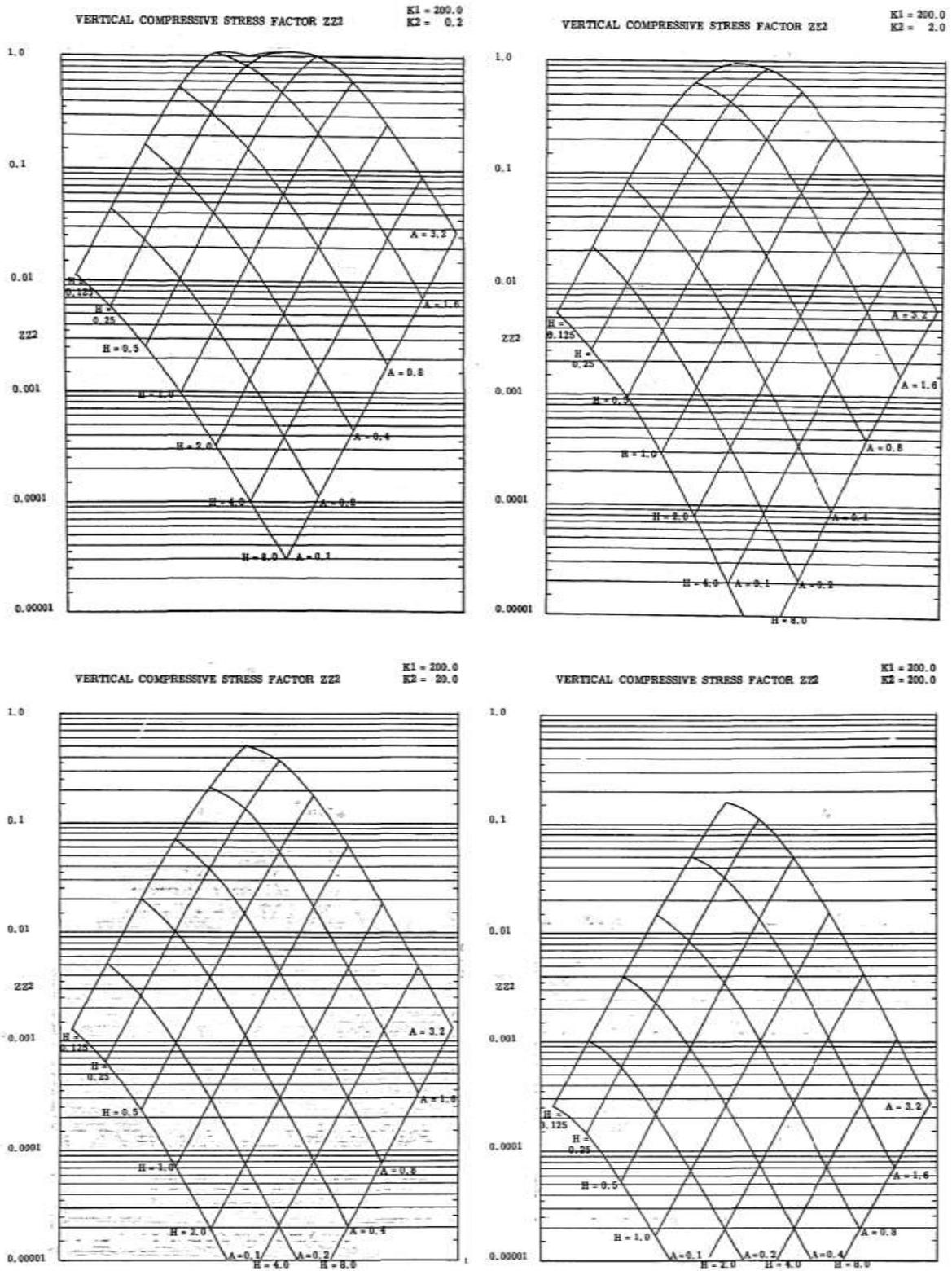


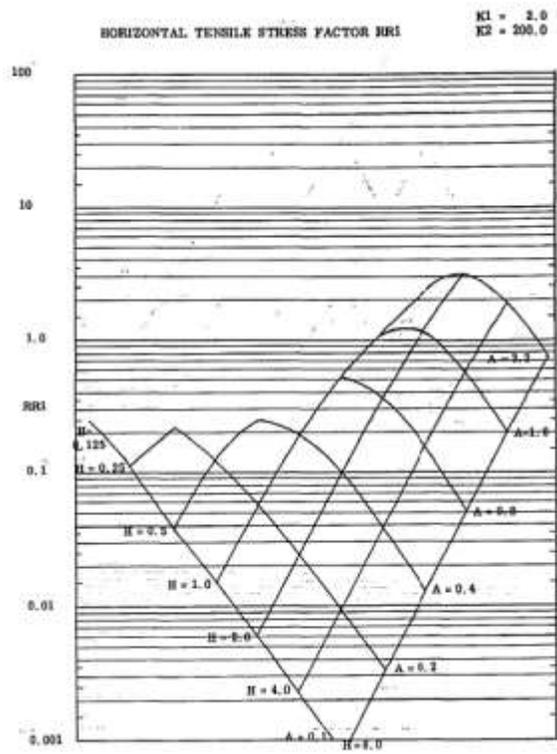
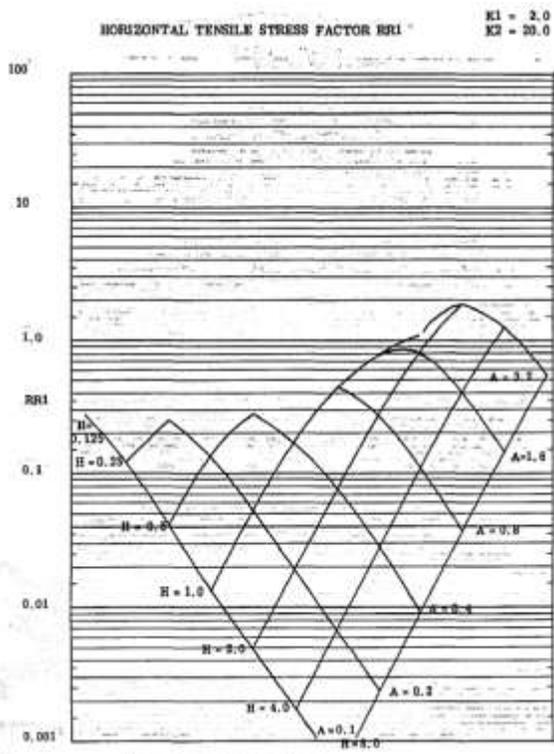
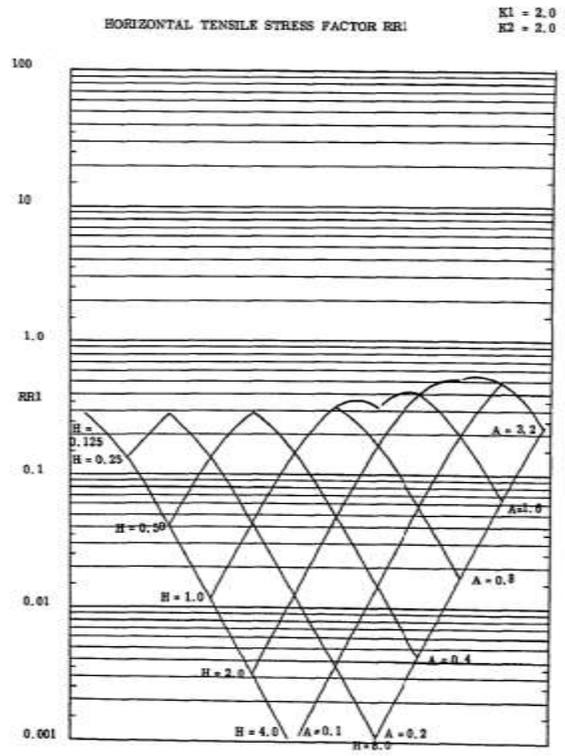
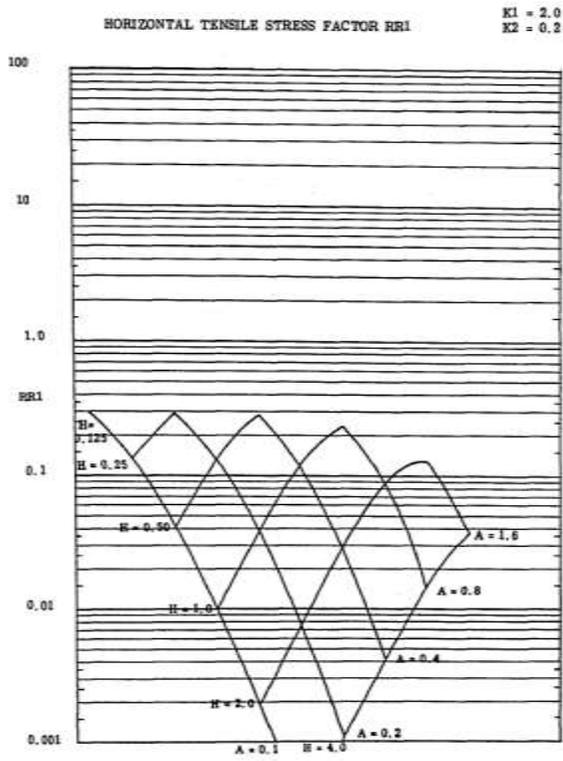


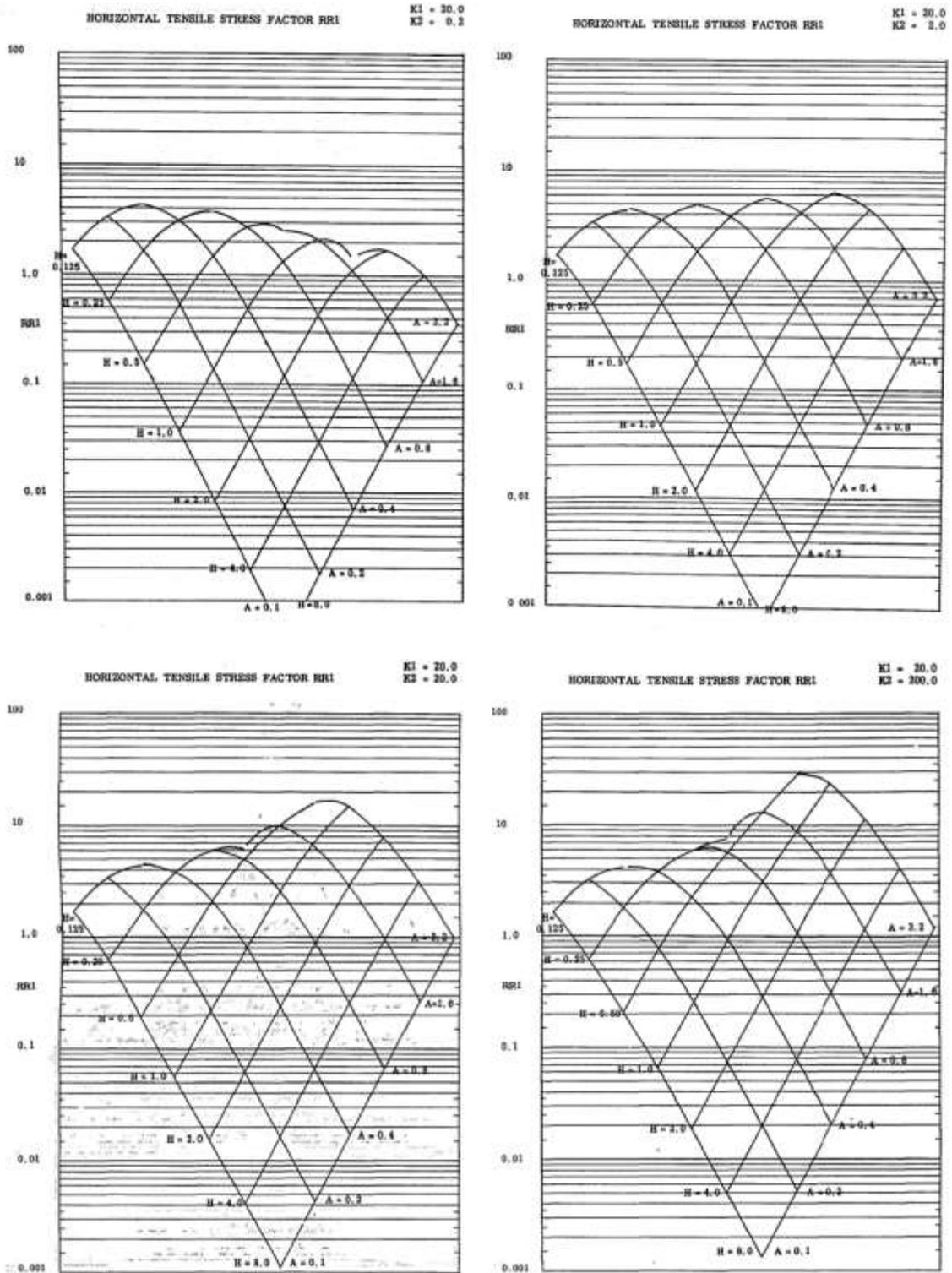


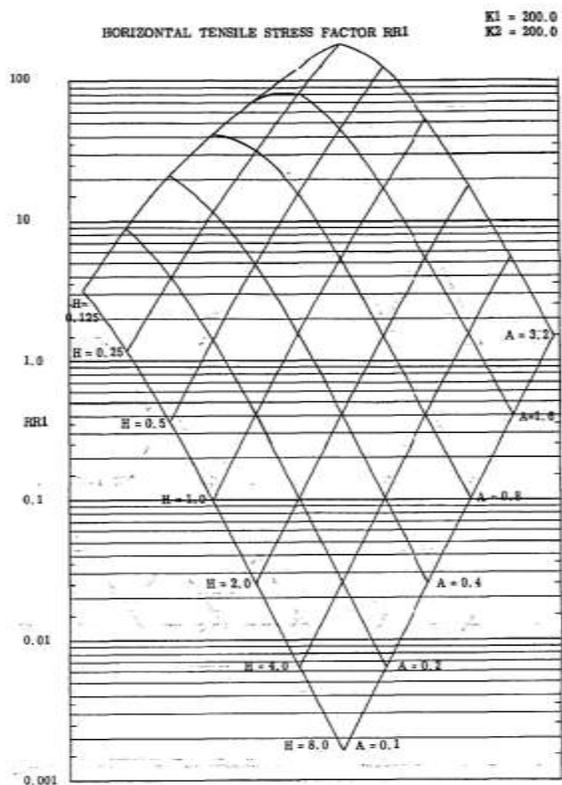
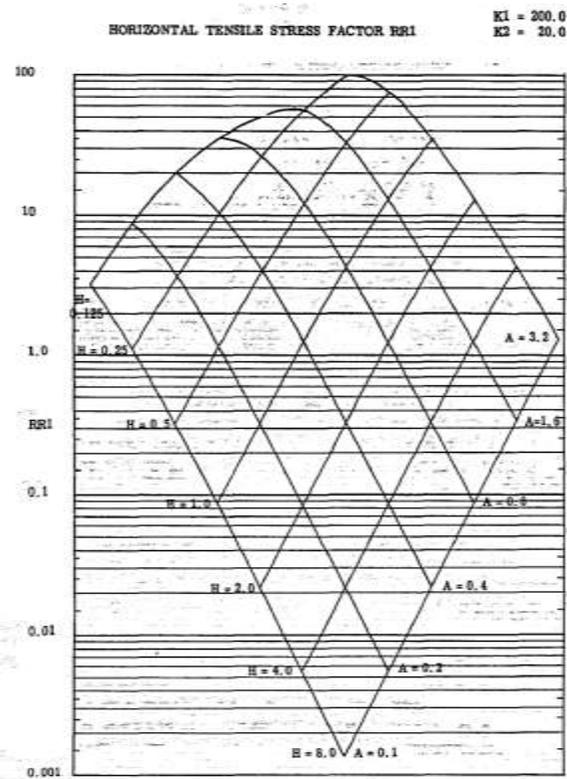
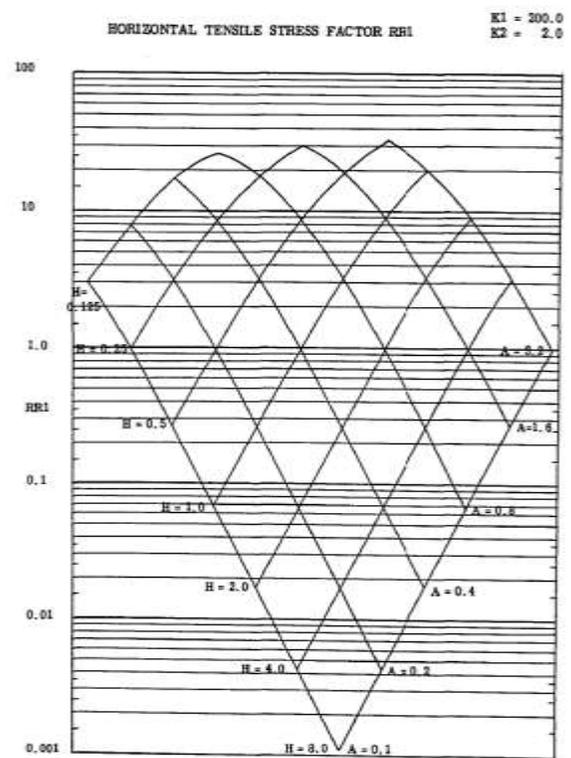
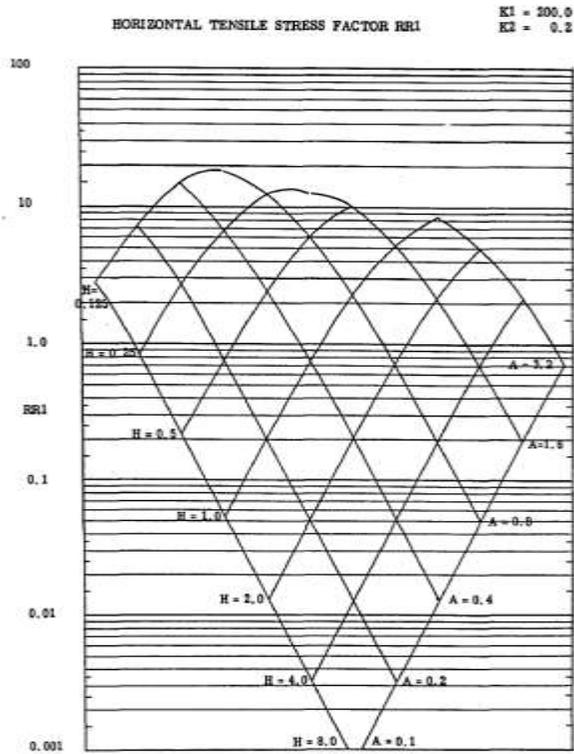


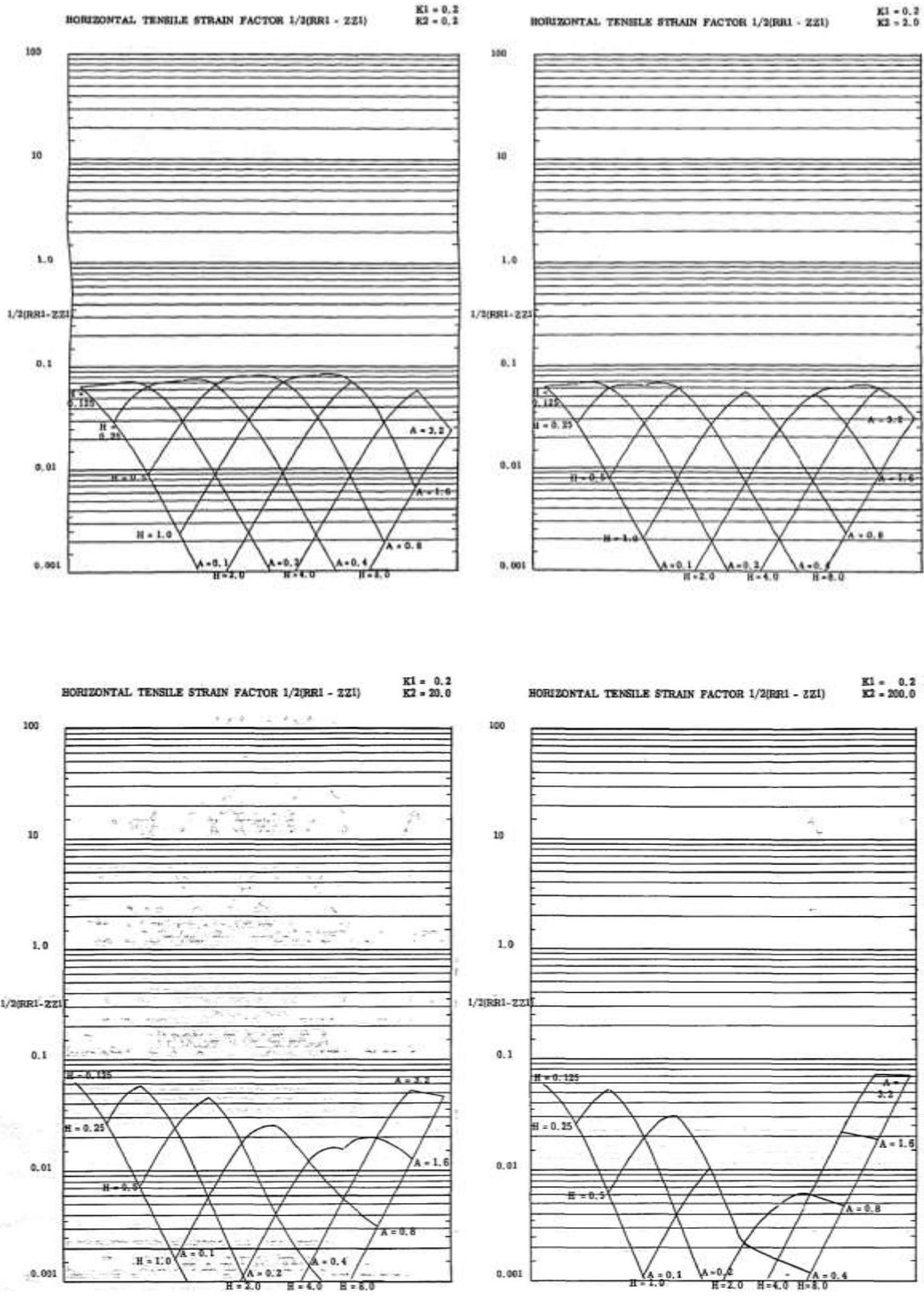


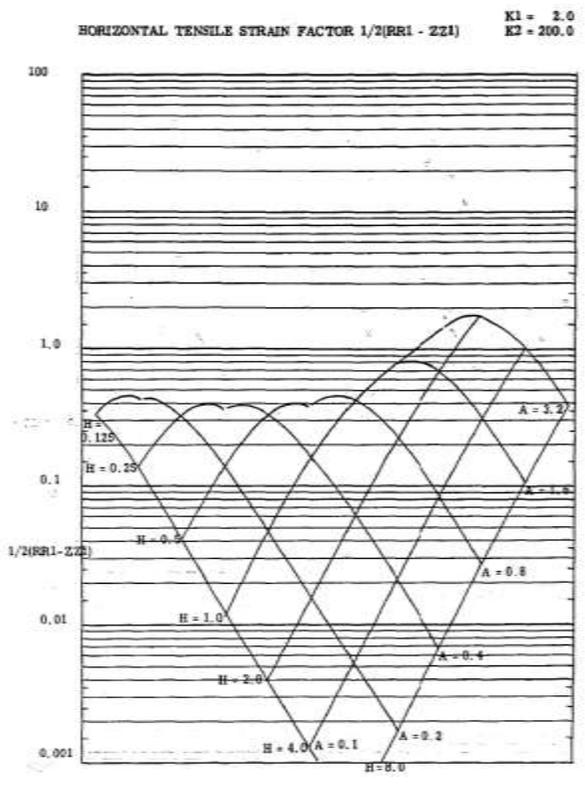
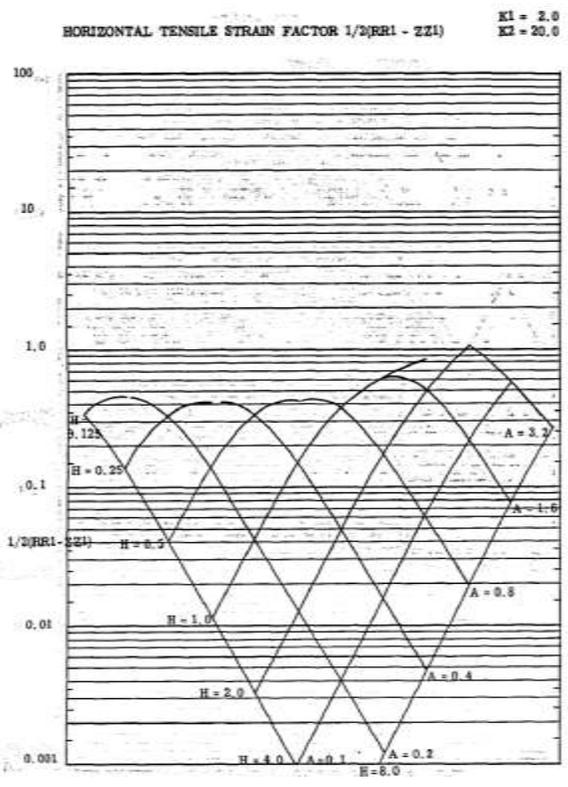
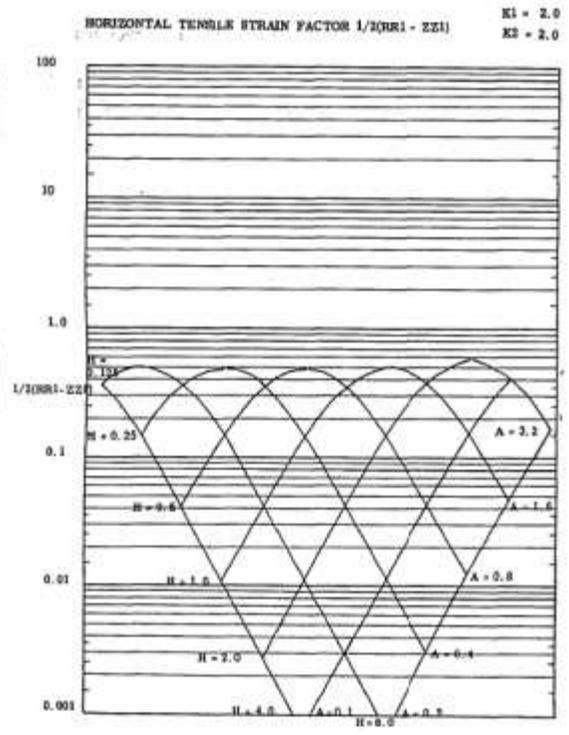
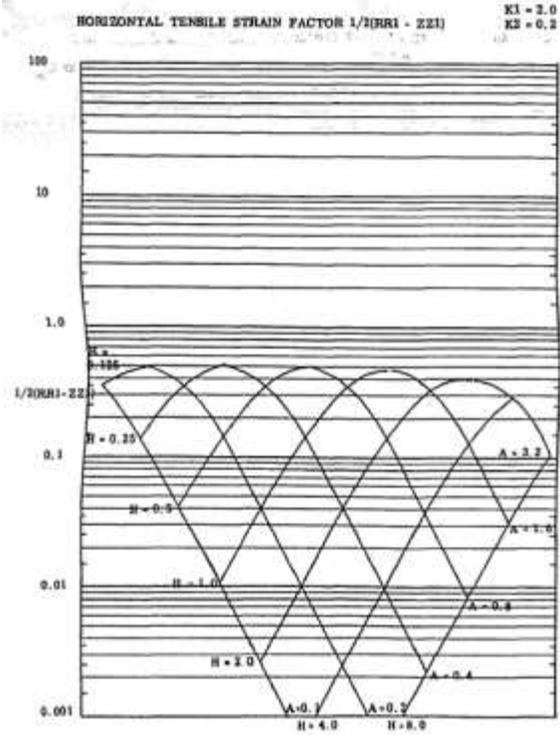


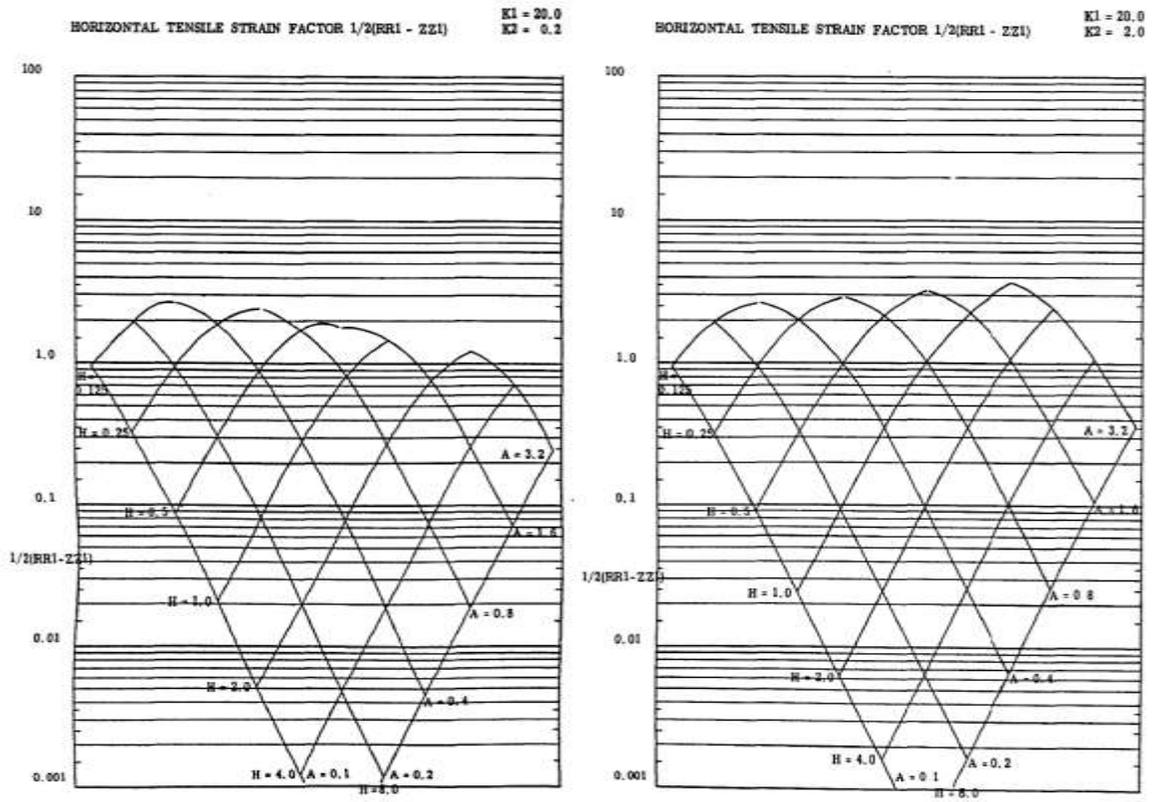


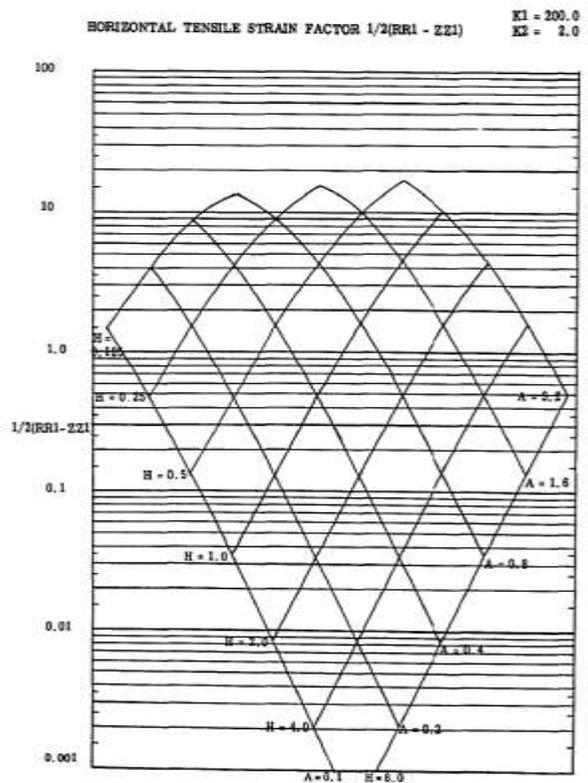
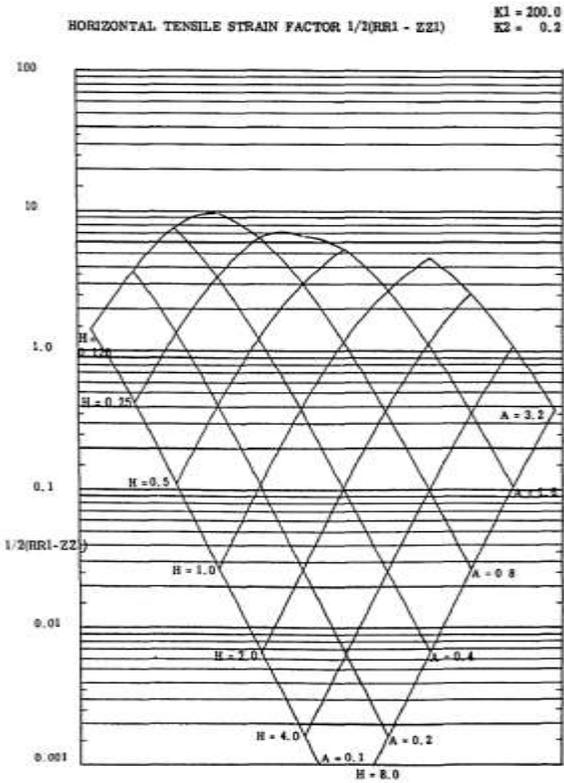
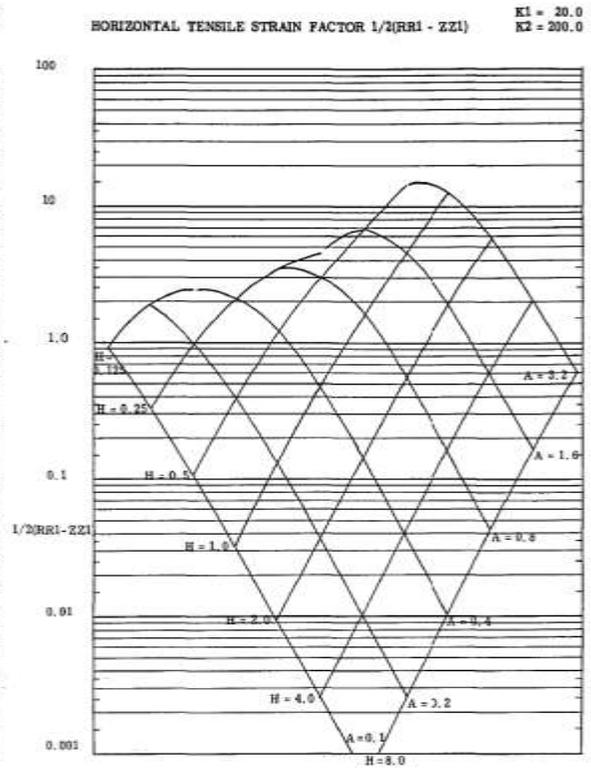
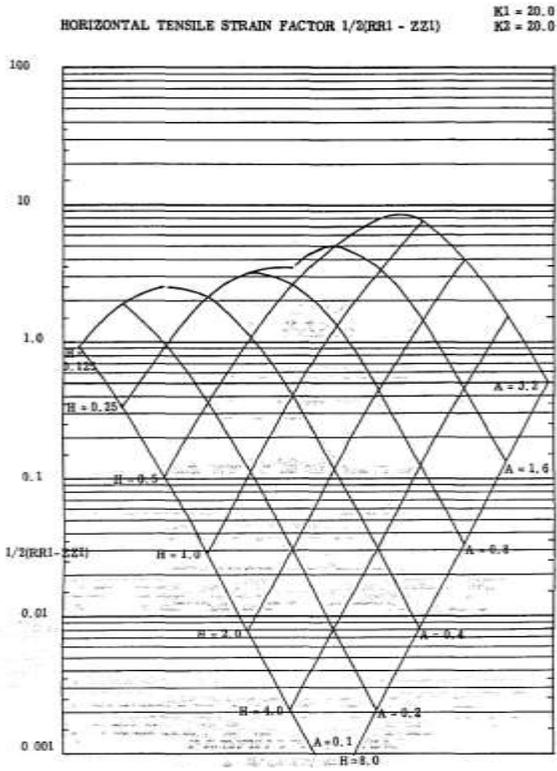




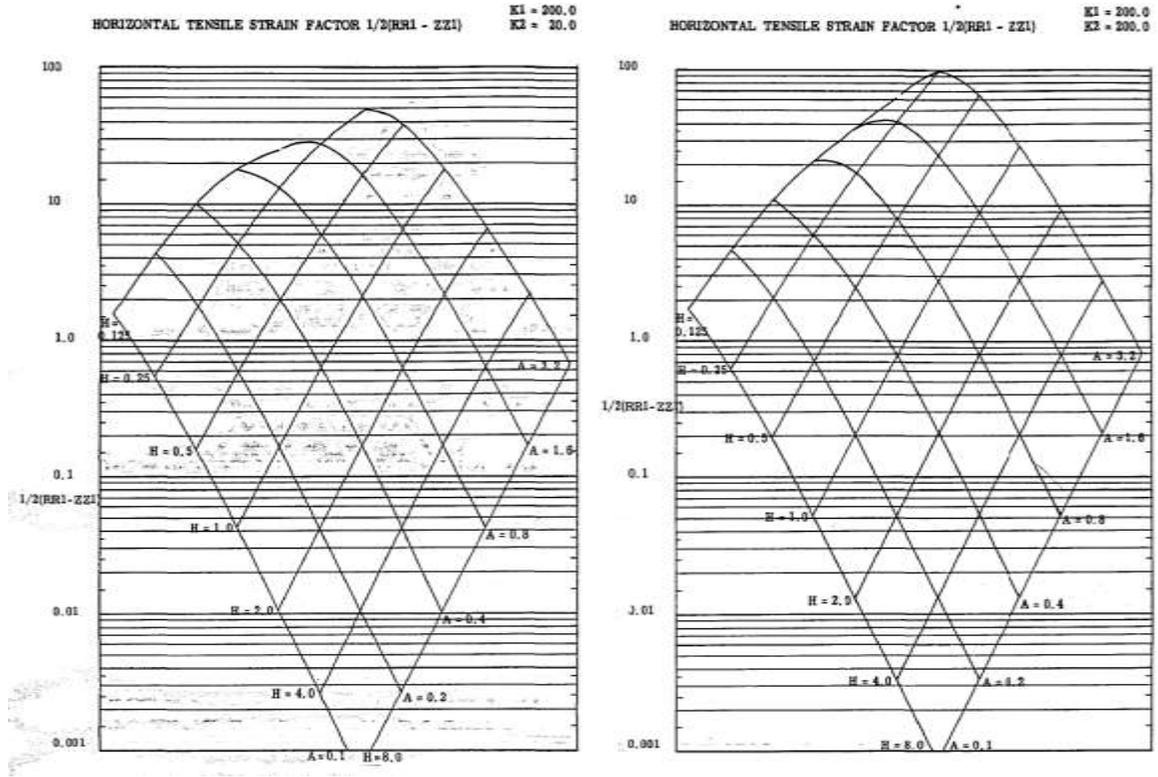








*Teorías para calcular esfuerzos, deformaciones y deflexiones en pavimentos flexibles: un enfoque mecanicista*



Anexo 5. Tablas de Kirk.

Tabla 0.12 Factores de esfuerzo para determinar esfuerzos radiales en la parte superior e inferior de la primera capa de un pavimento tricapa, Kirk 1966.

H1/A = 0.25		H2/A = 1.00		Z/H1 = 0.00						
E1/E2	E2/E3	R/A=0.0	R/A=0.5	R/A=1.0	R/A=1.5	R/A=2.0	R/A=2.5	R/A=3.0	R/A=3.5	R/A=4.0
2	5	-0.69	-0.54	-0.54	-0.41	-0.16	-0.06	-0.01	0.02	0.03
5	5	0.31	0.47	-0.31	-0.72	-0.34	-0.16	-0.07	-0.03	0
10	5	2.11	2.06	0.22	-0.98	-0.58	-0.32	-0.19	-0.11	-0.06
20	5	5.29	4.76	1.34	-1.1	-0.91	-0.59	-0.4	-0.28	-0.2
50	5	12.1	10.54	4.39	-0.44	-1.22	-1.13	-0.92	-0.73	-0.57
100	5	19.13	16.72	8.33	1.27	-0.83	-1.37	-1.4	-1.26	-1.09
500	5	39.68	35.63	23.02	11.13	5.08	1.7	-0.24	-1.33	-1.91
2	10	-0.88	-0.72	-0.7	-0.52	-0.24	-0.1	-0.03	0.01	0.04
5	10	0.18	0.34	-0.43	-0.83	-0.42	-0.22	-0.11	-0.05	0
10	10	2.18	2.12	0.24	-1	-0.62	-0.37	-0.23	-0.14	-0.09
20	10	5.75	5.18	1.65	-0.91	-0.82	-0.58	-0.41	-0.31	-0.24
50	10	13.43	11.81	5.43	0.32	-0.72	-0.84	-0.78	-0.69	-0.61
100	10	21.44	18.92	10.24	2.8	0.29	-0.62	-0.94	-1.03	-1.03
500	10	44.75	40.6	27.67	15.31	8.69	4.71	2.18	0.54	-0.54

H1/A = 0.25		H2/A = 1.00		Z/H1 = 1.00						
E1/E2	E2/E3	R/A=0.0	R/A=0.5	R/A=1.0	R/A=1.5	R/A=2.0	R/A=2.5	R/A=3.0	R/A=3.5	R/A=4.0
2	5	-2.07	-2.02	-1.07	-0.17	-0.05	0.03	0.08	0.09	0.09
5	5	-3.38	-3.28	-1.56	-0.08	0	0.48	0.12	0.14	0.14
10	5	-5.27	-4.95	-2.21	0.02	0.14	0.17	0.21	0.21	0.21
20	5	-8.38	-7.58	-3.37	0.03	0.38	0.39	0.38	0.3	0.33
50	5	-14.83	-13.06	-6.31	-0.69	0.6	0.85	0.84	0.77	0.68
100	5	-21.49	-18.9	-10.07	-2.37	0.17	1.03	1.26	1.25	1.16

500	5	-41.05	-36.93	-24.16	-11.94	-5.65	-2.08	-0.01	1.19	1.85
2	10	-2.53	-2.45	-1.41	-0.41	-0.2	-0.04	0.05	0.09	0.11
5	10	-4.08	-3.94	-2.09	-0.46	-0.24	-0.06	0.06	0.13	0.16
10	10	-6.24	-5.85	-2.94	-0.5	-0.2	-0.03	0.1	0.18	0.22
20	10	-9.73	-8.84	-4.4	-0.73	-0.12	0.09	0.22	0.3	0.34
50	10	-16.98	-15.09	-8.04	-2.01	-0.33	0.25	0.5	0.61	0.65
100	10	-24.49	-21.77	-12.58	-4.41	-1.35	-0.04	0.58	0.88	1.01
500	10	-46.48	-42.23	-29.13	-16.4	-9.51	-5.31	-2.6	-0.81	0.37

<b>H1/A = 0.25</b>		<b>H2/A = 2.00</b>		<b>Z/H1 = 0.00</b>						
<b>E1/E2</b>	<b>E2/E3</b>	<b>R/A=0.0</b>	<b>R/A=0.5</b>	<b>R/A=1.0</b>	<b>R/A=1.5</b>	<b>R/A=2.0</b>	<b>R/A=2.5</b>	<b>R/A=3.0</b>	<b>R/A=3.5</b>	<b>R/A=4.0</b>
2	5	-0.58	-0.44	-0.5	-0.42	-0.21	-0.12	-0.07	-0.04	-0.02
5	5	0.19	0.36	-0.39	-0.78	-0.4	-0.24	-0.15	-0.09	-0.05
10	5	1.56	1.58	-0.11	-1.15	-0.65	-0.36	-0.21	-0.14	-0.1
20	5	4.06	3.76	0.61	-1.45	-1	-0.56	-0.34	-0.23	-0.16
50	5	9.5	58.2	2.71	-1.37	-1.52	-1.06	-0.68	-0.46	-0.34
100	5	15.33	13.24	5.66	-0.38	-1.57	-1.46	-1.11	-0.82	-0.52
500	5	34.05	30.28	18.41	-7.56	2.63	0.26	-0.85	-1.33	-1.5
2	10	-0.69	-0.56	-0.61	-0.51	0.29	-0.19	-0.12	-0.08	-0.05
5	10	0.05	0.22	-0.53	-0.91	-0.51	-0.32	-0.22	-0.15	-0.1
10	10	1.44	1.47	-0.22	-1.26	-0.75	-0.45	-0.3	-0.22	-0.16
20	10	4	3.62	0.54	-1.52	-1.08	-0.64	-0.41	-0.29	-0.22
50	10	9.7	8.39	2.86	-1.26	-1.45	-1.03	-0.68	-0.48	-0.37
100	10	15.9	13.78	6.15	0.03	-1.24	-1.22	-0.95	-0.72	-0.57
500	10	36.32	32.51	20.53	9.51	4.36	1.75	0.45	-0.3	-0.68

<b>H1/A = 0.25</b>		<b>H2/A = 2.00</b>		<b>Z/H1 = 1.00</b>						
<b>E1/E2</b>	<b>E2/E3</b>	<b>R/A=0.0</b>	<b>R/A=0.5</b>	<b>R/A=1.0</b>	<b>R/A=1.5</b>	<b>R/A=2.0</b>	<b>R/A=2.5</b>	<b>R/A=3.0</b>	<b>R/A=3.5</b>	<b>R/A=4.0</b>

2	5	-1.53	-1.57	-0.81	-0.11	-0.13	-0.9	-0.05	-0.02	0
5	5	-2.48	-2.52	-1.12	0.02	-0.12	-0.13	-0.08	-0.04	-0.01
10	5	-3.95	-3.82	-1.54	0.2	0	-0.1	-0.11	-0.04	0
20	5	-6.44	-5.9	-2.32	0.39	0.25	-0.03	-0.06	-0.01	0.02
50	5	-11.74	-10.32	-4.42	0.2	0.68	0.45	0.26	0.17	0.16
100	5	-17.4	-15.18	-7.31	-0.8	0.69	0.81	0.65	0.51	0.42
500	5	-35.54	-31.7	-19.72	-8.57	-3.43	-0.89	0.36	0.96	1.23
2	10	-1.7	-1.73	-0.96	-0.24	-0.24	-0.2	-0.12	-0.07	-0.04
5	10	-2.78	-2.82	-1.4	-0.23	-0.3	-0.27	-0.2	-0.13	-0.07
10	10	-4.32	-4.18	-1.87	-0.08	-0.24	-0.3	-0.24	-0.16	-0.09
20	10	-6.94	-6.38	-2.76	0.01	-0.07	-0.23	-0.23	-0.17	-0.1
50	10	-12.51	-11.06	-5.11	-0.39	0.19	0.06	-0.05	-0.06	-0.02
100	10	-18.52	-16.27	-8.32	-1.68	-0.05	0.22	0.18	0.15	0.15
500	10	-38.23	-34.35	-22.24	-10.9	-5.51	-2.7	-1.18	-0.31	0.2

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 0.13 Factores de esfuerzo para determinar esfuerzos radiales en la parte superior e inferior de la primera capa de un pavimento tricapa, Kirk 1966. Continuación.**

<b>H1/A= 0.25</b>		<b>H2/A= 3.00</b>		<b>Z/H1= 0.00</b>						
<b>E1/E2</b>	<b>E2/E3</b>	<b>R/A = 0.0</b>	<b>R/A = 0.5</b>	<b>R/A = 1.0</b>	<b>R/A = 1.5</b>	<b>R/A = 2.0</b>	<b>R/A = 2.5</b>	<b>R/A= 3.0</b>	<b>R/A = 3.5</b>	<b>R/A = 4.0</b>
2	5	-0.49	-0.37	-0.44	-0.38	-0.19	-0.12	-0.09	-0.06	-0.04
5	5	0.26	0.43	-0.34	-0.75	-0.38	-0.23	-0.16	-0.12	-0.09
10	5	1.57	1.59	-0.09	-1.14	-0.64	-0.36	-0.23	-0.17	-0.13
20	5	3.89	3.52	0.48	-1.54	-1.05	-0.59	-0.35	-0.24	-0.18
50	5	8.9	7.65	2.24	-1.7	-1.77	-1.14	-0.7	-0.44	-0.3
100	5	14.21	12.18	4.76	-1.05	-1.99	-1.67	-1.17	-0.78	-0.53
500	5	31.26	27.58	15.98	5.53	1.06	-0.84	-1.52	-1.63	-1.53
2	10	-0.56	-0.43	-0.51	-0.44	-0.25	-0.17	-1.13	-0.1	-0.06
5	10	0.16	0.33	-0.43	-0.84	-0.47	-0.31	-0.23	-0.18	-0.14
10	10	1.45	1.4	-0.2	-1.24	-0.74	-0.45	-0.32	-0.24	-0.2
20	10	3.79	3.42	0.38	-1.63	-1.14	-0.68	-0.44	-0.32	-0.25
50	10	8.88	7.62	2.21	-1.74	-1.76	-1.2	-0.76	-0.5	-0.37
100	10	14.55	12.32	4.88	-0.95	-1.91	-1.62	-1.14	-0.76	-0.53
500	10	32.32	28.61	16.97	6.46	1.9	-0.09	-0.87	-1.09	-1.07

<b>H1A = 0.25</b>		<b>H2/A= 3.00</b>		<b>Z/H1 = 1.00</b>						
<b>E1/E2</b>	<b>E2/E3</b>	<b>R/A = 0.0</b>	<b>R/A = 0.5</b>	<b>R/A = 1.0</b>	<b>R/A = 1.5</b>	<b>R/A = 2.0</b>	<b>R/A = 2.5</b>	<b>R/A= 3.0</b>	<b>R/A = 3.5</b>	<b>R/A = 4.0</b>
2	5	-1.36	-1.41	-0.69	-0.03	-0.09	-0.09	-0.07	-0.05	-0.04
5	5	-2.21	-2.27	-0.92	0.15	-0.05	-0.12	-0.11	-0.09	-0.07
10	5	-3.56	-3.47	-1.26	0.39	0.09	-0.09	-0.13	-0.11	-0.09
20	5	-5.88	-5.38	-1.91	0.66	0.39	0.05	-0.09	-0.11	-0.09
50	5	-10.78	-9.42	-3.7	0.71	0.96	0.53	0.19	0.3	-0.02

100	5	-15.97	-13.83	-6.18	0.02	1.19	1.02	0.64	0.34	0.18
500	5	-32.8	-28.89	-17.2	-6.48	-1.85	0.17	0.96	1.17	1.15
2	10	-1.45	-1.5	-0.77	-0.11	-0.16	-0.15	-0.12	-0.1	-0.07
5	10	-2.35	-2.42	-1.06	0.02	-0.17	-0.22	-0.21	-0.17	-0.13
10	10	-3.76	-3.66	-1.45	0.21	0.04	-0.24	-0.26	-0.22	-0.18
20	10	-6.15	-5.64	-2.15	0.43	0.18	-0.14	-0.25	-0.25	-0.21
50	10	-11.17	-9.8	-4	0.37	0.65	0.26	-0.04	-0.17	-0.19
100	10	-16.52	-14.37	-6.49	-0.45	0.76	0.64	0.31	0.07	-0.05
500	10	-34.03	-30.28	-18.54	-7.75	-3.01	-0.88	0.03	0.37	0.46

<b>H1A = 0.50</b>		<b>H2/A= 1.00</b>		<b>Z/H1 = 0.00</b>						
<b>E1/E2</b>	<b>E2/E3</b>	<b>R/A = 0.0</b>	<b>R/A = 0.5</b>	<b>R/A = 1.0</b>	<b>R/A = 1.5</b>	<b>R/A = 2.0</b>	<b>R/A = 2.5</b>	<b>R/A= 3.0</b>	<b>R/A = 3.5</b>	<b>R/A = 4.0</b>
2	5	0.09	0.09	-0.18	-0.31	-0.19	-0.1	-0.06	-0.03	-0.02
5	5	1.48	1.3	0.36	-0.31	-0.3	-0.22	-0.16	-0.11	-0.08
10	5	3.13	2.72	1.16	-0.08	-0.3	-0.31	-0.27	-0.22	-0.18
20	5	5.22	4.58	2.39	0.52	-0.09	-0.3	-0.35	-0.34	-0.31
50	5	8.43	7.52	4.62	1.96	0.75	0.12	-0.21	-0.37	-0.44
100	5	11	9.95	6.65	3.52	1.88	0.9	0.29	-0.09	-0.32
500	5	16.81	15.58	11.79	8.01	5.7	4.09	2.91	2.02	1.34
2	10	0.07	0.07	-0.2	-0.33	-0.2	-0.12	-0.07	-0.04	-0.02
5	10	1.6	1.41	0.45	-0.25	-0.26	-0.2	-0.15	-0.11	-0.09
10	10	3.43	3.01	1.41	0.12	-0.08	-0.21	-0.21	-0.19	-0.17
20	10	5.78	5.12	2.88	0.93	0.23	-0.05	-0.18	-0.23	-0.25
50	10	9.41	8.48	5.52	2.76	1.44	0.69	0.24	-0.03	-0.2
100	10	12.3	11.22	7.87	4.64	2.88	1.77	1.03	0.53	0.17
500	10	18.62	17.38	13.55	9.71	7.32	5.62	4.33	3.34	2.54

<b>H1A = 0.50</b>		<b>H2/A= 1.00</b>		<b>Z/H1 = 0.00</b>						
<b>E1/E2</b>	<b>E2/E3</b>	<b>R/A = 0.0</b>	<b>R/A = 0.5</b>	<b>R/A = 1.0</b>	<b>R/A = 1.5</b>	<b>R/A = 2.0</b>	<b>R/A = 2.5</b>	<b>R/A= 3.0</b>	<b>R/A = 3.5</b>	<b>R/A = 4.0</b>
2	5	-2.02	-1.9	-1.03	-0.19	-0.06	0	0.04	0.06	0.07
5	5	-3.4	-3.09	-1.6	-0.31	-0.03	0.06	0.1	0.12	0.12
10	5	-4.9	-4.39	-2.46	-0.58	-0.07	0.11	0.17	0.2	0.2
20	5	-6.63	-5.92	-3.46	-1.16	-0.31	0.07	0.22	0.29	0.31
50	5	-9.49	-8.55	-5.49	-2.52	-1.13	-0.38	0.03	0.28	0.4
100	5	-11.83	-10.76	-7.37	-3.98	-2.21	-1.13	-0.47	-0.03	0.25
500	5	-17.28	-16.05	-12.23	-8.27	-5.9	-1.24	-3.04	-2.12	-1.41
2	10	-2.34	-2.21	-1.28	-0.39	-0.2	-0.09	-0.01	0.04	0.06
5	10	-3.61	-3.48	-1.99	-0.61	-0.26	-0.09	0	0.06	0.1
10	10	-5.43	-4.9	-2.89	-1.02	-0.41	-0.13	0.02	0.1	0.15
20	10	-7.48	-6.75	-4.2	-1.79	-0.81	-0.32	-0.06	0.1	0.2
50	10	-10.68	-9.71	-6.57	-3.49	-1.96	-1.06	-0.51	-0.14	-0.06
100	10	-13.26	-12.17	-8.71	-5.22	-3.32	-2.1	-1.29	-0.7	-0.29
500	10	-19.13	-17.89	-14.03	-10.01	-7.55	-5.8	-4.5	-3.46	-2.64

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 0.14 Factores de esfuerzo para determinar esfuerzos radiales en la parte superior e inferior de la primera capa de un pavimento tricapa, Kirk 1966. Continuación.**

<b>H1/A = 0.50</b>		<b>H2/A = 2.00</b>		<b>Z/H1 = 0.00</b>						
<b>E1/E2</b>	<b>E2/E3</b>	<b>R/A=0.0</b>	<b>R/A=0.5</b>	<b>R/A=1.0</b>	<b>R/A=1.5</b>	<b>R/A=2.0</b>	<b>R/A=2.5</b>	<b>R/A=3.0</b>	<b>R/A=3.5</b>	<b>R/A=4.0</b>
2	5	0	0.01	-0.25	-0.37	-0.23	-0.14	-0.09	-0.05	-0.03
5	5	1.15	0.99	0.12	-0.47	-0.39	-0.25	-0.16	-0.11	-0.07
10	5	2.51	2.16	0.71	-0.38	-0.47	-0.37	-0.26	-0.18	-0.13
20	5	4.29	3.71	1.67	0.01	-0.4	-0.44	-0.37	-0.29	-0.23
50	5	7.16	6.32	3.58	1.16	0.19	-0.21	-0.36	-0.38	-0.37
100	5	9.63	8.63	5.48	2.55	1.14	0.39	-0.02	-0.23	-0.34
500	10	15.75	14.54	10.81	7.13	4.94	3.46	2.4	1.64	1.06
2	10	-0.05	-0.04	-0.3	-0.42	-0.27	-0.17	-0.11	-0.08	-0.05
5	10	1.12	0.96	0.09	-0.5	-0.41	-0.28	-0.19	-0.13	-0.1
10	10	2.54	2.18	0.73	-0.37	-0.46	-0.37	-0.27	-0.19	-0.14
20	10	4.42	3.84	1.79	0.11	-0.32	-0.38	-0.33	-0.26	-0.21
50	10	7.53	6.68	3.92	1.47	0.46	0.02	-0.16	-0.23	-0.25
100	10	10.25	9.24	6.07	3.1	1.65	0.8	0.38	0.11	-0.06
500	10	17.06	15.84	12.09	8.37	6.13	4.59	3.47	2.63	1.97

<b>H1/A =0.50</b>		<b>H2/A = 2.00</b>		<b>Z/H1 = 1.00</b>						
<b>E1/E2</b>	<b>E2/E3</b>	<b>R/A=0.0</b>	<b>R/A=0.5</b>	<b>R/A=1.0</b>	<b>R/A=1.5</b>	<b>R/A=2.0</b>	<b>R/A=2.5</b>	<b>R/A=3.0</b>	<b>R/A=3.5</b>	<b>R/A=4.0</b>
2	5	-1.65	-1.58	-0.81	-0.1	-0.07	-0.06	-0.04	-0.02	-0.01
5	5	-2.74	-2.5	-1.23	-0.13	-0.01	-0.03	-0.04	-0.03	-0.01
10	5	-3.99	-3.56	-1.81	-0.28	0.02	0.05	0.04	0.03	0.04
20	5	-5.61	-4.98	-2.72	-0.69	-0.09	0.09	0.11	0.12	0.11
50	5	-8.25	-7.38	-4.51	-1.8	-0.67	-0.16	0.07	0.18	0.23
100	5	-10.54	-9.53	-6.29	-3.12	-1.59	-0.74	-0.27	0.02	0.18

500	5	-16.31	-15.11	-11.35	-7.49	-5.23	-3.8	-2.62	-1.81	-1.2
2	10	-1.78	-1.7	-0.93	-0.21	-0.16	-0.14	-0.1	-0.07	-0.04
5	10	-2.68	-2.69	-1.41	-0.29	-0.15	-0.13	-0.12	-0.09	-0.06
10	10	-4.26	-3.83	-2.06	-0.5	-0.17	-0.11	-0.1	-0.07	-0.04
20	10	-5.99	-5.35	-3.07	-1	-0.36	-0.14	-0.08	-0.04	-0.01
50	10	-8.83	-7.95	-5.06	-2.3	-1.12	-0.55	-0.27	-0.1	0
100	10	-11.34	-10.32	-7.05	-3.84	-2.24	-1.33	-0.79	-0.43	-0.2
500	10	-17.71	-16.5	-12.72	-8.82	-0.51	-4.91	-3.76	-2.87	-2.18

<b>H1/A = 0.50</b>		<b>H2/A = 3.00</b>		<b>Z/H1 = 0.00</b>						
<b>E1/E2</b>	<b>E2/E3</b>	<b>R/A=0.0</b>	<b>R/A=0.5</b>	<b>R/A=1.0</b>	<b>R/A=1.5</b>	<b>R/A=2.0</b>	<b>R/A=2.5</b>	<b>R/A=3.0</b>	<b>R/A=3.5</b>	<b>R/A=4.0</b>
2	5	0.02	0.03	-0.24	-0.36	-0.23	-0.14	-0.09	-0.06	-0.05
5	5	1.11	0.96	0.09	-0.5	-0.41	-0.27	-0.18	-0.12	-0.08
10	5	2.37	2.02	0.6	-0.47	-0.53	-0.41	-0.24	-0.19	-0.14
20	5	4	3.44	1.43	-0.19	-0.54	-0.53	-0.42	-0.31	-0.23
50	5	6.63	5.81	3.12	0.77	-0.11	-0.43	-0.49	-0.45	-0.39
100	5	8.92	7.94	4.81	2	0.69	0.04	-0.27	-0.39	-0.42
500	5	14.87	13.67	9.99	6.36	4.25	2.86	1.59	1.22	0.73
2	10	-0.02	-0.01	-0.27	-0.4	-0.26	-0.17	-0.12	-0.09	-0.07
5	10	1.07	0.91	0.05	-0.54	-0.45	-0.31	-0.21	-0.15	-0.12
10	10	2.35	2	0.57	-0.5	-0.56	-0.44	-0.32	-0.22	-0.16
20	10	4.29	3.45	1.45	-0.18	-0.53	-0.53	-0.43	-0.32	-0.24
50	10	6.78	5.95	3.25	0.89	-0.01	-0.33	-0.41	-0.39	-0.34
100	10	9.28	8.3	5.19	2.26	0.93	0.27	-0.07	-0.21	-0.27
500	10	15.75	14.55	10.84	7.2	5.06	3.63	2.62	1.9	1.37

<b>H1/A = 0.50</b>	<b>H2/A = 3.00</b>	<b>Z/H1 = 1.00</b>							
--------------------	--------------------	--------------------	--	--	--	--	--	--	--

E1/E2	E2/E3	R/A=0.0	R/A=0.5	R/A=1.0	R/A=1.5	R/A=2.0	R/A=2.5	R/A=3.0	R/A=3.5	R/A=4.0
2	5	-1.53	-1.46	-0.71	-0.04	-0.03	-0.05	-0.05	-0.04	-0.03
5	5	-2.54	-2.31	-1.07	-0.01	0.06	0.01	-0.03	-0.04	-0.04
10	5	-3.7	-3.16	-1.58	-0.11	0.13	0.1	0.03	0	-0.01
20	5	-5.19	-4.55	-2.38	-0.42	0.09	0.18	0.14	0.09	0.05
50	5	-7.64	-6.79	-3.98	-1.36	-0.35	0.01	0.18	0.21	0.19
100	5	-9.78	-8	-5.62	-2.63	-1.13	-0.41	-0.05	0.14	0.21
500	5	-15.46	-14.27	-10.55	-6.76	-4.58	-3.14	-2.15	-1.43	-0.91
2	10	-1.6	-1.53	-0.78	-0.1	-0.09	-0.1	-0.09	-0.08	-0.07
5	10	-2.63	-2.41	-1.18	-0.11	-0.03	-0.07	-0.1	-0.1	-0.09
10	10	-3.85	-3.43	-1.72	-0.16	0.1	-0.01	-0.06	-0.08	-0.09
20	10	-5.4	-4.78	-2.57	-0.61	-0.08	0.03	0	-0.02	-0.05
50	10	-7.96	-7.11	-4.29	-1.66	-0.62	-0.19	-0.04	0.02	0.03
100	10	-10.25	-9.26	-6.07	-2.98	-1.53	-0.77	-0.38	-0.16	-0.05
500	10	-16.45	-13.25	-11.52	-7.7	-5.49	-4.01	-2.97	-2.2	-1.64

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 0.15 Factores de esfuerzo para determinar esfuerzos radiales en la parte superior e inferior de la primera capa de un pavimento tricapa, Kirk 1966. Continuación.**

<b>H1/A = 1.00</b>		<b>H2/A = 1.00</b>		<b>Z/H1 = 0.00</b>						
<b>E1/E2</b>	<b>E2/E3</b>	<b>R/A = 0.0</b>	<b>R/A = 0.5</b>	<b>R/A = 1.0</b>	<b>R/A = 1.5</b>	<b>R/A = 2.0</b>	<b>R/A = 2.5</b>	<b>R/A = 3.0</b>	<b>R/A = 3.5</b>	<b>R/A = 4.0</b>
2	5	0.42	0.34	0.12	-0.05	-0.09	-0.08	-0.06	-0.05	-0.04
5	5	1.32	1.14	0.64	0.2	0.02	-0.04	-0.07	-0.08	-0.08
10	5	2.09	1.84	1.17	0.55	0.24	0.08	0	-0.05	-0.08
20	5	2.87	2.57	1.77	1	0.57	0.32	0.17	0.06	-0.02
50	5	3.85	3.51	2.61	1.71	1.16	0.8	0.55	0.36	0.22
100	5	4.53	4.18	3.23	2.27	1.66	1.24	0.94	0.7	0.51
500	5	5.94	5.57	4.57	3.55	2.87	2.39	2.02	1.71	1.45
2	10	0.48	0.4	0.17	-0.01	-0.05	-0.05	-0.04	-0.04	-0.04
5	10	1.46	1.27	0.77	0.32	0.12	0.04	0	-0.03	-0.04
10	10	2.31	2.06	1.38	0.74	0.41	0.23	0.12	0.05	0
20	10	3.18	2.88	2.07	1.28	0.83	0.55	0.37	0.23	0.13
50	10	4.25	3.92	3	2.09	1.51	1.14	0.86	0.65	0.48
100	10	4.98	4.63	3.67	2.7	2.07	1.64	1.32	1.06	0.84
500	10	0.44	6.08	5.07	4.05	3.36	2.87	2.49	2.16	0.89

<b>H1/A = 1.00</b>		<b>H2/A = 1.00</b>		<b>Z/H1 = 1.00</b>						
<b>E1/E2</b>	<b>E2/E3</b>	<b>R/A = 0.0</b>	<b>R/A = 0.5</b>	<b>R/A = 1.0</b>	<b>R/A = 1.5</b>	<b>R/A = 2.0</b>	<b>R/A = 2.5</b>	<b>R/A = 3.0</b>	<b>R/A = 3.5</b>	<b>R/A = 4.0</b>
2	5	-0.64	-1.58	-0.92	-0.25	-0.13	-0.06	-0.01	0.01	0.03
5	5	-2.3	-2.17	-1.35	-0.51	-0.27	-0.12	-0.03	0.02	0.05
10	5	-2.89	-2.72	-1.79	-0.83	-0.47	-0.25	-0.11	-0.02	0.03
20	5	-3.52	-3.31	-2.3	-1.23	-0.78	-0.48	-0.33	-0.14	-0.04
50	5	-4.34	-4.11	-3.02	-1.86	-1.32	-0.93	-0.65	-0.44	-0.28
100	5	-4.95	-4.7	-3.58	-2.38	-1.79	-1.35	-1.02	-0.77	-0.57

500	5	-6.27	-6.01	-4.86	-3.6	-2.96	-2.46	-2.06	-1.75	-1.48
2	10	-1.82	-1.75	-1.08	-0.39	-0.24	-0.15	-0.08	-0.03	0
5	10	-2.55	-2.41	-1.58	-0.71	-0.44	-0.26	-0.15	-0.07	-0.02
10	10	-3.25	-3.07	-2.13	-1.14	-0.71	-0.45	-0.28	-0.16	-0.08
20	10	-3.88	-3.67	-2.65	-1.56	-1.08	-0.75	-0.52	-0.35	-0.22
50	10	-4.78	-4.54	-3.44	-2.27	-1.7	-1.29	-0.98	-0.74	-0.55
100	10	-5.42	-5.17	-4.04	-2.82	-2.22	-1.76	-1.41	-1.13	-0.91
500	10	-6.78	-6.52	-5.36	-4.1	-3.45	-2.94	-2.54	-2.21	-1.93

<b>H1/A = 1.00</b>		<b>H2/A = 2.00</b>		<b>Z/H1 = 0.00</b>						
<b>E1/E2</b>	<b>E2/E3</b>	<b>R/A = 0.0</b>	<b>R/A = 0.5</b>	<b>R/A = 1.0</b>	<b>R/A = 1.5</b>	<b>R/A = 2.0</b>	<b>R/A = 2.5</b>	<b>R/A = 3.0</b>	<b>R/A = 3.5</b>	<b>R/A = 4.0</b>
2	5	0.3	0.23	0.02	-0.14	-0.15	-0.11	-0.08	-0.06	-0.04
5	5	1.08	0.91	0.44	0.04	-0.1	-0.12	-0.11	-0.1	-0.08
10	5	1.78	1.55	0.91	0.33	0.07	-0.04	-0.08	-0.09	-0.1
20	5	2.53	2.25	1.47	0.75	0.36	0.16	0.05	-0.02	-0.06
50	5	3.53	3.21	2.32	1.45	0.93	0.61	0.4	0.25	0.14
100	5	4.27	3.92	2.98	2.04	1.45	1.07	0.79	0.58	0.42
500	5	5.82	5.45	4.45	3.44	2.77	2.29	1.93	1.63	1.38
2	10	0.29	0.22	0.01	-0.14	-0.15	-0.12	-0.09	-0.06	-0.05
5	10	1.11	0.94	0.47	0.07	-0.05	-0.1	-0.09	-0.08	-0.07
10	10	1.87	1.63	0.99	0.4	0.13	0.02	-0.03	-0.05	-0.06
20	10	2.68	2.39	1.62	0.88	0.49	0.28	0.16	0.07	0.02
50	10	3.79	3.46	2.57	1.69	1.16	0.83	0.61	0.44	0.31
100	10	4.6	4.25	3.31	2.36	1.76	1.37	1.08	0.85	0.67
500	10	6.27	5.91	4.91	3.89	3.21	2.73	2.36	2.04	1.79

<b>H1/A = 1.00</b>		<b>H2/A =2.00</b>		<b>Z/H1 = 1.00</b>						
<b>E1/E2</b>	<b>E2/E3</b>	<b>R/A = 0.0</b>	<b>R/A = 0.5</b>	<b>R/A = 1.0</b>	<b>R/A = 1.5</b>	<b>R/A = 2.0</b>	<b>R/A = 2.5</b>	<b>R/A= 3.0</b>	<b>R/A = 3.5</b>	<b>R/A = 4.0</b>
2	5	-1.45	-1.4	-0.8	-0.18	-0.09	-0.06	-0.04	-0.02	-0.01
5	5	-2.07	-1.95	-1.17	-0.39	-0.2	-0.1	-0.05	-0.03	-0.01
10	5	-2.64	-2.47	-1.58	-0.67	-0.38	-0.2	-0.11	-0.05	0.01
20	5	-3.22	-3.03	-2.04	-1.02	-0.62	-0.37	-0.21	-0.11	-0.04
50	5	-4.08	-3.85	-2.79	-1.65	-1.14	-0.79	-0.54	-0.36	-0.23
100	5	-4.75	-4.49	-3.38	-2.2	-1.63	-1.21	-0.91	-0.68	-0.5
500	5	-6.17	-5.91	-4.76	-3.51	-2.87	-2.38	-1.99	-1.68	-1.43
2	10	-1.54	-1.49	-0.87	-0.24	-0.16	-0.11	-0.09	-0.06	-0.05
5	10	-2.18	-2.06	-1.28	-0.49	-0.29	-0.17	-0.11	-0.08	-0.05
10	10	-2.78	-2.62	-1.72	-0.8	-0.49	-0.3	-0.19	-0.12	-0.08
20	10	-3.45	-3.25	-2.26	-1.22	-0.82	-0.54	-0.37	-0.25	-0.17
50	10	-4.39	-4.16	-3.08	-1.94	-1.42	-1.05	-0.79	-0.59	-0.44
100	10	-5.1	-4.86	-3.74	-2.55	-1.97	-1.54	-1.22	-0.98	-0.78
500	10	-6.64	-6.38	-5.23	-3.97	-3.32	-2.82	-2.43	-2.11	-1.84

Fuente: Elaboración propia.



Km 12+000 Carretera Estatal 431 “El Colorado-Galindo”  
Parque Tecnológico San Fandila  
Mpio. Pedro Escobedo, Querétaro, México  
CP 76703  
Tel +52 (442) 216 9777 ext. 2610  
Fax +52 (442) 216 9671

[publicaciones@imt.mx](mailto:publicaciones@imt.mx)

<http://www.imt.mx/>